

В.Л. ГИНЗБУРГ
В.Н. ЦЫТОВИЧ

ПЕРЕХОДНОЕ
ИЗЛУЧЕНИЕ
И ПЕРЕХОДНОЕ
РАССЕЯНИЕ

В.Л. ГИНЗБУРГ
В.Н. ЦЫТОВИЧ

ПЕРЕХОДНОЕ
ИЗЛУЧЕНИЕ
И ПЕРЕХОДНОЕ
РАССЕЯНИЕ
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ
ТЕОРИИ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1984

В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович. **Переходное излучение и переходное рассеяние (некоторые вопросы теории)**. Монография.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 360 с.

В книге с общефизических позиций обсуждаются процессы излучения частиц при их переходе из одной среды в другую или при изменении свойств среды во времени (переходное излучение). В случае периодических сред переходное излучение приобретает ряд специфических свойств и называется резонансным переходным излучением или переходным рассеянием. Дополнительное излучение переходного типа возникает и при столкновениях частиц в среде (переходное тормозное излучение).

В книге, хотя она и не претендует на полноту, довольно подробно обсуждаются не только общие представления о переходном излучении, переходном рассеянии и переходном тормозном излучении, но и различные конкретные приложения, относящиеся к физике плазмы, астрофизике и т. д.

Рис. 24. Библ. назв. 223.

Виталий Лазаревич Гинзбург, Вадим Николаевич Цытович

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ПЕРЕХОДНОЕ РАССЕЯНИЕ (некоторые вопросы теории)

Оформление художника *Б. М. Рябышева*

Редактор *Л. П. Русакова*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева*

Корректоры *Н. Д. Дорохова, О. М. Кривенко*

ИБ № 11980

Сдано в набор 27.04.83. Подписано к печати 04.01.84. Т-01604. Формат 60×90^{1/16}. Бумага для глубокой печати. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 22,5. Условн. кр.-отт. 22,5. Уч.-изд. л. 25,57. Тираж 2550 экз. Заказ № 603. Цена 4 р. 20 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Излучение равномерно и прямолинейно движущегося заряда. (Общее введение)	7
§ 1.1. Введение. Эффект Вавилова — Черенкова	7
§ 1.2. Переходное излучение	11
§ 1.3. Переходное рассеяние	15
§ 1.4. Переходное тормозное излучение	17
§ 1.5. О характере настоящей книги	18
Глава 2. Основы теории переходного излучения	20
§ 2.1. Переходное излучение заряда на границе идеального проводника	20
§ 2.2. Переходное излучение заряда на границе раздела двух изотропных сред	25
§ 2.3. Переходное излучение заряженной частицы в нестационарной среде	46
§ 2.4. Зона формирования переходного излучения. Переходное излучение на размытой границе раздела сред и при плавном изменении свойств среды во времени	51
§ 2.5. Энергетический баланс в переходном излучении. Работа сил. Перенормировка собственной энергии (массы)	64
§ 2.6. Баланс импульсов в переходном излучении	79
§ 2.7. Вероятности переходного излучения	89
Глава 3. Некоторые задачи теории переходного излучения	99
§ 3.1. Переходное излучение поверхностных волн	99
§ 3.2. Переходное излучение при наличии излучения Вавилова — Черенкова	109
§ 3.3. Переходное излучение в анизотропных и гиротропных средах	120
§ 3.4. Переходное излучение в средах с пространственной дисперсией	130
§ 3.5. Переходное излучение в нелинейных средах	146
§ 3.6. Переходное излучение электрических и магнитных дипольных моментов	155
§ 3.7. Когерентное переходное излучение сгустков зарядов и токов	170
§ 3.8. Интерференционные эффекты в переходном излучении. Индуцированное переходное излучение	175
Глава 4. Переходное рассеяние	191
§ 4.1. Общие представления о переходном рассеянии. Законы сохранения	191
§ 4.2. Излучение в периодической среде	196
§ 4.3. Общая теория переходного рассеяния на заряде	204
§ 4.4. Переходное рассеяние на электрических и магнитных диполях	212
§ 4.5. Переходное рассеяние зарядов в средах со случайными неоднородностями	217
§ 4.6. Индуцированное (вынужденное) переходное рассеяние	226
§ 4.7. Интерференция томсоновского и переходного рассеяния	232

Глава 5. Переходное тормозное излучение (переходное излучение при столкновении частиц)	234
§ 5.1. Общие представления о переходном тормозном излучении	234
§ 5.2. Эффект плотности в обычном тормозном излучении	238
§ 5.3. Общая теория переходного тормозного излучения	244
§ 5.4. Переходное тормозное излучение ультрарелятивистских зарядов и диполей на покоящемся заряде	252
§ 5.5. Индуцированное переходное тормозное излучение	258
Глава 6. Процессы переходного излучения, рассеяния и тормозного излучения в плазме	265
§ 6.1. Основные особенности процессов переходного излучения, рассеяния и тормозного излучения в плазме	265
§ 6.2. Нелинейные токи в плазме	278
§ 6.3. Переходное рассеяние на нерелятивистских частицах изотропной плазмы	284
§ 6.4. Переходное рассеяние ультрарелятивистских частиц в плазме	297
§ 6.5. Переходное тормозное излучение в плазме	308
Глава 7. Переходное излучение, рассеяние и тормозное излучение в вакууме в сильных электромагнитных полях	320
§ 7.1. Нелинейная диэлектрическая проницаемость вакуума	320
§ 7.2. Переходное излучение заряженных частиц в вакууме в сильном магнитном поле	324
§ 7.3. Переходное рассеяние электромагнитных волн в вакууме при наличии сильного электромагнитного поля	330
§ 7.4. Переходное рассеяние в вакууме гравитационных волн с их превращением в электромагнитные волны	336
Глава 8. Заключение	343
§ 8.1. О некоторых астрофизических приложениях теории	343
§ 8.2. Заключительные замечания	349
Литература	352
Предметный указатель	359

ПРЕДИСЛОВИЕ

Переходное излучение возникает при равномерном и прямолинейном движении заряда (или другого источника, не обладающего собственной частотой) в неоднородной среде или вблизи такой среды. Казалось бы, такой достаточно простой и общий электродинамический эффект должен был быть известен еще в прошлом веке. Но, фактически, понимание того факта, что равномерно движущийся заряд может излучать, сильно задержалось. Для однородной среды такая возможность стала ясна лишь в 1937 г. после открытия излучения Вавилова — Черенкова. На переходное же излучение внимание было обращено еще позже — в 1944 г. К настоящему времени переходному излучению, включая сюда резонансное переходное излучение или переходное рассеяние и дифракционное излучение, посвящены уже многие сотни статей. Однако ни одна монография на эту тему еще не вышла из печати, хотя появление книги, достаточно полно освещающей современное состояние вопроса, было бы и естественным и целесообразным.

Можно надеяться, что такая задача вскоре будет решена, но, так или иначе, настоящая монография носит более узкий характер. Ее цель — осветить лишь основные моменты, а также отдельные задачи, относящиеся к теории переходного излучения и родственных явлений. При этом особое внимание уделяется вопросам, которыми интересовались сами авторы. Книга написана на базе обзора «Некоторые вопросы теории переходного излучения и переходного рассеяния», который на русском языке, ввиду большого объема, удалось опубликовать лишь в сокращенном виде (УФН, 1978, т. 126, с. 553; поправки там же, 1980, т. 131, с. 83). Вместе с тем, и в своем полном виде (Physics Reports, 1979, v. 49, № 1, p. 1—89; дополнение — Phys. Letters, 1980, v. 79A, p. 16) этот обзор не вместил всего материала, который мы считали целесообразным изложить. Настоящая монография включает этот материал, но все равно конкретная теория переходных счетчиков, ряд частных задач, а также экспериментальные методы и результаты остались за ее пределами. Несомненно, это не является достоинством, но мы и так довольно далеко вышли за пределы первоначально намеченного объема. К тому же дальнейшее расширение круга затрагиваемых вопросов (с такими

советами мы столкнулись) задержало бы выход книги в свет. Наконец, неполнота освещения соответствующей проблематики в монографиях представляется вполне допустимой. Так или иначе, авторы надеются на то, что книга и в предлагаемом вниманию читателей виде принесет пользу и, в частности, будет содействовать пониманию общезначимости процессов переходного излучения и переходного рассеяния как в электродинамике, так и за ее пределами.

В заключение мы рады возможности поблагодарить В. В. Железнякова, В. В. и Вл. В. Кочаровских, Е. В. Суворова, Ю. А. Рыжова и В. Я. Эйсмана за замечания, сделанные ими при чтении рукописи.

1982 г.

*В. Л. Гинзбург,
В. Н. Цытович*

ГЛАВА 1

ИЗЛУЧЕНИЕ РАВНОМЕРНО И ПРЯМОЛИНЕЙНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

(Общее введение)

§ 1.1. Введение. Эффект Вавилова — Черенкова

В электродинамике многие годы господствовала догма, которую можно сформулировать так: равномерно и прямолинейно движущийся заряд не излучает. Фактически такое утверждение нуждается в уточнении даже при движении заряда в вакууме (см. ниже и [1], гл. 1). Что же касается движения с постоянной скоростью источника, не обладающего собственной частотой (заряда, постоянного диполя и т. д.), в среде или вблизи среды, то возникновение излучения можно считать даже не исключением, а правилом. Конкретно, излучение отсутствует только в случае среды однородной в пространстве и неизменной во времени, причем, кроме того, скорость источника должна быть меньше фазовой скорости всех волн, могущих распространяться в этой среде. Это обстоятельство могло быть понято еще в конце прошлого века, не говоря уже о начале нашего столетия, когда классическая электродинамика уже вполне оформилась. Тем не менее, если не касаться нескольких упоминаемых ниже пионерских работ, не привлечших к себе особого внимания и не получивших развития, возможность излучения при движении заряда с постоянной скоростью стала ясна лишь в 1937 г. после открытия эффекта Вавилова — Черенкова и его объяснения Таммом и Франком [2].

Как известно, излучение Вавилова — Черенкова (ниже В.—Ч.) имеет место, если заряд (или другой источник с равной нулю собственной частотой, например, постоянный электрический или магнитный диполь) движется со скоростью v , превышающей фазовую скорость света в рассматриваемой прозрачной среде $c_{ph} = c/n(\omega)$, где $n(\omega)$ — показатель преломления на частоте ω . Угол θ , под которым происходит излучение (угол между v и волновым вектором волны $\mathbf{k}$), определяется при этом соотношением

$$\cos \theta = c/(n(\omega) v). \quad (1.1)$$

Это условие носит, по сути дела, кинематический характер — при его соблюдении волны любой природы, имеющие фазовую скорость c_{ph} и испускаемые вдоль траектории источника (например, заряда q), находятся в фазе на соответствующей конической поверхности (рис. 1). Поэтому естественно, что условие (1.1), переписанное в виде $\cos \theta = c_{ph}/v$, было давно известно в акустике

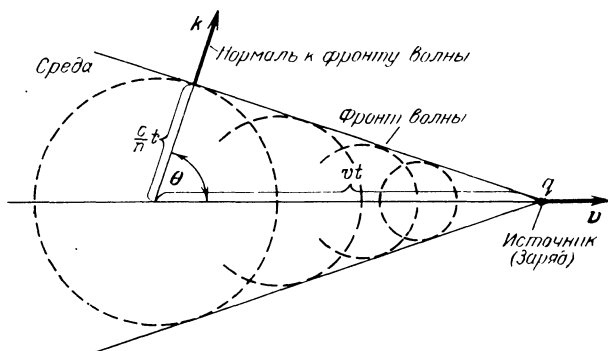


Рис. 1. Возникновение излучения В. — Ч. (ct/n — длина пути, проходимого электромагнитной волной за время t , vt — длина пути, проходимого источником за то же время).

как определяющее угол раствора так называемого конуса Маха — конической волны, испускаемой сверхзвуковым источником (в акустике, разумеется, c_{ph} есть скорость звука). Тем более поразительно и поучительно, что эффект В. — Ч. не был открыт значительно раньше, а его объяснение было отнюдь не очевидно и потребовало больших усилий [3]. Мы не видим здесь иной причины, кроме влияния той догмы, о которой была речь.

Излучение Вавилова — Черенкова занимает сейчас в физике видное место, ему посвящено огромное число работ, включая книги и обзоры (см. [1, 4—7] и указанную там литературу). При этом не меньшую, а быть может, и большую роль играет не эффект В. — Ч. в собственном смысле слова (оптическое излучение заряда, равномерно движущегося в среде со скоростью $v > c/n(\omega)$), а связанные с ним представления и аналогии или, как можно условно сказать, «черенковская идеология». В качестве типичного примера приведем интерпретацию так называемого затухания Ландау и, конкретно, затухания продольных (плазменных) волн в бесстолкновительной плазме. Вывод о существовании такого затухания был сделан [8] при решении задачи с начальными условиями о распространении продольных возмущений в бесстолкновительной плазме на базе использования кинетического уравнения. Возникающее бесстолкновительное затухание, появляющееся и в целом ряде других задач физики плазмы и плазмоподобных сред (например, в случае «твердотель-

ной плазмы» — электронной жидкости в металлах и т. п.), можно интерпретировать (или, если угодно, понимать физически) на разных путях. Один из них таков: условие бесстолкновительного поглощения волны электронами плазмы, имеющее вид

$$\omega = kv, \quad (1.2)$$

представляет собой просто условие излучения (1.1) для волн (в данном случае — продольных плазменных волн) с фазовой скоростью

$$c_{ph} = \omega/k = c/n_i, \quad n_i(\omega) = ck/\omega, \quad (1.3)$$

где $n_i(\omega)$ — показатель преломления для рассматриваемых продольных волн (поскольку скорость продольных волн c_{ph} от c не зависит, введение показателя n_i носит, правда, довольно формальный характер).

Разумеется, когда речь идет о «внешней волне» (в данном случае о распространяющейся в плазме продольной волне), нужно рассматривать ее взаимодействие не с одной частицей, а с их коллективом. В результате необходимо учитывать не только поглощение волн, но и вынужденное (индуцированное) их излучение (см. гл. 3, § 3.8). Именно такое понимание, связывающее поглощение Ландау с эффектом В.—Ч., сейчас, по-видимому, наиболее распространено и для многих делает бесстолкновительное поглощение вполне наглядным и понятным (сказанное не нужно, разумеется, понимать как отрицание полнейшей законности других «наглядных» картин, иного физического языка).

В общем довольно естественно, что развитие физики сверхсветовых источников (источников, движущихся со скоростью, большей скорости света в данной среде) продолжается и, как мы уверены, будет происходить и далее. Приведем здесь один пример, сравнительно недавний, но уходящий корнями в довольно далекое прошлое. Дело в том, что возможность появления излучения типа В.—Ч. в какой-то мере обсуждалась за несколько десятилетий до его открытия. Не говоря уже о более ранних замечаниях Хевисайда [9] и Кельвина [10], еще в 1904 г. Зоммерфельд [11] пришел к выводу о том, что заряд (электрон), равномерно движущийся в вакууме со скоростью $v > c$, должен излучать. При этом, разумеется, условие излучения имеет вид (1.1) с $n = 1$. Другими словами, Зоммерфельд рассмотрел эффект Вавилова — Черенкова в недиспергирующей и вообще непреломляющей «среде» — вакууме. Однако в рамках непосредственно вслед за тем созданной специальной теории относительности импульс частицы $p = Mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ и ее нельзя ускорить до скорости $v > c$. Кроме того, требование причинности [12, 13] также не позволяет иметь частицы, движущиеся со скоростью $v > c$, так как их можно было бы использовать в качестве сверхсветовых «сигналов». Поэтому, вероятно, работа Зоммерфельда и была

надолго забыта, мысль же перенести ее результаты на случай движения заряда в среде никому в голову не пришла *).

В согласии со сказанным, до недавнего времени считалось довольно очевидным, что излучение В.—Ч. в вакууме, а также в средах с показателем преломления $n < 1$ (в частности, в изотропной плазме, в области применимости известной формулы $n^2(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$) оказывается невозможным. Фактически же такой вывод неверен или, если угодно, слишком поспешен. Не говоря уже о гипотетических и, по всей вероятности, несуществующих «сверхсветовых» частицах — тахионах, источники излучения вполне могут двигаться со скоростью $v > c$. Более того, такие источники давно известны — в качестве примера можно указать на световые пятна («зайчики»), могущие двигаться с любой скоростью $v > c$. Такие же «зайчики» могут состоять и из заряженных частиц, например, они образуются при падении соответствующих пучков частиц на металлическую пластинку и т. п. «Зайчики» состоят из многих частиц, разных в различные моменты времени, причем сами эти частицы (фотоны, электроны и т. д.) движутся со световой или с досветовой скоростью. Поэтому, в частности, существование сверхсветовых «зайчиков» не нарушает требований причинности — их нельзя использовать для сверхсветовой сигнализации. С другой стороны, заряженный «зайчик» (движущееся «пятно») в электродинамическом смысле «ничем не хуже» любого другого макроскопического заряда и в этом отношении расчет Зоммерфельда вполне применим (формально это ясно из того, что плотность тока $\mathbf{j} = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, отвечающая распределенному заряду, вполне может перемещаться в пространстве со скоростью, большей c). Могут излучать и световые «зайчики» (т. е. «зайчики», образованные фотонами), движущиеся со скоростью $v > c$, но в этом случае нужно учитывать нелинейные эффекты. Коротко говоря, источники излучения, движущиеся со скоростью, большей c , вполне осуществимы, а поэтому появляется возможность наблюдать эффект Вавилова — Черенкова как в вакууме (правда, в обычных условиях лишь при наличии границы), так и в изотропной плазме (см. [1, 14—16]).

Итак, при равномерном и прямолинейном движении источника (заряда, мультиполя) в среде со скоростью $v > c/n(\omega)$ возникает излучение Вавилова — Черенкова. При этом, если среда однородна в пространстве и не изменяется во времени, то излучение В.—Ч. является единственной возможностью.

*) И. Е. Тамм и И. М. Франк узнали о работе Зоммерфельда уже после того, как построили теорию эффекта Вавилова — Черенкова [2, 3]. Хевисайд [9], по-видимому, правильно понимал как роль среды, так и возможность использовать в качестве источников сверхсветовые «зайчики» (см. ниже). Однако, насколько нам известно, эти работы Хевисайда не привлекли к себе внимания.

§ 1.2. Переходное излучение

Если же среда неоднородна и (или) изменяется во времени или когда такая среда расположена вблизи траектории источника, ситуация существенно изменяется. Именно, в таких условиях, вообще говоря, возникает переходное излучение, понимаемое в широком смысле слова и представляющее собой излучение, имеющее место при равномерном и прямолинейном движении заряда (или других источников, не обладающих собственной частотой) в неоднородных условиях — в неоднородной среде, в переменной во времени среде или вблизи таких сред. Разумеется, переходное излучение в общем случае может сосуществовать и интерферировать с черенковским излучением и излучением, возникающим в результате ускорения заряда (т. е. с тормозным излучением, синхротронным излучением и т. д.). Однако для понимания физики дела естественно, по крайней мере сначала, выделить одно переходное излучение.

Рассмотрим поэтому заряд, движущийся с постоянной скоростью *)

$$v < c/n, \quad (1.4)$$

когда излучение В.—Ч. не возникает. Если, кроме того, речь идет о вакууме ($n=1$), то вообще нет никакого излучения. Для его появления в вакууме заряд (или мультиполь) должен ускоряться или, другими словами, должен изменяться характеризующий излучение параметр v/c . При наличии прозрачной среды этот параметр уже имеет вид $v/c_{ph} = vn/c$ — он равен отношению скорости частицы v к фазовой скорости света $c_{ph} = c/n(\omega)$.

Но, и в этом суть дела, при наличии среды параметр vn/c может изменяться не только в результате изменений скорости v , но и в силу изменения вдоль траектории источника фазовой скорости света $c_{ph} = c/n$ за счет соответствующего изменения показателя преломления. Излучение, возникающее при изменении параметра vn за счет изменения n при $v = \text{const}$, и называется переходным излучением. Точнее, в случае поглощающей (но немагнитной) среды роль показателя преломления n играет $\sqrt{\epsilon} = n + i\kappa$, где ϵ — комплексная диэлектрическая проницаемость среды.

Простейшая задача такого типа — пересечение зарядом границы раздела двух сред (или, в частности, вакуума со средой). Именно возникающий при этом простейший тип переходного излучения был рассмотрен [17] И. М. Франком и одним из

*) При наличии излучения (переходного, излучения В.—Ч.) энергия заряда, вообще говоря, изменяется, и в связи с этим приходится сталкиваться с вопросом — можно ли считать скорость заряда строго постоянной? Ответ здесь является, безусловно, положительным; например, если массу излучающей частицы можно считать сколь угодно большой, то изменение ее скорости в результате излучения стремится к нулю. Далее, потери энергии можно компенсировать за счет работы внешних источников. Таким образом, предположение о строгом постоянстве скорости источника вполне допустимо. Другое дело, что в некоторых задачах нужно учитывать также изменение скорости источника, но это совсем иной вопрос.

авторов в 1944 г. Можно отметить, что переходное излучение в каком-то смысле является даже более простым эффектом, чем излучение В.—Ч. Тот факт, что возможность появления переходного излучения выяснилась с таким запозданием, объясняется, по-видимому, теми же причинами, как и в случае эффекта В.—Ч.

Заметим, что приведенное выше пояснение, касающееся природы переходного излучения и связывающее его появление с изменением параметра vn/c , все же несколько формально и фактически требует понимания теории излучения в среде. Поэтому не лишним, вероятно, будет и здесь напомнить о наиболее наглядном объяснении причины появления переходного излучения при пересечении зарядом границы раздела. Как известно, электромагнитное поле в первой среде (в среде, в которой в рассматриваемый момент движется заряд) можно представить как поле самого заряда и поле его «изображения», движущегося во второй среде навстречу заряду. При пересечении границы заряд и его изображение, «с точки зрения» первой среды, как бы частично «аннигилируют» или «перестраиваются», что и приводит к излучению. Особенно прост при этом, конечно, случай нормального падения заряда из вакуума на идеальное зеркало — при пересечении границы зеркала заряд и его изображение полностью «аннигилируют» или, лучше сказать, останавливаются на границе (в том смысле, что возникающее в вакууме излучение

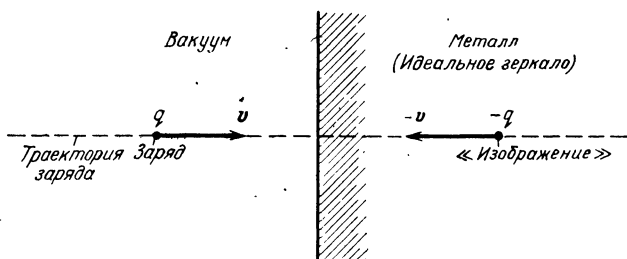


Рис. 2. Генерация переходного излучения зарядом, пересекающим границу раздела вакуум — идеальный проводник (зеркало).

совпадает с излучением падающего заряда q и его изображения $-q$, одновременно резко останавливающихся на границе раздела; рис. 2) *).

Совершенно очевидно, что обсуждаемое переходное излучение имеет место при пересечении границы любых сред с различными «электрическими» параметрами (диэлектрической проницаемостью, показателем преломления и т. п.). В статье [17], однако, внимание непосредственно было сосредоточено на падении заряда на металл и, соответственно, на переходном излучении

* Этот результат содержится в статье [17], а также получен ниже, в § 2.1. Популярное изложение теории переходного излучения и рассеяния см. в [18]; целый ряд других ссылок приводится ниже.

(в основном оптическом), в направлении «назад», т. е. наблюдением в вакууме.

Для релятивистских частиц с достаточно высокой энергией вполне реален, однако, и вариант, при котором частица проходит через среду и выходит в вакуум. В чисто теоретическом отношении эта задача фактически эквивалентна предыдущей, а соответствующая формула для интенсивности излучения получается просто заменой скорости v на скорость $-v$ (см. ниже, § 2.2). Вместе с тем, конечно, при вычислении поля в этих случаях симметрия отсутствует и интенсивности излучения при замене v на $-v$ (или, другими словами, при влете или вылете из среды и наблюдении, соответственно, «назад» или «вперед») различны и в некоторых условиях сильно отличаются друг от друга. Для излучения вперед и, в частности, при вылете из среды в вакуум, в спектре излучения представлены более высокие частоты и, конкретно, в конденсированной среде переходное излучение релятивистских частиц может простирается в рентгеновскую часть спектра. Соответственно возрастает и интегральная (по всем углам и частотам) интенсивность излучения, которая в простейшем случае оказывается пропорциональной $1/\sqrt{1-v^2/c^2} = \mathcal{E}/Mc^2$ ($\mathcal{E}$ — полная энергия излучающего заряда массы M). Это важное обстоятельство было выяснено лишь в 1959 г. [19, 20]. Тем самым открылись более широкие перспективы создания эффективных «переходных счетчиков», предназначенных для детектирования или, точнее, определения скорости релятивистских частиц. Правда, вопрос о переходных счетчиках, связанный с рассмотрением многих границ раздела, был поднят еще ранее [21], но предполагавшееся использование оптического переходного излучения, по-видимому, не может привести к цели.

Как это часто бывает, появление возможности «практического» применения, в данном случае в физике высоких энергий, резко повысило интерес к переходному излучению. Так, согласно библиографическому указателю [22] с 1945—1946 по 1958 гг. включительно переходному излучению было посвящено 14 статей, за следующие 13 лет (с 1959 по 1971 гг.) было опубликовано уже 224 статьи, а с 1972 по 1978 гг., причем последний год учтен не полностью, появилось 296 статей*). Заметим также, что первые опубликованные результаты экспериментов, в которых исследовалось переходное излучение, относятся к 1959 г. (см. [23] и указанную там литературу, а также [22]). В общем, около 15 лет переходное излучение, этот достаточно простой и ясный эффект из области классической электродинамики, не привлекало к себе почти никакого внимания, сейчас же оно весьма популярно, но в основном в плане разработки и применений переходных счетчиков. Этот аспект проблемы освещен в ряде обзоров [24—26] и большом числе статей (см. [22, 27, 213]).

*) См. также библиографический сборник [213] и статью [214].

Нп в какой мере не отрицая важности исследований, связанных с переходными счетчиками, мы хотим подчеркнуть, что переходное излучение, понимаемое в достаточно широком смысле, имеет несомненное общезначение, формирует определенные представления и «язык», а тем самым способствует дальнейшему развитию ряда направлений. Ситуация здесь, в общем, аналогична имеющей место в отношении эффекта Вавилова — Черенкова, который непосредственно (и, можно сказать, в чистом виде) используется в первую очередь в черенковских счетчиках.

Физике обсуждаемого переходного эффекта посвящено много статей (см. также обзоры [24, 28—30, 46, 47]). Однако не все стороны проблемы достаточно освещены и известны. Так, до сих пор внимание сосредоточивалось на переходном излучении, возникающем при пересечении одной или ряда границ раздела между средами. В последнем случае речь идет либо об упорядоченной последовательности границ, т. е. системе с определенным периодом, либо о хаотически расположенных границах (неоднородностях)*).

Другое давно развивающееся направление определяется тем фактом, что всякое излучение и, в частности, переходное излучение с длиной волны λ , формируется не в точке, а в некоторой области («зоне формирования»), размер которой определяется длиной λ , но может и значительно ее превосходить. Поэтому, например, эффект В.—Ч. возникает и при движении частицы в вакууме, но вблизи среды (в канале, в щели или вблизи границы среды; см. [34], а также [1, 5—7]). Совершенно аналогичным образом переходное излучение (в этом случае его обычно называют дифракционным) возникает при пролете источника (заряда), равномерно движущегося в вакууме (или в однородной среде), вблизи каких-то препятствий — металлических или диэлектрических шариков, диафрагм, дифракционной решетки и т. п. (см. обзоры [32]). Не говоря уже о сделанном выше замечании общего характера, появление такого переходного излучения легко понять и на основе метода изображений.

Для релятивистских частиц при рассмотрении излучения вдоль направления их скорости зона формирования, вообще говоря, сильно возрастает с увеличением энергии частиц. Так, в вакууме размер зоны формирования L_z в направлении скорости при заданной длине волны излучения растет пропорционально $(\mathcal{E}/Mc^2)^2$, где $\mathcal{E}$ — полная энергия заряда (источника) и M — его масса покоя (предполагается, что $\mathcal{E} \gg Mc^2$; в общем случае в

* Переходное излучение в периодически неоднородной среде обладает, разумеется, своей спецификой. Быть может, поэтому его иногда называют резонансным излучением. Нам, однако, представляется, что использование для всех различных видов переходного излучения разных терминов вряд ли целесообразно и приводит лишь к недоразумениям. В гл. 3 переходное излучение в периодической среде мы будем, в качестве некоторого компромисса, называть резонансным переходным излучением, а также переходным рассеянием (см. ниже, § 1.3).

вакууме в направлении скорости $L_t = (\lambda v/c)/(1 - v/c)$, где λ — длина волны излучения). В условиях, когда размер зоны формирования L_t велик или велико время формирования $t_t = L_t/v$, влияние среды вдоль или вблизи траектории заряда также сказывается на больших расстояниях $L \sim L_t$, что приводит к специфическим особенностям излучения.

Еще один тип переходного излучения, рассмотренный, однако, лишь сравнительно недавно [33—36], возникает уже в однородной среде, но при изменении ее свойств во времени. Суть дела здесь легче всего понять в терминах, использующих параметр vn/c . Как уже упоминалось, при $v = \text{const}$ для появления переходного излучения на траектории заряда или вблизи нее должен изменяться показатель преломления n . Но это изменение будет, очевидно, иметь место и в условиях, когда показатель n изменяется во времени, например, в какой-то момент более или менее резко возрастает или уменьшается.

Подобно излучению типа В.—Ч. переходное излучение носит весьма общий характер и в том смысле, что может иметь место для волн различной природы. В качестве примера упомянем о переходном излучении акустических волн, возникающем при переходе движущейся дислокации через границу зерен в поликристалле [37]*). Вероятно, в акустике представляют интерес и другие задачи, связанные с переходным излучением (см., в частности, [38]).

Любопытно, а быть может, и имеет реальное значение в применении к магнитосферам пульсаров, переходное излучение, возникающее уже в вакууме, но при наличии сильного магнитного поля, приводящего к появлению нелинейных электродинамических эффектов [39].

§ 1.3. Переходное рассеяние

Если происходит переходное излучение при движении заряда в среде с периодически (скажем, синусоидально) изменяющимся показателем преломления, то можно говорить не только о переходном излучении или резонансном переходном излучении, но и называть соответствующий процесс переходным рассеянием. В самом деле, в этом случае волна диэлектрической проницаемости (показателя преломления), которая может быть стоячей или бегущей, как бы рассеивается на движущемся заряде, порождая электромагнитное (переходное) излучение. Мы не стали бы применять, однако, в таких условиях термин переходное рассеяние [40] вместо переходного излучения, если бы эффект не

*) В [37] в первую очередь рассматривается излучение звука, возникающее при выходе дислокации на поверхность кристалла. В этом случае ближе аналогия не с переходным излучением, а с тормозным излучением при остановке заряда. Вместе с тем, если иметь в виду излучение, а не «судьбу» источника, то переходное излучение и тормозное излучение, рассматриваемое с учетом влияния границы, во многих случаях неразличимы.

сохранялся и в предельном случае покоящегося заряда. Тогда говорить о переходном излучении по меньшей мере неестественно, в то время как термин «переходное рассеяние» отражает суть дела. Действительно, речь идет, например, о падении на неподвижный (фиксированный) заряд волны проницаемости, причем от заряда расходится электромагнитная волна.

Понять этот результат весьма просто вне всякой связи с теорией переходного излучения. Для этой цели рассмотрим изотропную среду, характеризующуюся диэлектрической проницаемостью ϵ , зависящей лишь от концентрации частиц среды N . Если в такой среде распространяется продольная акустическая волна, то плотность $N = N_0 + \Delta N \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t)$ и в силу сказанного выше

$$\epsilon = \epsilon^{(0)} + \epsilon^{(1)} \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t), \quad (1.5)$$

где $\epsilon^{(1)}$ — изменение ϵ , обусловленное изменением N (в простейшем случае $\epsilon^{(1)} = \text{const} \cdot \Delta N$); разумеется, мы выбрали определенный механизм изменения ϵ , в данном случае за счет изменения плотности N , лишь для конкретности и наглядности — для дальнейшего существенно только наличие в среде волны проницаемости (1.5).

Поместим теперь в среде закрепленный (или, скажем, бесконечно тяжелый) заряд q . Вокруг заряда возникают индукция $\mathbf{D}$ и поле $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{D}^{(0)} = \frac{q \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{E}^{(0)} = \frac{q \mathbf{r}}{\epsilon^{(0)} r^3}, \quad (1.6)$$

где, очевидно, значок (0) сверху указывает на «невозмущенную задачу» — рассматривается поле заряда в отсутствие волны проницаемости.

В присутствии волны проницаемости, в первом приближении (оно отвечает предположению, что $|\epsilon^{(1)}| \ll |\epsilon^{(0)}|$, которое мы примем здесь для простоты), вокруг заряда возникает переменная поляризация

$$\delta \mathbf{P} = \frac{\delta \mathbf{D}}{4\pi} = \frac{\epsilon^{(1)} \mathbf{E}^{(0)}}{4\pi} \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t). \quad (1.7)$$

Такая переменная поляризация, не обладающая (при $k_0 \neq 0$) сферической симметрией, вызовет, конечно, появление расходящейся от заряда электромагнитной волны с частотой ω_0 (рис. 3). Волновое число в этой волне $k = 2\pi/\lambda = \omega_0 \sqrt{\epsilon^{(0)}}/c$. Если, как мы считали, волна поляризации вызвана акустической волной, то $k \ll k_0 = \omega_0/v_s$, где v_s — скорость звука (здесь предполагается, конечно, что $v_s \ll c/\sqrt{\epsilon^{(0)}}$).

Возникающую электромагнитную волну можно считать рассеянной в таком же смысле, как и при других типах рассеяния, например, при рассеянии электромагнитной волны на покоящемся электроны (в данном случае, конечно, имеется в виду покой только при неучете действия падающей волны). Переходное рассеяние играет видную роль в физике плазмы, а в целом пред-

ставляет собой явление весьма общего типа и, например, должно иметь место в вакууме при падении электромагнитной [39] или гравитационной [41] волны на область с сильным постоянным

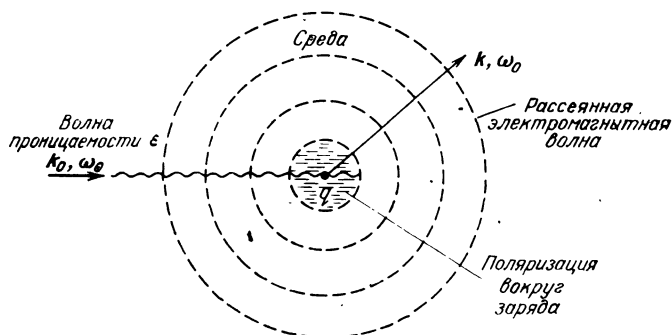


Рис. 3. Схематическое изображение процесса переходного рассеяния покоящимся зарядом ($v = 0$).

(статическим) или квазистационарным электромагнитным полем (при этом происходит образование расходящейся электромагнитной волны).

§ 1.4. Переходное тормозное излучение

Если равномерно и прямолинейно движущийся заряд q' пролетает на достаточно близком расстоянии от другого, например, покоящегося заряда q , то при наличии среды возникает излучение, которое по своим характеристикам подобно тормозному излучению [42, 43]. Такое излучение естественно назвать переходным тормозным излучением [43], хотя для его появления вовсе не нужно, чтобы происходило ускорение (изменение прямолинейной траектории или торможение заряда). Термин «переходное тормозное излучение», однако, оправдан, поскольку это излучение возникает при столкновениях частиц (излучение же, образующееся при столкновениях, как раз и называют тормозным излучением). Кроме того, переходное тормозное излучение электронов ($q' = -e$, $M' = m_e$) описывается выражениями, которые весьма близки к соответствующим формулам для обычного тормозного излучения (см. гл. 5). Далее, переходное тормозное излучение интерферирует с обычным тормозным излучением. Вместе с тем, в отличие от обычного тормозного излучения переходное тормозное излучение, естественно, не исчезает в пределе бесконечно тяжелых сталкивающихся частиц ($M, M' \rightarrow \infty$).

Понять физическую природу переходного тормозного излучения легко, если учесть, что поле, например, покоящегося в среде заряда q , с которым сталкивается другой равномерно движущийся заряд q' (мы рассматриваем этот простейший пример только для иллюстрации, в общем случае оба сталкивающихся заряда

могут иметь не равные нулю скорости), имеет следующий вид:

$$\mathbf{E}^q(\mathbf{r}) = -\frac{iq}{2\pi^2} \int \frac{\mathbf{k}_0}{\epsilon(0)k_0^2} \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}) d\mathbf{k}_0, \quad (1.8)$$

где $\epsilon(0)$ — статический предел диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$, причем пространственной дисперсией пренебрегается. Здесь поле заряда $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/(\epsilon r^3)$ разложено по плоским статическим «волнам», пропорциональным $\exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r})$. Поляризация $\mathbf{P}^q(\mathbf{r})$, возникающая около заряда q , также может быть представлена в виде разложения по плоским статическим «волнам»:

$$\mathbf{P}^q(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{iq}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathbf{k}_0(\epsilon(0) - 1)}{\epsilon(0)k_0^2} \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}) d\mathbf{k}_0. \quad (1.9)$$

Разложение (1.9) можно рассматривать как разложение по волнам поляризации.

Если поле второго (движущегося) заряда q' не учитывать, то в (1.8) и (1.9), очевидно, $\epsilon(0) = \epsilon^{(0)}(0)$, т. е. поляризуемость равна невозмущенной поляризуемости среды (см. § 1.3). Но при учете влияния заряда q' уже $\epsilon(0) = \epsilon^{(0)}(0) + \epsilon^{(1)}$. Возмущение поляризуемости $\epsilon^{(1)}$ может быть связано с изменением плотности (концентрации) среды или с другими нелинейными эффектами; возмущение $\epsilon^{(1)}$ зависит от поля заряда q' . Другими словами, с зарядом q' связаны волны поляризуемости, рассеяние которых на поле заряда q и дает переходное тормозное излучение. Точно так же покоящийся заряд q может создавать волны поляризуемости, рассеивающиеся на движущемся заряде q' . Такова качественная картина переходного тормозного излучения, подробно рассматриваемого в гл. 5.

Поляризация $\mathbf{P}$ может создаваться как свободными зарядами, что имеет место в плазме [44], так и электронными облаками атомов, экранирующих поля ядер в атомах, молекулах и т. п. [45]. Переходное тормозное излучение может быть ответственно за генерацию любых «нормальных волн», могущих распространяться в рассматриваемой среде (экситонов, фононов, фотонов и т. п.) при прохождении через нее быстрых частиц, движении дислокаций и т. п. Другими словами, так же как и переходное рассеяние, переходное тормозное излучение — это явление довольно общего характера.

Общая теория тормозного излучения частиц в среде обязана учитывать также переходное тормозное излучение и его интерференцию с обычным тормозным излучением (точно так же, как и общая теория рассеяния должна учитывать переходное рассеяние).

§ 1.5. О характере настоящей книги

Выше мы, по существу, уже перечислили те вопросы, которым посвящена книга. Ее характер ясен также из предисловия, а с ее содержанием в смысле объема охваченного материала

можно познакомиться по оглавлению. Поэтому здесь сделаем лишь несколько дополнительных замечаний.

Основная цель настоящей монографии состоит в освещении сравнительно нового материала. Однако и трудно и нецелесообразно (в частности, имея в виду интересы читателей) касаться различных вопросов теории переходного излучения и переходного рассеяния, не изложив предварительно в достаточно подробном виде решение самой простой и, можно сказать, исходной задачи о переходном излучении при пересечении зарядом границы раздела двух сред. С этого и начинается гл. 2. Затем в гл. 2 и 3 рассматривается ряд других задач теории переходного излучения. Глава 4 посвящена переходному рассеянию и гл. 5 — переходному тормозному излучению. Все эти процессы имеют важное значение в физике плазмы, что и побудило посвятить переходным эффектам в плазме отдельную гл. 6. В гл. 7 мы останавливаемся на переходном излучении и рассеянии в вакууме в присутствии сильного электромагнитного поля, а также при учете влияния гравитационного поля. В заключительной гл. 8 обсуждаются некоторые астрофизические приложения и перспективы дальнейшего развития теории.

Литература, посвященная переходному излучению и переходному рассеянию, с достаточной полнотой приведена в библиографическом указателе [22], доведенном до 1978 г. (нужно, правда, иметь в виду, что некоторые статьи, посвященные фактически переходному излучению и родственным вопросам, но не носящие соответствующего названия, в [22], естественно, отражения не нашли), а также в библиографии по переходному излучению [213], доведенной до 1982 г. Мы в тексте также приводим большое число ссылок, но при этом стремимся лишь помочь читателям ориентироваться в литературе, указать на новые статьи и т. п. Ссылаться же на литературу по каждому возможному поводу нам представляется неуместным, особенно когда речь идет не о каких-либо существенно новых результатах, а лишь о том или ином понимании или способе изложения материала. К тому же в ряде случаев и нелегко установить, где именно впервые появилось то или иное замечание или было сделано какое-то преобразование формул. Если же, тем не менее, мы довольно часто ссылаемся на свои собственные работы, то в основном только по той причине, что соответствующие статьи нами непосредственно использовались в тексте.

ГЛАВА 2

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 2.1. Переходное излучение заряда на границе идеального проводника

1. Введение. Для того чтобы рассмотреть переходное излучение в «чистом виде» и обсудить основные физические представления, начнем с рассмотрения простого случая, когда заряд пересекает границу раздела двух сред, причем падает на нее нормально (см. рис. 2). Считаем при этом, что условие излучения Вавилова—Черенкова не выполнено ни в одной из сред. Можно было бы предполагать, что в такой постановке задача о переходном излучении не содержит сейчас каких-либо новых или неясных до конца моментов. В действительности, однако, как будет видно из дальнейшего, некоторые принципиальные стороны явления до последнего времени оставались в тени и на них не обращалось достаточного внимания. В первую очередь сюда относятся эффект изменения электромагнитной массы частицы при ее переходе из одной среды в другую (так называемая макроскопическая перенормировка массы — соответствующие ссылки см. в § 2.5), связь этого эффекта с переходным излучением, его роль в общем балансе энергии при переходном излучении.

Для понимания этих вопросов важное значение имеет анализ прохождения заряда через размытую границу раздела сред, когда перенормировка массы сохраняется, а излучение исчезает. Хотя переходное излучение на размытой границе раздела сред рассматривалось неоднократно (ссылки см. в § 2.4), вопрос о работе сил над зарядом для размытой границы раздела практически не привлекал внимания. Вместе с тем эта проблема существенна для выяснения общей картины переходного излучения. Поэтому мы сочли необходимым уделить этому вопросу достаточно внимания, тем более, что здесь удастся доказать некоторые общие утверждения (§ 2.4).

С этими задачами тесно связан также вопрос об изменении электромагнитного импульса заряда при его переходе из одной

среды в другую и рассмотрение баланса импульса при переходном излучении (см. § 2.6). Насколько нам известно, этот вопрос ранее вообще не привлекал внимания.

Наконец, укажем здесь на то, что обычно в литературе нахождение энергии переходного излучения сводится к вычислению потока вектора Пойнтинга через удаленную от заряда поверхность. Такой расчет не может, конечно, вызвать каких-либо возражений, но он достаточно громоздок, так как требует нахождения асимптотического вида полей и использования метода перевала для расчета интенсивности излучения. Все это в значительной мере усложняет изложение и в ряде случаев затрудняет восприятие материала. Поэтому мы избрали более простой способ изложения (см. [46, 47]), непосредственно приводящий к результату, а именно, путь подсчета полной энергии поля излучения (метод, аналогичный гамильтоновскому методу, изложенному в [1]).

Особое внимание на протяжении этой главы (как, впрочем, и книги в целом) мы уделяем случаю ультрарелятивистских частиц ($v \rightarrow c$). В этом пределе все соотношения для переходного излучения, перенормировки энергии и импульса, баланса сил и т. п. становятся не только особенно простыми, но и универсальными. Оказывается, например, что переходное излучение заряда в нестационарной среде (§ 2.3) и переходное излучение на границе раздела двух сред (§ 2.2) для ультрарелятивистских частиц в определенных условиях практически совпадают.

2. Переходное излучение заряда на границе идеального проводника (зеркала). Рассмотрим простейшую задачу теории переходного излучения, когда заряд, движущийся с постоянной скоростью v , пересекает границу между вакуумом и идеальным проводником [17] (см. рис. 2). Обычно проводник называют идеальным, если его проводимость $\sigma \rightarrow \infty$. Если же описывать среду с помощью комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$, $\epsilon''(\omega) = 4\pi\sigma/\omega$, то идеальному проводнику (идеальному зеркалу) отвечает значение $|\epsilon| \rightarrow \infty$. Реальная среда всегда обладает частотной дисперсией, причем для частоты $\omega \rightarrow \infty$ проницаемость $\epsilon \rightarrow 1$. Но, фактически, при частотах не выше оптических хорошее металлическое зеркало (например, из меди или серебра) довольно близко к идеальному. Для дальнейшего важно лишь предположение, что $|\epsilon| \gg 1$. В таких условиях поле заряда в среде (металле) практически полностью экранируется.

Для получения выражения для энергии $W^r(\omega, \theta, \varphi)$, излученной в интервале частот $d\omega$ и телесном угле $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ (здесь θ — угол между скоростью частицы и направлением излученной волны, φ — полярный угол волнового вектора излученной волны в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{v}$), проще всего воспользоваться выражением для излучения зарядов при резком изменении их скорости (см. [48], § 69, где dW^r обозначено

через $d\mathcal{E}_{n,\omega}$)

$$\frac{dW^r}{d\Omega d\omega} = W^r(\omega, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left\{ \sum_i e_i \left(\frac{[\mathbf{v}_{i,2}^n]}{1 - n\mathbf{v}_{i,2}/c} - \frac{[\mathbf{v}_{i,1}^n]}{1 - n\mathbf{v}_{i,1}/c} \right) \right\}^2, \quad (2.1)$$

где e_i — заряд i -й частицы, скорость которой резко меняется от значения $\mathbf{v}_{i,1}$ до значения $\mathbf{v}_{i,2}$, а $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ — направление волнового вектора излученной волны. Резкость изменения $\mathbf{v}$ в (2.1) означает, что это изменение происходит за время $\tau \ll 2\pi/\omega$, где ω — рассматриваемая частота. Точнее, такое условие всегда достаточно, но как необходимое относится лишь к нерелятивистскому движению. В общем же случае изменение скорости можно считать резким, если оно происходит за время $\tau \ll t_f$, где t_f — время формирования. Время t_f будет введено в § 2.4 и, например, для вакуума

$$t_f = \frac{2\pi}{\omega [1 - (v/c) \cos \theta]},$$

где θ — угол между скоростью $\mathbf{v}$ и волновым вектором $\mathbf{k}$ (конечно, для вакуума $k = \omega/c$; в прозрачной среде изменение выражения для t_f сводится к замене c на $c/n(\omega)$, где $n(\omega)$ — показатель преломления).

Об излучении при резком изменении движения источников и родственных вопросах см. также [49].

Если в вакууме (без всяких препятствий, границ и т. п.) один заряд $e_1 = q$ резко останавливается ($\mathbf{v}_{1,1} = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_{1,2} = 0$) или резко ускоряется из состояния покоя до скорости $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}_{1,1} = 0$, $\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{v}$), то

$$W^r(\omega, \theta, \varphi) \equiv W^r(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta}{4\pi^2 c^3 [1 - (v/c) \cos \theta]^2}. \quad (2.2)$$

Первое из равенств (2.2) указывает на то, что излученная энергия не зависит от φ . В излучение на данной частоте вносят вклад все углы $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$:

$$\begin{aligned} W^r(\omega) &= \int W^r(\omega, \theta) d\Omega = \int W^r(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{2q^2}{\pi c} \left(\frac{c}{2v} \ln \frac{1 + v/c}{1 - v/c} - 1 \right); \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$W^r(\omega) = \frac{q^2}{\pi c} \begin{cases} 2v^2/3c^2 & \text{при } v \ll c; \\ \ln \frac{4}{1 - v^2/c^2} - 2 & \text{при } v \rightarrow c. \end{cases} \quad (2.4)$$

В случае переходного излучения при влете заряда q из вакуума в идеальный проводник нужно считать, очевидно, что заряд $e_1 = q$ со скоростью $\mathbf{v}$ и заряд $e_2 = -q$ со скоростью $-\mathbf{v}$ останавливаются на границе ($\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{v}_{2,2} = 0$, $\mathbf{v}_{1,1} = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_{2,1} = -\mathbf{v}$). По-

этому из (2.1) получаем

$$W^r(\omega, \theta_1) = \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta_1}{\pi^2 c^3 [1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta_1]^2}. \quad (2.5)$$

В отличие от случая остановки заряда в вакууме здесь волны могут излучаться только в полупространство $0 < \theta_1 < \pi/2$ (здесь и ниже, для удобства, мы через θ_1 обозначаем угол между $-\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}$). Поэтому для нерелятивистского заряда $v \ll c$ интенсивность (2.5) излучения в телесном угле $d\Omega_1$ в четыре раза больше (2.2), тогда как проинтегрированная по всем углам спектральная плотность энергии переходного излучения

$$W^r(\omega) = \int_0^{\pi/2} W^r(\omega, \theta_1) 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1 = \frac{4q^2 v^2}{3\pi c^3} \quad (2.6)$$

лишь в два раза больше спектральной плотности энергии излучения для мгновенной остановки одного заряда.

В ультрарелятивистском пределе (при $v \rightarrow c$) спектральная плотность энергии переходного излучения не отличается сильно от спектральной плотности энергии излучения при мгновенной остановке, однако, соответствующие интенсивности совпадают только в пределе $\ln \frac{4}{1 - v^2/c^2} \gg 1$. Действительно, для спектральной плотности энергии переходного излучения при $v \rightarrow c$ из (2.5) получаем

$$W^r(\omega) = \frac{q^2}{\pi c} \left(\ln \frac{4}{1 - v^2/c^2} - 1 \right). \quad (2.7)$$

Такое совпадение (при $\ln \frac{4}{1 - v^2/c^2} \gg 1$, см. (2.4) и (2.7)) объясняется тем, что в ультрарелятивистском пределе излучение частиц направлено в основном вперед (т. е. по $\mathbf{v}$ для заряда q и по $-\mathbf{v}$ для изображения $-q$). Относительная доля излучения вне интервала углов $\theta \sim \sqrt{1 - v^2/c^2}$ составляет $\left(\ln \frac{4}{1 - v^2/c^2} \right)^{-1}$. Поэтому, если $\ln \frac{4}{1 - v^2/c^2} \gg 1$, то можно учитывать излучение только в интервале $\theta^2 \sim 1 - v^2/c^2$ вдоль направления скорости частицы. Но излучение заряда, «уходящее» в металл при влете заряда из вакуума в металл (или излучение изображения, «уходящее» в металл при вылете в вакуум), не наблюдается и в пределе $\ln \frac{4}{1 - v^2/c^2} \gg 1$ переходное излучение оказывается таким же, как при резкой остановке одного заряда (изображения).

Переходное излучение возникает, как сказано, и в случае вылета частицы из проводника. Соответствующая формула для интенсивности совпадает с (2.5), так как эта формула не изменяется при замене $\mathbf{v}$ на $-\mathbf{v}$. В уже упоминавшемся ультрареляти-

вистском пределе (при $\ln \frac{4}{1-v^2/c^2} \gg 1$) в вакуум при этом излучает сама частица, а не ее изображение (как в случае влета заряда в проводник).

В общем случае произвольных скоростей спектральная плотность энергии переходного излучения равна (см. (2.5)):

$$W^r(\omega) = \int_0^{\pi/2} \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta_1}{\pi^2 c^3 [1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta_1]^2} 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1 = \\ = \frac{q^2}{\pi c} \left(\frac{1 + v^2/c^2}{2v/c} \ln \frac{1 + v/c}{1 - v/c} - 1 \right). \quad (2.8)$$

Поскольку плотность (2.8) не зависит от частоты ω , полная энергия излучения

$$W^r = \int_0^\infty W^r(\omega) d\omega, \quad (2.9)$$

формально говоря, расходится. Но эта расходимость в действительности не реальна. Во-первых, при высоких частотах проводник (зеркало) уже нельзя считать идеальным. Конкретно, условие $|\epsilon| \gg 1$ нарушается при $\omega \sim \omega_{pe}$, $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi N_e e^2 / m_e} = 5,65 \cdot 10^4 \sqrt{N_e}$, где $-e$ — заряд электрона, m_e — его масса и N_e — концентрация электронов в веществе; в меди, например, учитывая два валентных электрона на атом, имеем $N_e \approx 1,7 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$, $\omega_{pe} \approx 2,3 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, для оценки интегрирование в (2.9) нужно проводить до частот $\omega \sim \omega_{pe}$ (о специфике ультрарелятивистского предела см. ниже, § 2.2). Во-вторых, обычно граница раздела не является совершенно резкой — в лучшем случае ее толщина Δz порядка атомных размеров, т. е. порядка 10^{-8} см . В таких условиях обрезание интеграла (2.9) из-за частотной дисперсии играет большую роль. Но для не резкой границы обрезание интеграла (2.9) может быть связано с размытостью границы (более подробно см. § 2.4).

Формулы для переходного излучения, вообще говоря, близки, а в некоторых случаях (идеальное зеркало при $\ln \frac{4}{1-v^2/c^2} \gg 1$) даже совпадают с формулами для тормозного излучения. Но, разумеется, это справедливо лишь в отношении поля излучения. В принципе же можно проследить судьбу самих излучающих зарядов, а она в обоих случаях совершенно различна. При переходном излучении скорость заряда можно считать неизменной, тогда как тормозное излучение полностью определяется ускорением заряда. Разумеется, в общем случае, при непостоянстве скорости заряда одновременно происходит как тормозное излучение, так и переходное излучение, причем нужно, вообще говоря, учитывать их интерференцию.

§ 2.2. Переходное излучение заряда на границе раздела двух изотропных сред

1. Исходные выражения. Рассмотрим переходное излучение, возникающее, когда заряд q с постоянной скоростью v пересекает границу раздела двух изотропных сред 1 и 2, характеризующихся значениями диэлектрической проницаемости ϵ_1 и ϵ_2 и магнитной проницаемости μ_1 и μ_2 , которые в общем случае могут быть комплексными. Пространственную дисперсию здесь учитывать не будем (см. гл. 3, § 3.4). Мы не будем также учитывать частотную дисперсию магнитной проницаемости μ . Что касается весьма существенной частотной дисперсии ϵ , то она фактически всегда учитывается, хотя в промежуточных выкладках ее обычно можно не принимать во внимание (об этом еще речь пойдет ниже). Падение заряда на границу считаем, как и выше, нормальным (рис. 4).

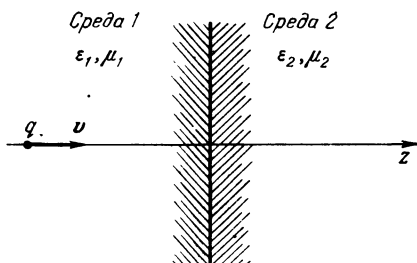


Рис. 4. Пересечение границы двух сред зарядом q .

Исходными являются, разумеется, уравнения поля

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^q, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

в которых плотность тока, создаваемого зарядом q , равна

$$\mathbf{j}^q = q\mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \quad (2.11)$$

В силу того, что задача однородна по времени и по направлениям в каждой из сред, перпендикулярным скорости заряда, удобно все величины раскладывать в ряд Фурье во времени и по компоненте $\mathbf{r}$, также перпендикулярной скорости заряда (обозначаемой здесь через $\mathbf{r}_\perp$; ось z перпендикулярна границе). Тогда

$$\begin{aligned} j_z^q(\mathbf{r}, t) &= \int j_{\omega, \mathbf{x}}^q(z) \exp(i\mathbf{x}\mathbf{r}_\perp - i\omega t) d\omega d\mathbf{x}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{x}}(z) \exp(i\mathbf{x}\mathbf{r}_\perp - i\omega t) d\omega d\mathbf{x}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{H}_{\omega, \mathbf{x}}(z) \exp(i\mathbf{x}\mathbf{r}_\perp - i\omega t) d\omega d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Вектор $\mathbf{x}$ имеет две компоненты, x_x и x_y . Для компоненты Фурье проекции j_z^q плотности тока $\mathbf{j}^q$ из (2.11) получаем*)

$$j_{\omega, \mathbf{x}}^q(z) = \frac{q}{(2\pi)^3} \exp\left(i \frac{\omega}{v} z\right). \quad (2.13)$$

*) Индекс z у компонент тока $\mathbf{j}$ и полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ вдоль скорости заряда здесь и в дальнейшем опускается; $j_x^q = j_y^q = 0$.

2. Поле, создаваемое зарядом при прохождении границы раздела двух сред. Удобно разделить поле $\mathbf{E}$ на компоненту по направлению скорости заряда, обозначаемую просто через E , и перпендикулярную компоненту $\mathbf{E}_\perp$. По определению

$$\begin{aligned} E_{\omega, \kappa}(z) &= \mathbf{E}_{\omega, \kappa}(z) \mathbf{v}/v, \\ \mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa}(z) &= \mathbf{E}_{\omega, \kappa}(z) - \mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{E}_{\omega, \kappa}(z))/v^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Вектор $\mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa}(z)$ имеет две компоненты, $E_{x, \omega, \kappa}(z)$ и $E_{y, \omega, \kappa}(z)$. Для указанных компонент, проектируя уравнения (2.10) на направление скорости заряда $\mathbf{v}$, получим

$$\kappa_x H_{y, \omega, \kappa}(z) - \kappa_y H_{x, \omega, \kappa}(z) = -\frac{\omega}{c} \varepsilon E_{\omega, \kappa}(z) - \frac{4\pi i}{c} j_{\omega, \kappa}^q(z), \quad (2.15a)$$

$$H_{y, \omega, \kappa}(z) = -\frac{c}{\omega \mu} \left(\kappa_x E_{\omega, \kappa}(z) + i \frac{\partial}{\partial z} E_{x, \omega, \kappa}(z) \right), \quad (2.15b)$$

$$H_{x, \omega, \kappa}(z) = \frac{c}{\omega \mu} \left(\kappa_y E_{\omega, \kappa}(z) + i \frac{\partial}{\partial z} E_{y, \omega, \kappa}(z) \right).$$

Отсюда

$$\left(\kappa^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} \right) E_{\omega, \kappa}(z) + i \frac{\partial}{\partial z} \kappa \mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa}(z) = \frac{4\pi i \omega \mu q}{c^2 (2\pi)^3} \exp \frac{i\omega z}{v}. \quad (2.15b)$$

Здесь $\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$. При проектировании уравнений Максвелла на направление, перпендикулярное скорости частицы $\mathbf{v}$, ток частицы, естественно, не вносит вклада и мы имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \right) \kappa \mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa}(z) = i \kappa^2 \frac{\partial}{\partial z} E_{\omega, \kappa}(z). \quad (2.16a)$$

Стоит обратить внимание на то, что при сделанных предположениях вектор $\mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa}$ совпадает по направлению с вектором κ . Действительно, из уравнений Максвелла следует:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \right) E_{x, \omega, \kappa}(z) = i \kappa_x \frac{\partial}{\partial z} E_{\omega, \kappa}(z), \quad (2.16b)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \right) E_{y, \omega, \kappa}(z) = i \kappa_y \frac{\partial}{\partial z} E_{\omega, \kappa}(z). \quad (2.16b)$$

Умножив (2.16b) на κ_x , а (2.16b) на κ_y и сложив их, мы как раз и получаем соотношение (2.16a). В дальнейшем мы увидим, что для поля излучения вектор κ совпадает с проекцией волнового вектора излученной волны $\mathbf{k}$ на направление, перпендикулярное скорости частицы. Поэтому коллинеарность $\mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa}$ и κ означает, что электрический вектор поля излучения лежит в плоскости, проходящей через волновой вектор и скорость частицы. Такой поляризацией обладает как излучение В.—Ч., так и переходное излучение в случае изотропной среды. Для анизотропных и гиротропных сред и при наклонном падении заряда на границу раздела сред поляризация переходного излучения будет другой (см. также гл. 3, § 3.3).

Действуя оператором $\partial^2/\partial z^2 + \omega^2 \epsilon \mu / c^2$ на обе части уравнения (2.15в) и используя (2.16), можно исключить $\kappa E_{\perp, \omega, \kappa}(z)$ и получить одно уравнение для $E_{\omega, \kappa}(z)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \epsilon E_{\omega, \kappa}(z) + \epsilon \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - \kappa^2 \right) E_{\omega, \kappa}(z) = - \frac{4\pi i \omega q}{c^2 (2\pi)^3} \left(\epsilon \mu - \frac{c^2}{v^2} \right) \exp \frac{i \omega z}{v}. \quad (2.17)$$

Здесь учтено, что в пределах каждой из сред 1 и 2 диэлектрическая и магнитная проницаемости ϵ и μ являются постоянными величинами и не зависят от z . Однако на границе раздела сред ϵ и (или) μ испытывают скачок. Уравнение (2.17) нужно решить в каждой из сред и сшить решения, используя граничные условия — равенство на границе нормальных компонент индукции и тангенциальных компонент электрического поля *):

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_{\omega, \kappa}^{(1)}(0) &= \epsilon_2 E_{\omega, \kappa}^{(2)}(0), \\ \kappa E_{\perp, \omega, \kappa}^{(1)}(0) &= \kappa E_{\perp, \omega, \kappa}^{(2)}(0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Рассмотрим вначале решение уравнения (2.17) для однородной среды (в качестве которой может служить каждая из двух сред). Такое решение будет суммой вынужденного решения (поля заряда q в среде)

$$E_{\omega, \kappa}^q(z) = - \frac{4\pi i q \mu (1 - c^2/v^2 \epsilon \mu) \exp(i \omega z/v)}{\omega (2\pi)^3 (\epsilon \mu - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)} \quad (2.19)$$

и свободного поля (в частности, поля излучения).

$$E_{\omega, \kappa}^r(z) = \frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} a \exp \left(\mp i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} z \right). \quad (2.20)$$

Напомним, что $E = E^q + E^r$ — компонента поля E в направлении скорости заряда v . Выделение множителя $4\pi i q / \omega (2\pi)^3$ в амплитуде поля излучения сделано только в целях удобства рассмотрения. Амплитуда a оказывается тогда безразмерной. Далее, знак $+$ в (2.20) соответствует волне, распространяющейся в направлении $z > 0$, а минус — соответственно в направлении $z < 0$. Поле $E_{\omega, \kappa}^r(z)$ в волновой зоне в рассматриваемой задаче и представляет собой поле, описывающее переходное излучение. Оно должно распространяться от границы раздела сред, т. е. в среде 2 нужно в (2.20) выбрать знак плюс, а в среде 1 — знак минус *).

Следует, впрочем, сделать три оговорки. Строго говоря, поле (2.20) представляет собой поле излучения только в том случае, когда (2.20) описывает распространяющуюся волну, т. е. если

$$\epsilon \mu > \kappa^2 c^2 / \omega^2. \quad (2.21)$$

*) Здесь и в дальнейшем верхние индексы (1), (2) относятся к полю соответственно в среде 1 и в среде 2; при наличии знаков $\pm$ или $\mp$ верхний знак относится к среде 1, а нижний — к среде 2.

При $\epsilon\mu < \kappa^2 c^2 / \omega^2$ поле (2.20) будет экспоненциально затухать от границы, т. е. при обоих знаках $+$ и $-$ необходимо положить в этом случае

$$\sqrt{\epsilon\mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} = i \frac{\omega}{|\omega|} \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon\mu}. \quad (2.22)$$

Такие волны, затухающие в одну сторону от границы, обязательно присутствуют при рассмотрении переходного излучения, поскольку, во-первых, волны, излученные частицей в одной из сред, могут на границе испытать полное внутреннее отражение и, во-вторых, свободное поле (2.20) должно описывать поле в ближней зоне (в предельном случае $\kappa c / \omega \gg \epsilon\mu$ оно соответствует полю квазистатического изобращения). Существуют и поверхностные волны, которые экспоненциально затухают в обе стороны от границы. Переходное излучение поверхностных волн мы в этой главе не рассматриваем (см. гл. 3, § 3.1). Вторая оговорка касается возможности существования решения однородного уравнения (2.17) при условии $\epsilon = 0$. Оно отвечает излучению продольных волн, характеристики которых существенно зависят от пространственной дисперсии, а следовательно, и от свойств среды вблизи поверхности. Мы их здесь также рассматривать не будем (см. гл. 3, § 3.4). Третья оговорка связана с излучением Вавилова — Черенкова (В.—Ч.), которое, как говорилось, будем здесь считать отсутствующим как в среде 1, так и в среде 2, т. е. будем предполагать, что $c^2 / (v^2 \epsilon_1 \mu_1) > 1$ и $c^2 / (v^2 \epsilon_2 \mu_2) > 1$ (здесь считаем, что речь идет о прозрачных средах).

Заметим, кстати, что из (2.19), если выполнено условие $c^2 / (v^2 \epsilon\mu) < 1$, легко получается формула Тамма — Франка [2] для излучения В.—Ч. в однородной среде. Мощность излучения (энергия, излучаемая в единицу времени) равна со знаком минус работе, совершаемой в единицу времени полем E^q над током j^q (эти величины коллинеарны):

$$\begin{aligned} Q^{\dot{V}-ch} &= -qv \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\omega, \kappa}^q(vt) \exp(-i\omega t) d\omega d\kappa = \\ &= \frac{vq^2 \mu i}{\pi c^2} \int_0^{\infty} \omega d\omega \int_0^{\infty} \frac{1 - c^2 / (v^2 \epsilon\mu)}{\epsilon\mu - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} = \\ &= \frac{vq^2 \mu}{c^2} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon\mu}\right) \omega d\omega \int_0^{\infty} \delta\left(\epsilon\mu - \frac{c^2}{v^2} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}\right) d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} = \\ &= \frac{vq^2}{c^2} \int \mu \omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon\mu}\right) d\omega, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где интегрирование производится по области положительных частот, для которых $c^2 / (v^2 \epsilon\mu) < 1$. При $\mu = 1$ эта формула совпадает с полученной в [2]. Разумеется, в литературе известна и фор-

мула (2.23) с $\mu \neq 1$ (см., например, [5]). Мы будем, когда это не связано с особыми усложнениями, проводить все вычисления при $\mu \neq 1$. Это полезно не только в связи с возможностью рассматривать также среды с отличной от единицы магнитной проницаемостью, но и удобно при решении задач об излучении магнитных полюсов и магнитных мультиполей в среде с $\mu = 1$ (см. § 3.6).

Вместе с тем, если частотная дисперсия ϵ ниже будет учтена (она, в частности, не изменяет результат (2.23), который по характеру вывода пригоден и при $\epsilon = \epsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$), то, как уже упоминалось, μ везде будет считаться постоянной величиной. При рассмотрении переходного излучения, как уже говорилось выше, мы будем в настоящем разделе считать условие излучения В.—Ч. не выполненным.

Для использования граничных условий (2.18) необходимо знать тангенциальные к границе раздела компоненты электрического поля. Они легко находятся из (2.16) для поля заряда (индекс q) и поля излучения (индекс r):

$$\begin{aligned} \kappa E_{\perp, \omega, \kappa}^q(z) &= -\frac{\kappa^2 c^2}{v\omega(\epsilon\mu - c^2/v^2)} E_{\omega, \kappa}^q(z), \\ \kappa E_{\perp, \omega, \kappa}^r(z) &= \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} E_{\omega, \kappa}^r(z). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Теперь можно воспользоваться граничными условиями (2.18) для получения двух уравнений, определяющих амплитуды поля излучения a_1 и a_2 :

$$\frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{\epsilon_1 \mu_1 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \epsilon_1 a_1 = \frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{\epsilon_2 \mu_2 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \epsilon_2 a_2, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{v\epsilon_1 (\epsilon_1 \mu_1 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)} + \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} a_1 &= \\ = \frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{v\epsilon_2 (\epsilon_2 \mu_2 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)} - \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} a_2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Эту систему уравнений нетрудно разрешить относительно амплитуд a_1 и a_2 :

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{v}{c} \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \frac{1}{\epsilon_1 \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} + \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}} \times \\ &\times \left(\frac{1 + \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_1 \mu_1 + \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2}} - \frac{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_2 \mu_2 + \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2}} \right), \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$a_1 = -\frac{v \kappa^2 c^2}{e \omega^2} \frac{1}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}} \times \\ \times \left(\frac{1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 + \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2}} - \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_1 \mu_1 + \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2}} \right). \quad (2.28)$$

Обратим внимание на то, что, естественно, a_1 может быть получено из a_2 заменами $\varepsilon_1 \rightleftharpoons \varepsilon_2$, $\mu_1 \rightleftharpoons \mu_2$ и $v \rightarrow -v$.

3. Энергия переходного излучения. Получим теперь формулы для энергии переходного излучения, выразив ее через амплитуды a_1 и a_2 . Для этого совсем не обязательно вычислять поток вектора Пойнтинга, а достаточно рассчитать энергию радиационного поля E^r асимптотически при $t \rightarrow \infty$, когда радиационное поле и собственное поле оказываются разделенными (при этом среда, в которой рассматривается переходное излучение, считается прозрачной).

Этот метод расчета соответствует гамильтоновскому методу, изложенному в [1]. Простоты ради будем в выражении для энергии пренебрегать дисперсией и учтем, что в плоской волне (2.20) магнитная и электрическая энергии равны друг другу:

$$W_2^r = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}_\perp \int_0^\infty \varepsilon_2 [(E^{r(2)}(\mathbf{r}_\perp, z))^2 + (E_\perp^{r(2)}(\mathbf{r}_\perp, z))^2] dz, \quad (2.29)$$

причем здесь рассматривается поле в среде 2 (т. е. излучение вперед). В действительности получаемый результат справедлив и для любых сред с частотной дисперсией ε , т. е. при наличии зависимости $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ от ω . При учете частотной дисперсии ε в (2.29) множитель ε_2 заменится на $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_2(\omega)$. Однако он фактически сокращается с таким же множителем, возникающим (при учете частотной дисперсии) в знаменателе окончательных выражений (подробнее см. [1], гл. 6, а также § 3.4 гл. 3). Таким образом, получаемые здесь формулы справедливы при учете частотной дисперсии.

При наличии пространственной дисперсии (см. гл. 3, § 3.4) расчет в общем случае усложняется, так как нужно учитывать, что, строго говоря, из-за наличия границ нельзя вводить ε и μ (связь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ и связь $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ вблизи границы становятся интегральными). Однако для достаточно быстрых и, в частности, релятивистских частиц, когда длина формирования (см. § 2.4) больше характерного размера вблизи границы, где сказывается нелокальность связей между $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$, можно использовать приводимые здесь (в гл. 2) формулы (об учете пространственной дисперсии см. гл. 3, § 3.4).

Стоит отметить, что получаемый предлагаемым методом результат, следующий из (2.29), справедлив и в более общем случае, когда среда 1 является поглощающей и даже если при этом в слабо поглощающей среде 1 приближенно выполняется условие излучения В.—Ч. (см. гл. 3, § 3.2). Единственным требованием, налагаемым на результат, получаемый из (2.29), является прозрачность среды, в которой рассматривается излучение (т. е. в данном случае среды 2), а также невыполнение условия излучения В.—Ч. в этой среде (среде 2). Последнее требование связано с тем, что соотношение (2.29) дает полную энергию, излученную частицей в среде 2, которая оказалась бы формально бесконечно большой при выполнении условия излучения В.—Ч., так как она соответствовала бы энергии, собранной с бесконечной длины (если при этом скорость частицы поддерживается постоянной). Если при этих условиях (прозрачности среды 2 и невыполнения в ней условий излучения В.—Ч., т. е. $c^2/(v^2 \epsilon_2 \mu_2) > 1$) в среде 1 условие излучения В.—Ч. также не выполнено (т. е. $c^2/(v^2 \epsilon_1 \mu_1) > 1$), то результат, получаемый из (2.29), описывает только переходное излучение; среда 1 при этом может быть поглощающей. Если же в слабо поглощающей среде 1 приближенно выполнено условие излучения В.—Ч., то результат, получаемый из формулы (2.29), описывает также и излучение В.—Ч., собранное с оптической толщи и вышедшее в среду 2 (см. § 3.2). Для того чтобы подчеркнуть, что соотношение (2.29) дает полную энергию поля излучения, вышедшую в среду 2, в выражении W в (2.29) поставлен верхний индекс g .

Как уже подчеркивалось, в настоящей главе условие излучения В.—Ч. считается невыполненным как в среде 1, так и в среде 2. В этом случае соотношение (2.29) описывает только энергию переходного излучения, вышедшего в среду 2. Ее мы будем обозначать W_2^{tr} , где индекс tr используется как символ переходного излучения. Сходные замечания нужно сделать и при подсчете энергии излучения в среде 1. В этом случае среда 1 считается прозрачной и предполагается, что в ней не выполнено условие излучения В.—Ч. Тогда аналогично (2.29) можно найти полную энергию излучения W_1^r в среде 1. На протяжении этой главы $W_1^r = W_1^{tr}$, $W_2^r = W_2^{tr}$.

Однако надо иметь в виду, что получаемые результаты применимы и в более общем случае, когда в одной из сред приближенно выполнено условие излучения В.—Ч. (более подробно см. об этом § 3.2, п. 5).

Наличие в (2.29) нижнего предела $z = 0$ несколько усложняет расчет. Фактически, однако, если нас интересует вся энергия, излученная при пересечении границы, мы можем считать, что при достаточно большом t излучение уже достаточно далеко отошло от границы раздела. Поэтому интегрирование в (2.29) можно проводить от $z = -\infty$ до $z = +\infty$, считая, разумеется, что тогда точка $z = 0$ находится где-то в среде 2 вдали от границы. Подставляя

(2.12) в (2.29), получаем

$$\begin{aligned} W_2^r = \int d\mathbf{r}_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int \frac{\varepsilon_2}{4\pi} [E_{\omega, \kappa}^{r(2)}(z) E_{\omega', \kappa'}^{r(2)}(z) + \\ + E_{\perp, \omega, \kappa}^{r(2)}(z) E_{\perp, \omega', \kappa'}^{r(2)}(z)] \exp[i(\kappa + \kappa')\mathbf{r}_\perp - i(\omega + \omega')t] d\omega d\omega' d\kappa d\kappa'. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Проводя интегрирование по κ' , используя формулу

$$\int \exp[i(\kappa + \kappa')\mathbf{r}_\perp] d\mathbf{r}_\perp = 4\pi^2 \delta(\kappa + \kappa') \quad (2.31)$$

и заменяя ω' на $-\omega'$, получим

$$\begin{aligned} W_2^r = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int \varepsilon_2 [E_{\omega, \kappa}^{r(2)}(z) E_{-\omega', -\kappa}^{r(2)}(z) + \\ + E_{\perp, \omega, \kappa}^{r(2)}(z) E_{\perp, -\omega', -\kappa}^{r(2)}(z)] \exp[-i(\omega - \omega')t] d\omega d\omega' d\kappa. \end{aligned} \quad (2.32)$$

В (2.32) можно выполнить интегрирование по z , учтя, что зависимость от z компоненты $E_{\omega, \kappa}^r$ задается выражением (2.20), а компоненты $E_{\perp, \omega, \kappa}^r(z)$ связаны линейным соотношением с $E_{\omega, \kappa}^r(z)$ (см. формулы (2.16)) и поэтому имеют одинаковую зависимость от z . Интегрирование по z можно провести, используя формулу

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \frac{\omega}{c} z \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} - i \frac{\omega'}{c} z \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa'^2 c^2}{\omega'^2}}\right) dz = \\ = 2\pi \delta\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} - \frac{\omega'}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa'^2 c^2}{\omega'^2}}\right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

В силу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(f(x) - y) dx = \frac{\varphi(x)}{|df(x)/dx|} \Big|_{f(x)=y} \quad (2.34)$$

имеем

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} - \frac{\omega'}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa'^2 c^2}{\omega'^2}}\right) = \\ = \delta(\omega - \omega') \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \frac{c}{\varepsilon_2 \mu_2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

После подстановки (2.33) и (2.35) в (2.32) получаем

$$W_2^r = 2\pi^2 c \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int \frac{1}{\mu_2} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} (|E_{\omega, \kappa}^{r(2)}|^2 + |E_{\perp, \omega, \kappa}^{r(2)}|^2) d\kappa. \quad (2.36)$$

Здесь учтено, что $E_{-\omega, -\kappa}^r = E_{\omega, \kappa}^{r*}$. Принимая во внимание тот факт, что $E_{\perp, \omega, \kappa}^r$ параллельно κ , а также следующее из (2.24)

соотношение

$$|\mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa}^{(2)}|^2 = \frac{\omega^2}{\kappa^2 c^2} \left(\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right) |E_{\omega, \kappa}^{(2)}|^2, \quad (2.37)$$

можно (2.36) записать в виде

$$\begin{aligned} W_2^r &= 4\pi^2 \int_0^\infty d\omega \int \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{\kappa^2 c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} |E_{\omega, \kappa}^{(2)}|^2 d\kappa = \\ &= \frac{q^2}{\pi c} \int \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} \int_0^\infty \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} |a_2|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2.38)$$

В формуле (2.38) интегрирование по κ^2 производится по области значений $\kappa^2 < \varepsilon_2 \mu_2 \omega^2 / c^2$, соответствующих волне, которая может распространяться в среде 2. Удобно ввести угол θ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ и угол θ_2 между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{n}_2$, где $\mathbf{n}_2$ — нормаль к границе раздела сред, направленная из среды 1 в среду 2 (напомним, что частица по нормали к границе переходит из среды 1 в среду 2; см. рис. 4), причем

$$\cos \theta \equiv \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}}{kv}, \quad \cos \theta_2 \equiv \frac{\mathbf{k} \mathbf{n}_2}{kn_2}, \quad \theta = \theta_2, \quad \sin^2 \theta_2 = \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2}. \quad (2.39)$$

Тогда для излучения вперед (в среду 2), учитывая (2.27), получаем

$$W_2^r = \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} W_2^r(\omega, \theta_2) 2\pi \sin \theta_2 d\theta_2, \quad (2.40)$$

где

$$\begin{aligned} W_2^r(\omega, \theta_2) &= \frac{q^2 v^2 \mu_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2}{\pi^2 c^3 \left| \varepsilon_1 \cos \theta_2 + \sqrt{\varepsilon_2 / \mu_2} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2} \right|^2} \times \\ &\times \frac{\left| 1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \varepsilon_2 \right|^2}{\left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 \cos^2 \theta_2 \right) \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2} \right) \right)^2}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

В (2.41) фактически фигурируют только распространяющиеся волны, что видно из приведенного вывода. Последнее не означает, что в излучении, распространяющемся от границы, нет таких волн, которые при изменении $\mathbf{k}$ на $-\mathbf{k}$ (т. е. обращении направления распространения) не испытали бы на границе полного внутреннего отражения. Такие волны, излученные частицей вначале в сторону границы, отразившись от нее, дают вклад в излучение вперед. Они соответствуют условию

$$\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2 < 0 \quad (2.42)$$

или $\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2 = \varepsilon_1 \mu_1 \cos^2 \theta_1 < 0$ (используем закон преломления $\varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_1 = \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2$, где θ_1 — угол волны с нормалью к границе раздела $\mathbf{n}_1$, направленной из среды 2 в среду 1). Таким

волнам в (2.41) соответствует мнимое значение корня $\sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2}$, а при расчете энергии излучения с помощью (2.41) нужно взять квадрат модуля получающегося комплексного выражения, что и указано в (2.41). Хотя, таким образом, одну из сред можно считать поглощающей (комплексные ϵ и μ), но сам расчет энергии излучения ведется в прозрачной среде. Иначе, естественно, это излучение нельзя было бы регистрировать. Слабое поглощение (т. е. когда поглощение мало на длине волны или, в общем случае, на длине зоны формирования; см. § 2.4) в среде, где рассматривается переходное излучение, можно, конечно, учесть дополнительно, вводя в поле излучения множитель типа $\exp \left(- \frac{\epsilon'' \mu \omega z / c}{\sqrt{\epsilon' \mu - \kappa^2 c^2 / \omega^2}} \right)$. В случае пластинки (см. § 3.2),

а именно такая задача всегда реалистична, при наблюдении излучения вне пластинки в прозрачной среде (обычно, в вакууме) проницаемости ϵ и μ также, конечно, нужно в общем случае считать комплексными. Аналогичным образом (когда среда 1 является прозрачной) находится энергия, излучаемая назад (в среду 1):

$$W_1^r = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty d\omega \epsilon_1 \int_0^\infty \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} |a_1|^2 \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} = \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} W_1^r(\omega, \theta_1) 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1. \quad (2.43)$$

Здесь θ_1 — угол между $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{v}$, $\cos \theta_1 = \frac{\mathbf{k} \mathbf{n}_1}{k n_1} = -\frac{\mathbf{k} \mathbf{v}}{kv} = -\cos \theta$,

$$W_1^r(\omega, \theta_1) = \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 \mu_1 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} |\epsilon_2 - \epsilon_1|^2}{\pi^2 c^3 \left| \epsilon_2 \cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_1 / \mu_1} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_1} \right|^2} \times \\ \times \frac{\left| 1 + \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_1} - \frac{v^2}{c^2} \frac{(\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2)}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \epsilon_1 \right|^2}{\left| \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_1 \mu_1 \cos^2 \theta_1 \right) \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_1} \right) \right|^2}. \quad (2.44)$$

В составе излучения назад также присутствуют волны, которые в среде 2 не распространяются ($\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_1 < 0$).

Если частица влетает в среду с $\epsilon_2 = \epsilon$, $\mu_2 = 1$ из вакуума $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$, то формула (2.44) дает результат, полученный в [17] для излучения назад:

$$W_1^r(\omega, \theta_1) = \frac{q^2 v^2 |\epsilon - 1|^2 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1}{\pi^2 c^3 \left| \epsilon \cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta_1} \right|^2} \times \\ \times \frac{\left| 1 - \frac{v^2}{c^2} + (v/c) \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta_1} \right|^2}{\left| \left[1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta_1 \right] \left[1 + (v/c) \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta_1} \right] \right|^2}, \quad (2.45a)$$

где (напомним это) θ_1 — угол между $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{v}$. Здесь проницаемость ε может быть комплексной. Для получения энергии излучения при вылете частицы из среды в вакуум можно воспользоваться формулой (2.45а), заменив $\mathbf{v}$ на $-\mathbf{v}$ и θ_1 на θ_2 — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$. Тот же результат получится, естественно, если в (2.41) положить $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\mu_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 1$. Для удобства приведем эту формулу:

$$W_2^r(\omega, \theta_2) = \frac{q^2 v^2 |\varepsilon - 1|^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2}{\pi^2 c^3 |\varepsilon \cos \theta_2 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_2}|^2} \times \\ \times \left| \frac{1 - v^2/c^2 - (v/c) \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_2}}{[1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta_2][1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_2}]} \right|^2. \quad (2.45б)$$

В пределе $|\varepsilon| \rightarrow \infty$ из (2.45а) следует формула (2.5) для переходного излучения заряда, пересекающего границу идеального проводника (зеркала).

В связи со сделанными замечаниями о возможности отражения от границы раздела сред волн, излученных заряженной частицей, стоит обратить внимание на то, что интенсивность переходного излучения заряда может быть выражена через коэффициенты Френеля для отражения и преломления плоских волн на границе раздела сред [28, 220]. Введем эти коэффициенты, следуя принятым здесь обозначениям. Если на границу раздела сред со стороны среды 1 падает волна с амплитудой a_0 (определение амплитуды a дается формулой (2.20)), то в отсутствие поля частицы соотношения (2.25), (2.26) заменяются на следующие:

$$\varepsilon_1 (a_1 + a_0) = \varepsilon_2 a_2, \quad (2.25а)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} (a_1 - a_0) = - \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} a_2. \quad (2.26а)$$

Отсюда имеем для коэффициентов Френеля (относительной амплитуды проходящей и отраженной волн):

$$r_1 = \frac{a_1}{a_0} = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} + \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}, \quad (2.45в)$$

$$t_2 = \frac{a_2}{a_0} = \frac{2\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} + \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}. \quad (2.45г)$$

Если же волна падает из среды 2 на границу, то получим коэффициенты r_2 и t_1 , отличающиеся от r_1 и t_2 заменами $\varepsilon_1 \rightleftharpoons \varepsilon_2$, $\mu_1 \rightleftharpoons \mu_2$. Стоит отметить, что коэффициенты отражения R и прохождения T (по энергии), как это следует из выражений для энергии поля в среде (2.38), (2.43), равны

$$R_1 = |r_1|^2, \quad R_2 = |r_2|^2, \\ T_2 = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}} |t_2|^2 = 1 - R_1,$$

$$T_1 = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}} |t_1|^2 = 1 - R_2.$$

Индексы 1 и 2 относятся соответственно к среде 1 и среде 2 (т. е. T_2 , например, — это коэффициент прохождения в среду 2).

Легко проверить, что энергия переходного излучения заряда вперед (2.41) может быть выражена через коэффициенты t_2 и r_2 [28]:

$$W_2^r(\omega, \theta_2) = \frac{q^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \times \\ \times \left| \frac{\mu_2 \sin \theta_2}{1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2} + \frac{\mu_2 r_2 \sin \theta_2}{1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2} - \frac{\mu_1 t_2 \sin \theta_1}{1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \theta_1} \right|^2, \quad (2.45d)$$

а энергия излучения назад (2.44) может быть выражена через коэффициенты t_1 и r_1 :

$$W_1^r(\omega, \theta_1) = \frac{q^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \times \\ \times \left| \frac{\mu_1 \sin \theta_1}{1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \theta_1} + \frac{\mu_1 r_1 \sin \theta_1}{1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \theta_1} - \frac{\mu_2 t_1 \sin \theta_2}{1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2} \right|^2. \quad (2.45e)$$

Здесь $\kappa^2 c^2 / \omega^2$ выражено через углы:

$$\kappa^2 c^2 / \omega^2 = \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_1 = \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2.$$

Формулы (2.45d) и (2.45e) имеют простую интерпретацию. Первый член под знаком модуля соответствует волне, создаваемой самим зарядом, второй — волне, создаваемой зарядом в направлении границы и отраженной от нее, а третий — волне, создаваемой зарядом до пересечения границы (для излучения вперед) или после пересечения границы (для излучения назад) и прошедшей через границу. Интенсивности (2.45d) и (2.45e) могут быть вычислены также по скачку потенциала Лленара — Вихерта при пересечении зарядом границы раздела сред*). Нужно отметить, что в выражении (2.45d) для интенсивности излучения вперед, естественно, значение $\sin^2 \theta_2$ действительно и меньше 1, однако, значения $\sin^2 \theta_1$ могут быть комплексными и большими единицы (в последнем случае имеет место полное внутреннее отражение соответствующих волн от среды 1). Поэтому выражении

*) Авторы признательны В. В. и Вл. В. Ючаровским, обратившим внимание на это обстоятельство.

ем (2.45д) удобно пользоваться только в случае, когда ε и μ действительны как в среде 1, так и в среде 2 и $\sin^2 \theta_1 < 1$.

В общем случае удобнее использовать либо (2.41), либо выразить в (2.45д) все величины через углы θ_2 :

$$W_2^r(\omega, \theta_2) = \frac{\mu_2^2 q^2 v^2 \sin^2 \theta_2}{4\pi^2 c^3} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \times$$

$$\times \left| \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2} + \frac{r_2}{1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2} - \frac{t_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1 / \varepsilon_1 \mu_2}}{1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_2} \right|^2, \quad (2.45\text{ж})$$

$$r_2 = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2 - \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2 + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_2},$$

$$t_2 = \frac{2\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2 + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_2}.$$

Аналогичные замены можно сделать в (2.45е).

4. Переходное излучение нерелятивистских частиц. Рассмотрим излучение нерелятивистских частиц, когда

$$v/c \ll 1. \quad (2.46)$$

Тогда выражения (2.41) и (2.44) в общем случае еще не упрощаются, поскольку отношение v/c (или v^2/c^2) входит в них в равных комбинациях с ε_1 , ε_2 , μ_1 и μ_2 . Ограничимся, для простоты, случаями, когда заряд влетает из вакуума в среду с проницаемостями ε и μ ($\mu = 1$) или вылетает в вакуум из такой среды. Тогда, как ясно из (2.45а) и (2.45б),

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta_0) = W_1^r(\omega, \theta_1)|_{\theta_1=\theta_0} = W_2^r(\omega, \theta_2)|_{\theta_2=\theta_0} =$$

$$= \frac{q^2 v^2 |\varepsilon - 1|^2 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0}{\pi^2 c^3 |\varepsilon \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_0}|^2}, \quad (2.47)$$

где, разумеется, угол θ_0 в обоих случаях отсчитывается от направленной в вакуум нормали к границе среды (в случае W_1^r это $\theta_1 = \pi - \theta$ — угол между $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{v}$, а в случае W_2^r — угол $\theta_2 = \theta$ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$).

Пусть теперь

$$|\varepsilon| \gg 1. \quad (2.48)$$

Тогда (2.47) переходит в

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta_0) = \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta_0}{\pi^2 c^3}, \quad (2.5а)$$

что отвечает нерелятивистскому пределу формулы (2.5). Следует заметить, что выражение (2.47), а следовательно, и (2.5а), оказывается верным как при $v/c \ll |\epsilon|^{-1/2}$, так и при $v/c \gg |\epsilon|^{-1/2}$, т. е. единственным условием применимости результата (2.5а) является условие (2.46). Как уже отмечалось, результаты пригодны для случая произвольной частотной дисперсии $\epsilon = \epsilon(\omega)$. Это позволяет использовать формулу (2.47) для анализа частотного спектра переходного излучения нерелятивистских частиц (формула (2.47) пригодна как при $|\epsilon| \gg 1$, так и при $|\epsilon| \sim 1$).

Для низких частот спектр (2.47) в общем примерно плоский, хотя вблизи линий поглощения или в других областях частот с ярко выраженной частотной дисперсией отклонения от плоского спектра могут быть значительными. При достаточно больших частотах (в обычном веществе — это частоты, существенно превосходящие оптические частоты) для $\epsilon(\omega)$ можно пользоваться известным асимптотическим выражением

$$\epsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2; \quad \omega_{pe}^2 = 4\pi N_e e^2/m_e, \quad (2.49)$$

где N_e — концентрация электронов вещества (в данном случае $N_e = N_0 = \text{const}$), m_e — масса электрона, $-e$ — его заряд. Формула (2.49) для плазмы, естественно, применима в широком интервале частот. В обычном веществе ω_{pe} может заметно превышать оптические частоты, а формула (2.49) пригодна при частотах, существенно превышающих собственные частоты ω_s среды. Если $\omega_{pe} \gg \omega_s$, то формулой (2.49) можно пользоваться и при условиях $\omega \ll \omega_{pe}$, $\omega \gg \omega_s$, когда $|\epsilon| \gg 1$. В этом случае плоский спектр практически тянется до $\omega \sim \omega_{pe}$. При $\omega \gg \omega_{pe}$ имеем $|\epsilon - 1| \ll 1$ и, следовательно, из (2.47) получим

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta_0) = \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta_0}{4\pi^2 c^3} \cdot \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4}, \quad (2.50)$$

т. е. спектральная плотность излучения быстро падает с ростом частоты. Практически в этом случае основной вклад в полную энергию переходного излучения нерелятивистских частиц вносят частоты порядка ω_{pe} .

Заметим, что, естественно, излучаются все и не распространяющиеся в среде частоты (в плазме частоты $\omega < \omega_{pe}$). Если они излучены первоначально по направлению к среде, то испытав полное внутреннее отражение, они уходят в вакуум. В случае справедливости плазменной формулы (2.49) интегралы по частотам и углам могут быть вычислены до конца и полная энергия, излученная назад нерелятивистской частицей, будет равна

$$W_1^{\text{tr}} = \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} W^{\text{tr}}(\omega, \theta_0) 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0 = \frac{q^2 v^2}{\pi c^3} \omega_{pe}. \quad (2.51)$$

Эта формула может служить в ряде случаев аппроксимацией и для любых других сред, для которых плазменная частота заметно превосходит собственные частоты среды.

5. Переходное излучение ультрарелятивистских частиц. Переходное излучение ультрарелятивистских частиц обладает рядом особенностей. Во-первых, оказывается, что основная энергия излучения приходится на излучение вперед (по скорости частицы), т. е. $W_2^r \gg W_1^r$. Формально это связано с тем, что в (2.44) и (2.45а) — при излучении назад в знаменателе фигурирует множитель $1 + (v/c)\sqrt{\varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1 \sin^2 \theta_1}$ или $1 + (v/c)\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_1}$. Для излучения вперед (формула (2.41) или (2.45б)) этот множитель заменяется на $1 - (v/c)\sqrt{\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2 \sin^2 \theta_2}$ или $1 - (v/c)\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_2}$. Разумеется, здесь находит отражение тот известный факт, что релятивистские частицы излучают сильнее всего под малыми углами к направлению их скорости. Это, однако, справедливо только при небольших значениях $|\varepsilon|$. Достаточно сказать, что для идеального проводника формула (2.5) относится и к W_1^r , и к W_2^r . В реальной же среде для высоких частот $|\varepsilon - 1| \ll 1$ (см., например (2.49)), и тогда уже всегда $W_2^r \gg W_1^r$.

Во-вторых, по той же, по сути дела, причине максимальная частота излучения существенно повышается и оказывается порядка

$$\omega_{\max} \sim \omega_{pe} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} = \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \gg 1, \quad (2.52)$$

где $\mathcal{E}$ — энергия, а M — масса излучающей частицы. Другими словами, максимальная излучаемая частота весьма существенно зависит от энергии частицы и, кроме того, она попадает в область прозрачности любого вещества ($\omega \gg \omega_{pe}$), когда плазменная формула (2.49) применима для любых сред и $|\varepsilon - 1| \sim (Mc^2/\mathcal{E})^2$. В-третьих, в области высоких частот (2.52) возникает значительная концентрация излучения вперед вдоль скорости частицы, так что в пределах угла

$$\theta \sim Mc^2/\mathcal{E} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2.53)$$

сосредоточивается основная доля излученной энергии. Это утверждение относится к любым средам и, в частности, к реальному проводнику, который является идеальным зеркалом лишь в области частот $\omega \ll \omega_{pe}$, где $|\varepsilon| \gg 1$ (и в этой области частот концентрация излучения вдоль скорости частицы относительно невелика и, кроме того, имеет место лишь при $\ln(4\mathcal{E}^2/Mc^2) \gg 1$). В области же частот (2.52) реальный проводник почти полностью прозрачен, а излучение в этой области частот концентрируется в пределах малого угла (2.53) вдоль скорости частицы (вперед). Наконец, частоты (2.52) в излучении вперед (т. е. в W_2^r) для обычных веществ попадают уже в область рентгеновского излучения или даже соответствуют γ -квантам.

Эти качественные выводы следуют уже из простых оценок. Так, уже из (2.25) видно, что заметное излучение для ультрарелятивистских частиц (т. е. достаточно велико значение амплитуды a_2 , описывающей излучение вперед) возникает в том случае,

когда собственные поля частицы существенно различаются в двух средах, т. е. когда в двух средах различаются факторы

$$-\varepsilon\mu + \frac{c^2}{v^2} + \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 + \theta^2. \quad (2.54)$$

Здесь мы использовали то, что $\mu \approx 1$, $|\varepsilon - 1| \approx \omega_{pe}^2/\omega^2 \ll 1$, $\theta^2 = \theta_2^2 \approx \kappa^2 c^2/\omega^2 \ll 1$ и $(Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll 1$. При высоких частотах можно и нужно считать, что $\mu = 1$. Поэтому везде ниже при рассмотрении переходного излучения ультрарелятивистских частиц полагаем $\mu = 1$, хотя в области низких частот при $\mu \neq 1$ интенсивность несколько изменяется (однако, вклад этой области в полную интенсивность весьма мал).

Все слагаемые в (2.54) будут одного порядка величины, если выполнены соотношения (2.52) и (2.53). Это, конечно, еще не доказывает, что они должны быть одного порядка величины. Все определяется распределением энергии излучения по углам и частотам. Мы покажем, что угловое распределение энергии излучения таково, что максимальная энергия излучается в пределах угла (2.53), а частотное распределение таково, что примерно с равной энергией излучаются частоты вплоть до значения (2.52).

Для нахождения энергии излучения рассмотрим в первую очередь соотношения (2.25), (2.26) в пределе

$$\theta^2 \ll 1; \quad Mc^2/\mathcal{E} \ll 1, \quad 1 - \varepsilon = \omega_{pe}^2/\omega^2 \ll 1. \quad (2.55)$$

Тогда знаменатели соответствующих выражений, входящих в (2.25) и (2.26), можно аппроксимировать с помощью соотношения (2.54). В результате вместо (2.25) и (2.26) получим ($\cos \theta = \mathbf{kv}/kv = \cos \theta_2$)

$$\frac{\theta^2}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2} + a_1 = \frac{\theta^2}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2} + a_2, \quad (2.56)$$

$$\frac{\theta^2}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2} - a_1 = \frac{\theta^2}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2} + a_2, \quad (2.57)$$

где $\omega_{pe,1}$ и $\omega_{pe,2}$ — два значения плазменной частоты в двух средах, 1 и 2 соответственно. Из (2.56) и (2.57) следует, что $a_1 = 0$, т. е. излучение назад отсутствует (в рамках сделанных приближений), а излучение вперед определяется амплитудой

$$a_2 = \theta^2 \left[\frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2} - \frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2} \right] = \\ = \frac{\theta^2 (\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2)}{\omega^2 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2] [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2]}. \quad (2.58)$$

Обращение в нуль излучения назад является лишь следствием принятого приближения, определяемого неравенствами (2.55).

При выполнении условий (2.55) излучение назад отсутствует лишь в первом приближении по указанным малым параметрам, т. е. излучение не отсутствует, но является величиной более высокого порядка малости по параметрам разложения (2.55).

Для ультрарелятивистской частицы спектральную плотность энергии излучения можно получить не только из (2.40), (2.41), но и используя сразу (2.58):

$$W^{\text{tr}}(\omega) \approx W_2^{\text{r}}(\omega) = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \times \\ \times \left[\frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe},1}^2/\omega^2} - \frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe},2}^2/\omega^2} \right]^2. \quad (2.59)$$

Здесь интегрирование по θ^2 мы распространили до ∞ (хотя соответствующее подынтегральное выражение было выведено для $\theta^2 \ll 1$). Это допустимо только в силу того, что основной вклад в результирующий интеграл вносят малые углы порядка тех, которые задаются соотношением (2.53). При этом интеграл (2.59) хорошо сходится на верхнем пределе и конкретное значение верхнего предела несущественно, если только это значение превосходит $(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{\text{pe},1,2}^2/\omega^2$.

Вычислим теперь интегральную по частотам энергию переходного излучения. Вначале рассмотрим случай, когда изменение концентрации частиц среды $\Delta N = |N_1 - N_2|$ на границе раздела сред мало, т. е. $\Delta N/N_0 \ll 1$ ($N_1 \approx N_2 \approx N_0$). Тогда интегрирование (2.59) по углам дает

$$W^{\text{tr}}(\omega) = \frac{q^2}{6\pi c} \left(\frac{\Delta N}{N_0} \right)^2 \frac{\omega_{\text{pe}}^4}{\omega^4} \frac{1}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]^2}. \quad (2.60)$$

Спектральная плотность излучения (2.60) постоянна до $\omega \sim \omega_{\text{pe}}\mathcal{E}/Mc^2$, а затем падает пропорционально $1/\omega^4$. Это показывает как раз, что максимальная частота, точнее, та частота, до которой спектральная плотность излучения постоянна, соответствует (2.52). Отсюда уже следует, что характерный квадрат угла $\theta^2 \sim (Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2$, действительно, имеет порядок, определяемый (2.53). Полная энергия излучения будет равной

$$W^{\text{tr}} = \int_0^\infty W^{\text{tr}}(\omega) d\omega = \frac{q^2 \omega_{\text{pe}}}{24c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \left(\frac{\Delta N}{N_0} \right)^2. \quad (2.61)$$

Рассмотрим теперь другой случай, соответствующий резкому скачку концентрации, $\Delta N/N_1 = 1$, $N_2 = 0$ (вылет частицы из среды в вакуум) или $\Delta N/N_2 = 1$, $N_1 = 0$ (влет частицы в среду из вакуума). Получаем

$$W^{\text{tr}}(\omega) = \frac{2q^2}{\pi c} \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{\omega_{\text{pe}}^2} \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right] \ln \left[1 + \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 \right] - 1 \right\}. \quad (2.62)$$

При малых частотах $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$ спектральная плотность в этом случае уже не постоянна, а имеет логарифмическую зависимость от частоты и энергии частицы:

$$W^{tr}(\omega) \approx \frac{2q^2}{\pi c} \left[\ln \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right) - 1 \right], \quad \omega \ll \omega_{pe} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.63)$$

При больших частотах $\omega \gg \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$ спектральная плотность по-прежнему падает как $1/\omega^4$:

$$W^{tr}(\omega) \approx \frac{q^2}{6\pi c} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^4; \quad \omega \gg \frac{\omega_{pe} \mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.64)$$

Интегральная по частотам энергия излучения вперед оказывается равной

$$W^{tr} = \int_0^\infty W^{tr}(\omega) d\omega = \frac{q^2}{3c} \omega_{pe} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \quad (2.65)$$

и растет пропорционально энергии частицы [19, 20]. Выражение (2.65) для излучения вперед справедливо при оговоренных условиях как при вылете частицы из среды в вакуум, так и при ее влете из вакуума в среду (и, следовательно, при наблюдении излучения в самой среде).

Стоит отметить, что рост W^{tr} с энергией $\mathcal{E}$ связан лишь с ростом с энергией характерной частоты (2.52), так что число излученных квантов слабо зависит от энергии. Число квантов в интервале $d\omega$ равно $W^{tr}(\omega)d\omega/\hbar\omega = N^{tr}(\omega)d\omega$. Как видно из выражения (2.63), при $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$ величина $N^{tr}(\omega)d\omega$ пропорциональна $(d\omega/\omega)[\ln(\omega_{pe} \mathcal{E} / \omega Mc^2) - 1]$, т. е. полное число квантов будет логарифмически расходиться при малых частотах. В области малых частот, однако, плазменной формулой для $\epsilon(\omega)$ пользоваться нельзя. Оценим здесь полное число квантов высоких частот, интегрируя по частотам, начиная от некоторых частот ω_{min} (значение ω_{min} будет таким, что при $\omega > \omega_{min}$ можно использовать плазменную формулу). Имеем

$$N^{tr} = \int_{\omega_{min}}^\infty W^{tr}(\omega) \frac{d\omega}{\hbar\omega}.$$

В качестве примера рассмотрим случай $\Delta N/N = 1$. Тогда

$$N^{tr} = \frac{q^2 \omega_{pe}^4}{\hbar \pi c} \times \int_0^{\theta_{max}} \frac{\theta^2 d\theta^2}{[\theta^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2]^2} \int_{\omega_{min}}^\infty \frac{d\omega}{\omega^5 [\theta^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^2}. \quad (2.65a)$$

Здесь введено θ_{max} и учтено, что интеграл (2.65a), вообще говоря, расходится логарифмически и на больших θ (т. е. вклад дают и

углы $\theta \sim 1$, а подынтегральное выражение (2.65а) записано при $\theta^2 \ll 1$). Если $\ln(\mathcal{E}/Mc^2) \gg 1$, то результат оказывается слабо зависящим от параметров обрезания $\omega_{\min}$ и $\theta_{\max}$ и, пренебрегая членами, пропорциональными $\ln \theta_{\max}$ и $\ln(\omega_{\min}/\omega_{pe})$, по сравнению с членами, пропорциональными $\ln(\mathcal{E}/Mc^2)$, можно считать, что

$$N^{tr} \approx \frac{q^2}{\pi \hbar c} \left(\ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 \approx 0,0023 \left(\ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2, \quad q = e. \quad (2.65б)$$

Таким образом, полное число излученных квантов с достаточно большой энергией растет только пропорционально квадрату логарифма энергии и при не слишком больших энергиях на одной границе излучается в среднем существенно меньше одного кванта. Поэтому можно, как это обычно и делают, оценивать число квантов с энергией, близкой к $\hbar\omega_{\max}$, отношением W^{tr} (см. (2.65)) к $\hbar\omega_{\max}$ (см. (2.52)), что приводит к оценке

$$N^{tr} \sim W^{tr}/\hbar\omega_{\max} \sim q^2/3\hbar c,$$

т. е. $N^{tr} \sim 10^{-3}$ (для $q = e$; при используемой точности можно проводить и оценку $N^{tr} \sim e^2/\hbar c \approx 1/137$).

Остановимся теперь на изучении ультрарелятивистских частиц назад и под углами, существенно большими характерного угла (2.53).

Для излучения ультрарелятивистской частицы назад плазменная формула для ε , вообще говоря, не применима, так как излучаемые частоты оказываются существенно меньше (2.52) и достигают лишь величин порядка ω_{pe} . Поэтому $|\varepsilon - 1|$, вообще говоря, не мало по сравнению с единицей, и, следовательно, поскольку $\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$, имеем

$$(Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll |1 - \varepsilon|. \quad (2.66)$$

Рассмотрим для излучения назад (так же, как в случае излучения вперед) два предельных случая, когда $\Delta\varepsilon = |\varepsilon_2 - \varepsilon_1| \ll \varepsilon$ и когда $\Delta\varepsilon = \varepsilon$ ($\mu = 1$). В первом случае, учитывая (2.66), получим

$$W_1^{tr}(\omega, \theta_1) = W_1^r(\omega, \theta_1) = \frac{q^2 \sqrt{\varepsilon} \sin^2 \theta_1 |1 - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon} \cos \theta_1|^2 (\Delta\varepsilon)^2}{4\pi^2 c |1 - \varepsilon \cos^2 \theta_1|^2 |1 + \sqrt{\varepsilon} \cos \theta_1|^2 \varepsilon^2}. \quad (2.67)$$

Из этого выражения следует, что для ультрарелятивистской частицы в излучении назад (т. е. в направлении против ее скорости) сильной концентрации излучения нет. Определенная концентрация излучения в пределах угла $\theta_1^2 \sim (Mc^2/\mathcal{E})^2$ здесь также имеет место, однако только для частот $\omega \sim \omega_{pe} \mathcal{E}/Mc^2$, относительный вклад которых в полное излучение назад пренебрежимо мал. Кроме того, для достаточно больших частот в излучении назад, когда применимо плазменное приближение для ε , в данном случае $\Delta\varepsilon/\varepsilon \ll 1$, будут излучаться только частоты $\omega > \omega_{pe}$. Последнее следует из условия прозрачности для излучения.

Стоит отметить, что излучение вперед вне пределов узкого угла (2.53), т. е. при $\theta_2^2 \gg (Mc^2/\mathcal{E})^2$ и при выполнении соотношения (2.66), отличается от (2.67) лишь тем, что вместо $\cos \theta_1$ фигурирует $-\cos \theta_2$. Напомним, что угол θ_1 отсчитывается от направления $-\mathbf{v}$, тогда как угол $\theta_2 = \theta$ — от направления $\mathbf{v}$. Другими словами, для всего излучения ультрарелятивистской частицы вне пределов углов (2.53) и при выполнении (2.66) можно использовать формулу

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta) = \frac{q^2 V \bar{\varepsilon} \sin^2 \theta |1 - \varepsilon - V \bar{\varepsilon} \cos \theta|^2}{4\pi^2 c |1 - \varepsilon \cos^2 \theta|^2 |1 - V \bar{\varepsilon} \cos \theta|^2} \left(\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \right)^2, \quad (2.68)$$

где $0 < \theta \leq \pi$ и отсчитывается от направления $\mathbf{v}$. В пределе малых углов $\theta \ll 1$ и $1 - \varepsilon = \omega_{\text{pe}}^2 / \omega^2 \ll 1$ из (2.68) получим результат, соответствующий (2.59) в пределе $(Mc^2/\mathcal{E})^2 \rightarrow 0$. Последнее обстоятельство связано с использованием при выводе выражения (2.68) неравенства (2.66). Формула (2.68) не описывает поэтому высокие частоты (2.52) и малые углы (2.53) в излучении вперед, где сосредоточивается основная доля энергии излучения.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, $|\Delta \varepsilon / \varepsilon_2| = 1$, для излучения ультрарелятивистской частицы назад. Здесь же в угловом распределении излучения назад имеется определенная концентрация излучения. Действительно, в интервале углов (2.53) получим из (2.45а) для излучения назад при влете частицы в среду из вакуума

$$W_1^{\text{tr}}(\omega, \theta_1) = W_1^{\text{r}}(\omega, \theta_1) = \frac{q^2}{\pi^2 c} \left| \frac{V \bar{\varepsilon} - 1}{V \bar{\varepsilon} + 1} \right|^2 \frac{\theta_1^2}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta_1^2]^2}. \quad (2.69)$$

В спектральной плотности излучения имеется резкий максимум при $\theta_1^2 \sim (Mc^2/\mathcal{E})^2$. Однако в интегральную по углам энергию излучения вносят равный вклад и углы с $\theta_1 \sim 1$. Это видно из логарифмической «расходимости» интеграла

$$\int_0^\infty W_1^{\text{tr}}(\omega, \theta_1) d\theta_1^2 \quad (2.70)$$

при больших θ_1^2 . Естественно, при больших углах уже нельзя использовать (2.69), а надо пользоваться точной формулой (2.45). Однако при $\ln(4\mathcal{E}^2/(Mc^2)^2) \gg 1$ можно пренебречь вкладом больших углов и получить

$$W_1^{\text{tr}}(\omega) = \int_0^{\theta_{1,\text{max}}} W_1^{\text{tr}}(\omega, \theta_1) \pi d\theta_1^2 \approx \frac{2q^2}{\pi c} \left| \frac{V \bar{\varepsilon} - 1}{V \bar{\varepsilon} + 1} \right|^2 \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.71)$$

Этот результат вполне аналогичен тому, который был получен в § 2.1 для излучения в случае идеального проводника (зеркала).

В данном случае заряд изображения равен не $-q$, а $-q \left| \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} \right|$, концентрация же излучения назад в пределах угла $Mc^2/\mathcal{E}$ связана с тем, что излучает изображение. Разумеется, при $|\varepsilon| \gg 1$ формула (2.71) переходит в (2.7).

Продвинуться в расчетах дальше можно, лишь задав функцию $\varepsilon(\omega)$ в формуле (2.71). Рассмотрим здесь простой случай, когда применима плазменная формула для $\varepsilon(\omega)$. Тогда при $\omega < \omega_{pe}$ величина $\sqrt{\varepsilon}$ — чисто мнимая и (2.71) дает плоский спектр, а при $\omega \gg \omega_{pe}$ спектр будет зависеть от частоты по закону $1/\omega^4$. Полный интеграл по частотам от (2.71) дает

$$\begin{aligned} W_1^{\text{tr}} &= \int_0^{\omega_{pe}} W_1^{\text{tr}}(\omega) d\omega + \int_{\omega_{pe}}^{\infty} W_1^{\text{tr}}(\omega) d\omega = \\ &= \frac{2q^2}{\pi c} \omega_{pe} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \left[\int_0^1 d\frac{\omega}{\omega_{pe}} + \int_1^{\infty} \left| \frac{\sqrt{\omega^2/\omega_{pe}^2 - 1} - \omega/\omega_{pe}}{\sqrt{\omega^2/\omega_{pe}^2 - 1} + \omega/\omega_{pe}} \right|^2 d\frac{\omega}{\omega_{pe}} \right] = \\ &= \frac{2q^2}{\pi c} \omega_{pe} \left(1 + \frac{1}{15} \right) \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} = \frac{32q^2}{15\pi c} \omega_{pe} \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}, \quad (2.72) \end{aligned}$$

причем первый интеграл (2.72) описывает излучение в вакуум волн, которые в плазме не распространяются, а второй — соответственно волн, которые в плазме распространяются. Переходное излучение назад при вылете частиц из среды в вакуум (т. е. при наблюдении излучения в самой среде; см. (2.44)) не имеет максимума в угловом распределении при $\theta_1 \sim Mc^2/\mathcal{E}$ (в отличие от излучения назад при влете, описываемого выражением (2.69)). Кроме того, при использовании плазменного приближения для ε излучаются только частоты $\omega > \omega_{pe}$.

Тот факт, что для ультрарелятивистских частиц ($v \rightarrow c$) полная энергия, излучаемая вперед (скажем, при выходе частицы из среды в вакуум), существенно превосходит полную энергию, излучаемую назад (например, в вакуум), может вызвать некоторое удивление. Нужно помнить, однако, что для идеального зеркала излучаемые вперед и назад энергии и при $v \rightarrow c$ равны друг другу. При учете же частотной дисперсии и особенно на высоких частотах, когда приближение идеального зеркала совершенно неприменимо, назад при $v \rightarrow c$ излучает не сам заряд q , а его значительно более слабое изображение. Вперед же излучает сам заряд q . Поэтому, в конечном счете, излучение вперед при $v \rightarrow c$ превалирует.

Итак, качественное отличие переходного излучения ультрарелятивистских частиц состоит в том, что основная доля энергии излучается вперед в пределах малого телесного угла (2.53), а полная интенсивность излучения пропорциональна энергии частицы $\mathcal{E}$.

§ 2.3. Переходное излучение заряженной частицы в нестационарной среде

1. Поле заряда. Переходное излучение может возникнуть также в том случае, когда в среде происходит резкое изменение ее свойств во времени [33—36, 50]. Как отмечалось в гл. 1, такая возможность ясна уже из общих соображений, приводящих к выводу о существовании переходного излучения: для его появления существенно изменение параметра $v\sqrt{\epsilon\mu}/c$ в месте, занимаемом зарядом (или другим излучателем), а это изменение возможно как из-за пересечения зарядом границы раздела, так и из-за изменения ϵ и μ во времени.

Будем считать, простоты ради, что среда изотропна и характеризуется значением диэлектрической проницаемости ϵ и магнитной проницаемости μ , которые в момент $t=0$ скачком меняются от значений ϵ_1 и μ_1 до значений ϵ_2 и μ_2 . В среде имеется заряд q , движущийся с постоянной скоростью v . Исходными служат те же уравнения Максвелла (2.10) с током (2.11). В силу того, что рассматриваемая задача полностью пространственно однородна, удобно все величины раскладывать по пространственным компонентам Фурье:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{j}_k(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{E}_k(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{B}_k(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Для тока имеем

$$\mathbf{j}_k^q(t) = \frac{qv}{(2\pi)^3} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}t). \quad (2.74)$$

Уравнения Максвелла (2.10) запишутся в виде

$$\begin{aligned} k^2 \mathbf{E}_k(t) - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}_k(t)) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon \mu \mathbf{E}_k(t) = \\ = 4\pi i q v \mu(\mathbf{k}\mathbf{v}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}t) (1/c^2 (2\pi)^3), \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial t} = -i c [\mathbf{k} \mathbf{E}_k(t)]. \quad (2.75a)$$

Необходимо решить уравнения (2.75) для $t < 0$ и $t > 0$ и сшить решения при $t=0$. Условия сшивки непосредственно следуют из уравнений Максвелла (2.10), а именно *)

$$\epsilon_1 \mathbf{E}_k^{(1)}(0) = \epsilon_2 \mathbf{E}_k^{(2)}(0), \quad \mathbf{B}_k^{(1)}(0) = \mathbf{B}_k^{(2)}(0). \quad (2.76)$$

*) Для получения условий (2.76) нужно, очевидно, проинтегрировать уравнения (2.10) по времени по области скачка — между моментами $t_1 = -\delta t$ и $t_2 = \delta t$, а затем устремить длительность скачка δt к нулю. При этом величины $\text{rot } \mathbf{H}$, $\text{rot } \mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ считаются конечными, как это, вообще говоря, и имеет место.

В данном случае удобно проектировать уравнение (2.75) на направление, перпендикулярное $\mathbf{k}$. Это связано с тем, что задача пространственно симметрична, а поля в изотропной среде естественно разделяются на составляющие, продольные и поперечные к вектору $\mathbf{k}$. Однако продольное поле в силу непрерывности индукции не излучается. Уравнение для поперечной к вектору $\mathbf{k}$ составляющей (компоненты) поля $\mathbf{E}_k(t)$

$$\mathbf{E}_k^t(t) = \mathbf{E}_k(t) - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}_k(t))/k^2 \quad (2.77)$$

имеет вид

$$k^2 \mathbf{E}_k^t(t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon_\mu \mathbf{E}_k^t(t) = \frac{4\pi i q (\mathbf{k}\mathbf{v})_\mu}{c^2 (2\pi)^3} \mathbf{v}_k^t \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}t); \quad (2.78)$$

$$\mathbf{v}_k^t = \mathbf{v} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})/k^2. \quad (2.79)$$

Здесь мы использовали индекс t для обозначения поперечной компоненты, чтобы отличить ее от компоненты, перпендикулярной скорости заряда, которая отмечена индексом $\perp$. Уравнение (2.78) осталось векторным. Однако можно получить одно уравнение для скалярной величины, если учесть, что в однородной среде обе линейные поляризации поперечного поля независимы (не завязаны) и, следовательно, поляризация, для которой $\mathbf{E}_k^t$ направлено по $\mathbf{v}_k^t$, не зависит от поляризации, перпендикулярной $\mathbf{v}_k^t$. Для последней получим однородное уравнение без источника и, следовательно, можем заключить, что излучение с поляризацией, перпендикулярной $\mathbf{v}_k^t$, не будет возбуждаться зарядом.

Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что

$$\mathbf{E}_k^t(t) = E_k(t) \mathbf{v}_k^t/v, \quad (2.80)$$

и задача сводится к одному уравнению для $E_k(t)$:

$$k^2 E_k(t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon_\mu E_k(t) = \frac{4\pi i q (\mathbf{k}\mathbf{v}) v}{c^2 (2\pi)^3} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}t). \quad (2.81)$$

Его решение равно сумме решений неоднородного уравнения (поля частицы E_k^q) и однородного уравнения (поля излучения E_k^r):

$$E_k(t) = E_k^q(t) + E_k^r(t), \quad (2.82)$$

причем

$$E_k^q(t) = \frac{4\pi i q v (\mathbf{k}\mathbf{v}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}t)}{c^2 (2\pi)^3 [k^2 - \epsilon_\mu (\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2]}, \quad (2.83)$$

$$E_k^r(t) = \frac{4\pi i q}{k (2\pi)^3} \left[a_+ \exp\left(-i \frac{kc}{\sqrt{\epsilon_\mu}} t\right) + a_- \exp\left(i \frac{kc}{\sqrt{\epsilon_\mu}} t\right) \right]. \quad (2.84)$$

Если ϵ является функцией частоты, $\epsilon = \epsilon(\omega)$, то в (2.83) фигурирует $\epsilon = \epsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})$.

Коэффициенты a_+ и a_- описывают амплитуды двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях — по $\mathbf{k}$ (амплитуда a_+) и против $\mathbf{k}$ (амплитуда a_-). При $t < 0$ поле излучения отсутствует, а при $t > 0$ сразу возникают две волны.

Магнитное поле найдется из (2.75а):

$$\frac{\partial \mathbf{B}_k(t)}{\partial t} = -\frac{ic}{v} [\mathbf{k}\mathbf{v}] E_k(t), \quad (2.85)$$

$$\mathbf{B}_k^q(t) = \frac{4\pi i q \mu [\mathbf{k}\mathbf{v}] \exp(-i \mathbf{k}\mathbf{v} t)}{c (2\pi)^3 [k^2 - \varepsilon_\mu (\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2]}, \quad (2.86)$$

$$\mathbf{B}_k^r(t) = \frac{4\pi i q \sqrt{\varepsilon_\mu} [\mathbf{k}\mathbf{v}]}{v (2\pi)^3 k^2} \left[a_+ \exp\left(-i \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_\mu}} t\right) - a_- \exp\left(i \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_\mu}} t\right) \right]. \quad (2.87)$$

Условия сшивки (2.76) сразу дают

$$\frac{\mu_1 \varepsilon_1 k v (\mathbf{k}\mathbf{v})/c^2}{k^2 - \varepsilon_1 \mu_1 (\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2} = \frac{\mu_2 \varepsilon_2 k v (\mathbf{k}\mathbf{v})/c^2}{k^2 - \varepsilon_2 \mu_2 (\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2} + \varepsilon_2 (a_+ + a_-), \quad (2.88)$$

$$\frac{\mu_1 v k^2/c}{k^2 - \varepsilon_1 \mu_1 (\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2} = \frac{\mu_2 v k^2/c}{k^2 - \varepsilon_2 \mu_2 (\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2} + \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} (a_+ - a_-). \quad (2.89)$$

Здесь надо иметь в виду, что, вообще говоря, $a_+(\mathbf{k})$ и $a_-(-\mathbf{k})$ описывают одну и ту же волну, так как в силу вещественности поля $\mathbf{E}^r(\mathbf{r}, t)$ и определения a_+ и a_- (см. (2.84)) имеем

$$a_-(-\mathbf{k}) = -a_+^*(\mathbf{k}). \quad (2.90)$$

Именно (2.90) и указывает на то, что для заданного $\mathbf{k}$ амплитуда $a_-(\mathbf{k})$ описывает волну, распространяющуюся в противоположном $\mathbf{k}$ направлении.

Соотношения (2.88), (2.89) особенно просто использовать для выводов, касающихся излучения ультрарелятивистской частицы ($Mc^2/\mathcal{E} \ll 1$) под малым углом $\theta^2 \ll 1$ к скорости частицы $\mathbf{v}$ при условии $1 - \varepsilon \approx \omega_{pe}^2/\omega^2 \ll 1$, $\mu = 1$. Тогда (2.88), (2.89) приводят сразу к соотношениям

$$\begin{aligned} [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/k^2 c^2]^{-1} &= a_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k}) + \\ &+ [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/k^2 c^2]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/k^2 c^2]^{-1} &= a_+(\mathbf{k}) - a_-(\mathbf{k}) + \\ &+ [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/k^2 c^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Эти соотношения фактически сводятся к уже обсуждавшимся соотношениям (2.56), (2.57) для переходного излучения ультрарелятивистской частицы на границе раздела сред. В этом можно убедиться, если учесть, что в силу $|\varepsilon - 1| \ll 1$, $\omega \approx kc$ амплитуда a_+ соответствует a_2 , а $a_-(\mathbf{k}) = -a_+^*(-\mathbf{k})$ соответствует $-a_1$. Отсюда ясно, что для ультрарелятивистской частицы излучение

назад будет малым, а излучение вперед сходно с излучением, возникающим при пересечении границы раздела сред.

В общем случае из (2.88), (2.89) следует

$$a_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{k^2 v}{2c\epsilon_2} \left[\frac{\mu_1 \epsilon_1 \mathbf{k}v/kc \pm \mu_1 \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}}{k^2 - \epsilon_1 \mu_1 (\mathbf{k}v)^2/c^2} - \frac{\mu_2 \epsilon_2 \mathbf{k}v/kc \pm \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{k^2 - \epsilon_2 \mu_2 (\mathbf{k}v)^2/c^2} \right]. \quad (2.93)$$

2. Энергия переходного излучения. Энергия излучения может быть подсчитана как энергия радиационного поля при $t \rightarrow \infty$. Опять-таки можно воспользоваться формулой (2.29), в которой интегрирование должно быть распространено на все пространство:

$$\begin{aligned} W^{\text{tr}} &= \frac{1}{4\pi} \int_{t \rightarrow \infty} \epsilon_2 (\mathbf{E}^r(\mathbf{r}, t))^2 d\mathbf{r} = 2\pi^2 \int_{t \rightarrow \infty} \epsilon_2 \frac{[\mathbf{k}v]^2}{k^2 v^2} E_{\mathbf{k}}^r(t) E_{-\mathbf{k}}^r(t) d\mathbf{k} = \\ &= \frac{q^2}{\pi^2} \int \frac{\epsilon_2 [\mathbf{k}v]^2}{k^4 v^2} |a_+(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi W^{\text{tr}}(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Здесь мы использовали соотношение (2.90) и учли, что при $t \rightarrow \infty$ осциллирующие во времени слагаемые должны быть отброшены. Мы снова использовали метод, близкий к гамильтоновскому, и то обстоятельство, что собственное поле заряда и поле излучения при $t \rightarrow \infty$ разделяются. В (2.94) не учтена также дисперсия ϵ_2 (окончательный результат с учетом дисперсии тот же самый). Поэтому $|\mathbf{k}| = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \omega/c$ и можно перейти к интегрированию по частотам. Наконец, мы ввели угол излучения θ как угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$. С учетом всего этого

$$\begin{aligned} W^{\text{tr}}(\omega, \theta) &= \frac{q^2 v^2 \sqrt{\mu_2} \sin^2 \theta}{4\pi^2 c^3 \sqrt{\epsilon_2}} \times \\ &\times \frac{\left| \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} (\mu_1/\mu_2 - 1) + \mu_1 (\epsilon_1 - \epsilon_2) (v/c) \cos \theta \right|^2}{\left| 1 - \epsilon_1 \mu_1 (v^2/c^2) \cos^2 \theta \right| \left| 1 - \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} (v/c) \cos \theta \right|^2}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Для сравнения с переходным излучением на границе раздела двух сред заметим, что в (2.94) интегрирование проводится по всем углам. В пределах углов $(0, \pi/2)$ соотношение (2.95) описывает излучение вперед, тогда как в пределах $(\pi/2, \pi)$ — излучение назад.

Для нерелятивистских частиц оба типа переходного излучения (на резкой границе раздела двух сред и при резком изменении во времени свойств среды) разнятся не только качественно, но и по порядку величины. Так, (2.95) в случае $\mu_1 = \mu_2 = 1$ дает

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta) \approx \frac{q^2 v^4 |\epsilon_2 - \epsilon_1|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{4\pi^2 c^5 \sqrt{\epsilon_2}}; \quad v \ll \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{1,2}}}, \quad (2.96)$$

в то время как для переходного излучения на границе раздела сред в тех же условиях ($\mu_1 = \mu_2 = 1$, $v \ll c/\sqrt{\epsilon_{1,2}}$) из (2.45) получим ($\theta_2 = \theta$)

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^2 \sqrt{\epsilon_2} |\epsilon_2 - \epsilon_1|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\pi^2 c^3 |\epsilon_1 \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2} \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta}|^2}. \quad (2.97)$$

Таким образом, излучение (2.96) при резком изменении во времени диэлектрической проницаемости оказывается более высокого порядка по малому параметру $v \ll c/\sqrt{\epsilon}$. Если же имеется только скачок магнитной проницаемости μ , а $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$; то переходное излучение для резкого изменения свойств среды во времени будет преобладающим. Действительно, из (2.95) получим в этом случае

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^2 |\mu_1 - \mu_2|^2 \sin^2 \theta}{4\pi^2 c^3 \sqrt{\mu_2}}; \quad v \ll \frac{c}{\sqrt{\mu_{1,2}}}, \quad (2.98)$$

тогда как для переходного излучения на границе раздела сред из (2.41) получим ($\theta_2 = \theta$)

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^6 \mu_2^{5/2} |\mu_1 - \mu_2|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\pi^2 c^7 |\sqrt{\mu_2} \cos \theta + \sqrt{\mu_1 - \mu_2 \sin^2 \theta}|^2}. \quad (2.99)$$

Для ультрарелятивистской частицы излучение вперед практически оказывается одинаковым в случае переходного излучения на границе раздела и в случае резкого изменения ϵ во времени. Действительно, из (2.95) в этом случае получаем ($\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\epsilon = 1 - \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2$)

$$W^{\text{tr}}(\omega) =$$

$$= \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \theta^2 \left[\frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \epsilon_1)} - \frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \epsilon_2)} \right]^2 d\theta^2, \quad (2.100)$$

что совпадает с (2.59). Отсюда следует, в частности, что и спектральное распределение интенсивности и полная излученная энергия будут описываться такими же формулами (см. (2.60)–(2.65)).

В излучении ультрарелятивистской частицы назад возникает достаточно резкий максимум в угловом распределении спектральной плотности излучения

$$W^{\text{tr}}(\omega, \pi - \theta') \approx \frac{q^2 \theta'^2 |\epsilon_1(\omega) - \epsilon_2(\omega)|^2}{16\pi^2 c |\theta'^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2 + (1 - \epsilon_1(\omega))|^2}. \quad (2.101)$$

Эта формула выведена в предположении, что $\theta'^2 \ll 1$, $(Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll 1$ и $|1 - \epsilon_1(\omega)| \ll 1$. В случае переходного излучения при резком изменении диэлектрической проницаемости во времени счи-

татъ, что при $t < 0$ среда отсутствовала (был вакуум), кажется весьма искусственным. Наличие слагаемого $(1 - \epsilon_1(\omega))$ в знаменателе (2.101) приводит к тому, что фактически основная энергия излучения приходится на малые частоты, где $(1 - \epsilon_1(\omega))$ не мало. В этой области частот пропадает резкая угловая зависимость и логарифмическая зависимость спектральной плотности излучения от энергии частицы, т. е., так же как и для переходного излучения частицы при вылете из среды (см. (2.456) и (2.69)), максимальные излучаемые частоты будут уже порядка ω_{pe} .

Для переходного излучения ультрарелятивистской частицы при резком изменении ϵ во времени можно записать формулу, аналогичную (2.68) и справедливую для всех углов вне интервала $\theta \leq Mc^2/\mathcal{E}$ (т. е. при $\theta \gg Mc^2/\mathcal{E}$) и при выполнении неравенства (2.66). Получаем ($\mu_1 = \mu_2 = 1$)

$$W^{tr}(\omega, \theta) = \frac{q^2 |\epsilon_2 - \epsilon_1|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{4\pi^2 c \sqrt{\epsilon_2} |1 - \epsilon_1 \cos^2 \theta|^2 |1 - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta|^2}. \quad (2.102)$$

Эта формула описывает, в частности, и излучение назад ($\theta \approx \pi$). В пределе $\theta^2 \ll 1$ из (2.102) получим (2.101), однако, для $Mc^2/\mathcal{E} \rightarrow 0$, что является следствием того, что при выводе (2.102) использовалось неравенство (2.66). Суммарный вклад (2.102) в полную энергию излучения мал. Наибольший вклад дает излучение вперед (2.100).

§ 2.4. Зона формирования переходного излучения.

Переходное излучение на размытой границе раздела сред и при плавном изменении свойств среды во времени

1. Оценка размеров зоны формирования переходного излучения. Выясним, какую роль играет резкость границы раздела сред или резкость изменения свойств среды во времени. Мы будем здесь интересоваться вопросом о том, каков физический критерий «резкости». Начнем с качественных оценок.

Очевидно, чтобы полностью выяснить поставленный вопрос, нужно рассмотреть переходное излучение для нерезкой границы раздела или нерезкого изменения свойств среды во времени. Тогда можно указать точные условия, при соблюдении которых изменения среды можно считать резкими (скачкообразными). При этом, как и для понимания ряда других моментов, существенную роль играет понятие о зоне формирования или о времени формирования переходного излучения. Качественно излучение можно считать таким же, как для резкой границы раздела, если характерная ширина переходного слоя Δz (резкой границе отвечает условие $\Delta z \rightarrow 0$) достаточно мала по сравнению с длиной зоны формирования L_t , а резкость изменения во времени должна соответствовать временам, меньшим времени формирования излучения t_t . Естественно, что $L_t = vt_t$. Понятие о зоне формирования

излучения и о длине этой зоны имеет смысл как в классической, так и в квантовой электродинамике (см. [3, 24, 34, 51]).

Длину формирования можно оценить следующим образом. Необходимо найти ту длину $L = L_f$, на которой полная энергия поля $\mathbf{E}^a + \mathbf{E}^r$ (пропорциональная $(\mathbf{E}^a + \mathbf{E}^r)^2$) станет практически равной сумме энергии поля $\mathbf{E}^a$ (пропорциональной $(\mathbf{E}^a)^2$) и энергии поля излучения $\mathbf{E}^r$ (пропорциональной $(\mathbf{E}^r)^2$), т. е. поле, увлекаемое частицей, и поле излучения будут отделены друг от друга. Другими словами, должен быть малым интерференционный член, пропорциональный $\mathbf{E}^a \mathbf{E}^r$.

Поскольку согласно (2.19) $\mathbf{E}^a \propto \exp(i\omega z/v)$, а согласно (2.20) $\mathbf{E}^r \propto \exp[\pm i(\omega z/c)\sqrt{\epsilon\mu - \kappa^2 c^2/\omega^2}]$, то интерференционный член мал при условии

$$[\omega/v \pm (\omega/c)\sqrt{\epsilon_{1,2}\mu_{1,2} - \kappa^2 c^2/\omega^2}]z \gg 2\pi. \quad (2.103)$$

Точнее, при этом условии интерференционный член быстро осциллирует и мал в среднем по пространству. В силу сказанного, длину L_f можно определить так:

$$L_f = \frac{2\pi}{|\omega/v \pm (\omega/c)\sqrt{\epsilon_{1,2}\mu_{1,2} - \kappa^2 c^2/\omega^2}|}. \quad (2.104)$$

Знаки $\pm$ отвечают зонам формирования соответственно в средах 1 или 2 (частица летит из среды 1 в среду 2).

В случае резкого изменения свойств среды во времени собственное поле заряда пропорционально $\exp(-ikvt)$, тогда как поле излучения пропорционально $\exp(\pm ikct/\sqrt{\epsilon_2\mu_2})$ (см. (2.83), (2.84)) и интерференционный член между ними в выражении для энергии поля становится малым (быстро осциллирует) при

$$|\mathbf{k}\mathbf{v} \pm kc/\sqrt{\epsilon_2\mu_2}|t \gg 2\pi. \quad (2.105)$$

Соответственно полагаем

$$t_f = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}\mathbf{v} \pm kc/\sqrt{\epsilon_2\mu_2}|}. \quad (2.106)$$

Учитывая, что в (2.104) $\kappa^2 c^2/(\omega^2 \epsilon_2 \mu_2) = \sin^2 \theta_2$ и $kc/\sqrt{\epsilon_2 \mu_2} = \omega$, для излучения вперед (т. е. для зоны формирования в среде 2), получим, что

$$L_f = vt_f = \frac{2\pi v}{|\omega - \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \omega (v/c) \cos \theta|} \quad (\theta = \theta_2). \quad (2.107)$$

Для ультрарелятивистской частицы, полагая $\sqrt{\epsilon_2} \approx 1 - \omega_{pe}^2/2\omega^2$, $\mu_2 \approx 1$, $\theta \ll 1$, имеем

$$L_f \approx \frac{4\pi c}{\omega} \frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2}. \quad (2.108)$$

Если считать, что $\theta \sim Mc^2/\mathcal{E}$, то для $\omega \ll \omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$ длина формирования растет с ростом частоты, $L_f \approx 4\pi c\omega/\omega_{pe}^2$, и при частотах

порядка $\omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$, соответствующих максимуму функции $W^{tr}(\omega)\omega$, достигает максимальной величины:

$$L_{t,\max} \approx \frac{2\pi c}{\omega_{pe}} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.109)$$

Несколько другой вывод выражений типа (2.107)–(2.109) см., например, в [3, 24] *).

Как мы видим, величина $L_{t,\max}$ растет пропорционально энергии частицы $\mathcal{E}$. Критерий резкости границы $\Delta z \ll L_t$ для переходного излучения при пролете заряда через границу раздела сред так же, как и критерий резкости скачка диэлектрической проницаемости во времени $\Delta t \ll t_t$, оказывается, следовательно, выполненным тем лучше, чем выше энергия частицы. Практически, для обычных плотностей, отвечающих плотности твердого тела, частота ω_{pe} соответствует значению $\lambda/2\pi = c/\omega_{pe} \approx 10^{-6}$ см и при большой энергии частицы длина L_t будет вполне макроскопической величиной. Так, для примера, при максимальной зафиксированной энергии космических лучей около $\mathcal{E} \approx 10^{20}$ эВ, если эту энергию приписать протону (для чего, впрочем, нет достаточных оснований), получим $L_t \sim 10$ км. Этот пример явно экзотический, но приведен он для того, чтобы подчеркнуть и другую сторону дела. Именно, если речь идет о пластинке конечной толщины, то для образования вполне сформировавшегося переходного излучения необходимо, чтобы ее толщина была не меньше (2.109). Более подробно о переходном излучении в пластинке см. гл. 3, а о роли соответствующих ограничений на возможность появления интенсивного переходного излучения космических лучей на межзвездной пыли см. гл. 7.

Оценка величины зоны формирования позволяет качественно ответить на вопрос о роли пространственной и частотной дисперсии (более подробно о переходном излучении в средах с пространственной дисперсией см. гл. 3). Здесь мы сделаем лишь качественные оценки.

При наличии пространственной дисперсии нельзя, строго говоря, вводить ϵ вблизи границы раздела, так как задача не является пространственно однородной. Это касается, однако, в ряде случаев только некоторой области $\Delta z \equiv 1/k_d$ около границы, где k_d — характерное волновое число, соответствующее размеру, на котором сказывается пространственная дисперсия. Таким обра-

*) В определении размеров зоны формирования L_t имеется, конечно, известная условность. Так, часто в качестве L_t выбирается значение, вдвое меньшее, чем используемое нами. Впрочем, точное значение L_t зависит, в частности, от характера размытости границы (см. ниже пункт 2). Более существенно, что, согласно (2.104), (2.107), длина $L_t \rightarrow 0$, при $v \rightarrow 0$. Вместе с тем понятие о некотором, отличном от нуля размере зоны формирования имеет известный смысл и для неподвижного излучателя — в этом случае (в простейших ситуациях) $L_t \sim 2\pi c/\omega = \lambda$. Мы имеем в виду тот факт, что излучение, скажем, точечного диполя формируется в области порядка λ и не исчезает, если сам диполь помещен в достаточно маленькую вакуумную полость в среде.

зом, в некотором смысле речь идет о «размытии» границы. Критерий малости эффектов пространственной дисперсии, очевидно, будет в этом случае таким:

$$\Delta z_1 \ll L_{f,\max} \approx \frac{2\pi c}{\omega_{pe}} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.110)$$

Точно так же в задаче о переходном излучении при резком изменении диэлектрической проницаемости во времени нельзя строго ввести зависящую от частоты диэлектрическую проницаемость, поскольку задача не является однородной во времени. В результате дисперсии скачок ϵ как бы «размывается» во времени на $\Delta t_d \approx 1/\omega_d$, где ω_d — частота, характеризующая частотную дисперсию. Для ультрарелятивистской частицы ($\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$) и характерной частоты $\omega_d \approx \omega_{\max} \sim \omega_{pe} \mathcal{E}/Mc^2$ (см. (2.52)) критерий малости эффектов частотной дисперсии

$$\Delta t_d \approx \frac{2\pi}{\omega_{pe}} \frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \ll t_f \approx \frac{2\pi}{\omega_{pe}} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}, \quad (2.111)$$

очевидно, хорошо выполняется.

Если через Δz обозначить характерное реальное размытие границы, а через Δt — реальную длительность «скачка» во времени, то в рассмотренных задачах обе величины, Δz_d и Δz или Δt_d и Δt , должны быть соответственно меньше L_f и t_f . Если эти критерии выполнены, то между Δz_d и Δz или Δt_d и Δt могут быть различные соотношения, от которых будет зависеть относительно слабое излучение ультрарелятивистских частиц назад (см. [34] и гл. 3), но не будет зависеть основная энергия излучения, которая приходится на направления, близкие к направлению скорости частицы. Для перерелятивистских же частиц роль дисперсии (т. е. Δz_d и Δt_d) оказывается значительно большей.

2. Переходное излучение на размытой границе раздела сред. Остановимся теперь на вопросе о переходном излучении на размытой границе раздела количественно. Как мы видели, для случая резкой границы основные качественные стороны явления сохраняются и при $\Delta \epsilon \ll \epsilon$. Поэтому для того, чтобы не усложнять изложения, рассмотрим здесь случай прозрачной среды с $\Delta \epsilon \ll \epsilon$, $\mu = 1$ (о точном решении задачи см., например, [52 — 54]).

Итак, будем считать, что

$$\epsilon = \epsilon^{(0)} + \delta \epsilon(z); \quad |\delta \epsilon(z)| \ll \epsilon^{(0)}, \quad (2.112)$$

а также, что величина $\delta \epsilon$ плавно изменяется от значения $-\Delta \epsilon/2$ до значения $+\Delta \epsilon/2$ на расстоянии порядка Δz , причем $\epsilon_2 = \epsilon^{(0)} + \Delta \epsilon/2$, а $\epsilon_1 = \epsilon^{(0)} - \Delta \epsilon/2$. В качестве примера можно иметь в виду следующие конкретные выражения для $\delta \epsilon(z)$:

$$\delta \epsilon(z) = \frac{\Delta \epsilon}{2} \operatorname{th} \frac{z}{\Delta z}. \quad (2.113)$$

или

$$\delta \varepsilon(z) = \frac{\Delta \varepsilon}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{z}{\Delta z}. \quad (2.114)$$

Учитывая малость $\delta \varepsilon(z)$, можно поле $E_{\omega, \kappa}(z)$ (см. (2.12)) записать в виде

$$E_{\omega, \kappa}(z) = E_{\omega, \kappa}^{(0)}(z) + \delta E_{\omega, \kappa}(z) \quad (2.115)$$

и считать, что $|\delta E_{\omega, \kappa}(z)| \ll |E_{\omega, \kappa}^{(0)}(z)|^*$. Продольная (по отношению к v) компонента поля $E_{\omega, \kappa}$, обозначаемая просто через $E_{\omega, \kappa}$, также может быть записана в виде (2.115). Поле $E_{\omega, \kappa}^{(0)}$ описывается уравнением (2.17) для однородной среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon^{(0)} E_{\omega, \kappa}^{(0)}(z) + \varepsilon^{(0)} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(0)} - \kappa^2 \right) E_{\omega, \kappa}^{(0)}(z) = \\ = - \frac{4\pi i \omega q}{c^2 (2\pi)^3} \left(\varepsilon^{(0)} - \frac{c^2}{v^2} \right) \exp \frac{i \omega z}{v}, \end{aligned} \quad (2.116)$$

а уравнение для $\delta E_{\omega, \kappa}$ получится, если в уравнениях (2.15), (2.16) и (2.24) учесть члены первого порядка по $\delta \varepsilon(z)$ и $\delta E_{\omega, \kappa}(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon^{(0)} \delta E_{\omega, \kappa}(z) + \varepsilon^{(0)} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(0)} - \kappa^2 \right) \delta E_{\omega, \kappa}(z) = \\ = - \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - i \frac{\partial}{\partial z} \frac{\kappa^2 c^2}{v \omega (\varepsilon^{(0)} - c^2/v^2)} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(0)} \right] \delta \varepsilon(z) E_{\omega, \kappa}^{(0)}(z). \end{aligned} \quad (2.117)$$

В качестве решения (2.116) естественно выбрать решение (2.19) для собственного поля заряда в однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{(0)}$ (поле излучения в однородной среде мы считаем отсутствующим)

$$E_{\omega, \kappa}^{(0)} = E_{\omega, \kappa}^{(0)q} = - \frac{4\pi i q (1 - c^2/v^2 \varepsilon^{(0)}) \exp(i \omega z/v)}{\omega (2\pi)^3 (\varepsilon^{(0)} - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)}. \quad (2.118)$$

Это решение нужно подставить в правую часть (2.117). Для нахождения решения уравнения (2.117) удобно разложить $\delta \varepsilon(z)$ по плоским «волнам»:

$$\delta \varepsilon(z) = \int \delta \varepsilon_{\eta} \exp(i \eta z) d\eta. \quad (2.119)$$

Заметим, что для конкретных выражений (2.113), (2.114) величины $\delta \varepsilon_{\eta}$ имеют соответственно вид

$$\delta \varepsilon_{\eta} = \frac{\Delta \varepsilon}{4i} \frac{\Delta z}{\operatorname{sh}(\pi \eta \Delta z/2)} \quad (2.120)$$

и

$$\delta \varepsilon_{\eta} = \frac{\Delta \varepsilon}{2\pi i \eta} \exp(-|\eta| \Delta z). \quad (2.121)$$

* О методе возмущений в теории переходного излучения см. также [218].

Тогда уравнение (2.117) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta E_{\omega, \kappa}(z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(0)} - \kappa^2 \right) \delta E_{\omega, \kappa}(z) = \int G_{\omega, \kappa, \eta} \exp \left[i \left(\eta + \frac{\omega}{v} \right) z \right] d\eta, \quad (2.122)$$

где

$$G_{\omega, \kappa, \eta} = \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(0)} + \left(\eta + \frac{\omega}{v} \right) \frac{\kappa^2 c^2}{v\omega (\varepsilon^{(0)} - c^2/v^2)} - \left(\eta + \frac{\omega}{v} \right)^2 \right] \times \\ \times \frac{4\pi i q (1 - c^2/v^2 \varepsilon^{(0)}) \delta \varepsilon_{\eta}}{(2\pi)^3 \omega \varepsilon^{(0)} (\varepsilon^{(0)} - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)}. \quad (2.123)$$

Уравнение (2.122) отличается от (2.116) тем, что в правой части имеется как бы непрерывное распределение зарядов вдоль z . Другими словами, в неоднородном слое возникает неоднородная поляризация. В некотором отношении решение уравнения (2.122) даже проще, чем уравнения (2.17) с последующей сшивкой решений. Формально и фактически речь идет в данном случае о нахождении поля $\delta E_{\omega, \kappa}$, источником которого являются токи, описываемые правой частью (2.122) (точнее, правая часть (2.122) может быть выражена через эти токи). Поэтому для решения (2.122) нужно учесть, что функция Грина его левой части должна быть запаздывающей (описывать запаздывающие поля):

$$\delta E_{\omega, \kappa} = \int \frac{G_{\omega, \kappa, \eta} \exp [i (\eta + \omega/v) z]}{\omega^2 \varepsilon^{(0)}/c^2 - \kappa^2 - (\eta + \omega/v)^2} d\eta. \quad (2.124)$$

Для получения запаздывающих полей нужно соответствующим образом обойти полюс в подынтегральном выражении (2.124).

Если выбрать $\delta \varepsilon(z)$ в форме (2.113), то формула (2.124) примет вид

$$\delta E_{\omega, \kappa}(z) = \frac{q \Delta \varepsilon \Delta z (\varepsilon^{(0)} - c^2/v^2)}{8\pi^2 \varepsilon^{(0)2} \omega (\varepsilon^{(0)} - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp [i (\eta + \omega/v) z]}{[\varepsilon^{(0)} - (\eta + \omega/v)^2 c^2/\omega^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2] \operatorname{sh} [(\pi/2) \eta \Delta z]} \times \\ \times \left[\varepsilon^{(0)} - \frac{c^2}{\omega^2} \left(\eta + \frac{\omega}{v} \right)^2 + \kappa^2 c^4 \left(\eta + \frac{\omega}{v} \right) \frac{1}{v\omega^3 (\varepsilon^{(0)} - c^2/v^2)} \right] d\eta. \quad (2.125)$$

Это выражение выписано нами для того, чтобы проиллюстрировать особенность подынтегрального выражения при $\eta \rightarrow 0$ (пропорциональность подынтегрального выражения $1/\eta$). Эта особенность связана с разложением (2.119) для $\delta \varepsilon(z)$ (см. (2.120), (2.121)) и носит общий характер. Действительно, для того чтобы имело место изменение $\delta \varepsilon$ от $-\Delta \varepsilon/2$ до $+\Delta \varepsilon/2$ в разложении $\delta \varepsilon(z)$, должна существовать компонента, пропорциональная $1/\eta$.

Выражение (2.125) содержит полное поле, которое при $|z| \rightarrow \infty$ состоит из собственного поля (точнее, изменения собствен-

ного поля) $\delta E_{\omega, \kappa}^q$ и поля излучения $E_{\omega, \kappa}^r$. Вблизи границы (в пределах размытой переходной зоны) собственное поле и поле излучения, вообще говоря, разделить нельзя. Удобнее всего выделить различные части из поля $\delta E_{\omega, \kappa}$ (2.125), замыкая путь интегрирования по η в комплексной полуплоскости. При этом надо иметь в виду, что особенность $1/\eta$ должна быть вычислена (как это следует из разложения (2.119)) в смысле главного значения. Соответствующие контуры для $z > 0$ и $z < 0$ изображены на рис. 5. Функция, стоящая под интегралом (2.125), хорошо сходится на больших полуокружностях контуров, т. е. интеграл

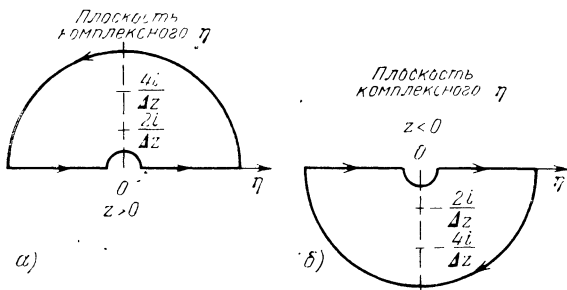


Рис. 5. Контуры интегрирования в комплексной плоскости η .

(2.125) вычисляется при помощи вычетов. Собственное поле $\delta E_{\omega, \kappa}^q$ (его изменение из-за $\delta \epsilon(z)$) получится из части интеграла, возникающей от обхода по малой окружности около $\eta = 0$. В результате получаем

$$\delta E_{\omega, \kappa}^q(z) = \frac{z}{|z|} \frac{4\pi i q \Delta \epsilon \exp(i\omega z/v)}{2\omega (\epsilon^{(0)})^2 (2\pi)^3} \frac{(\epsilon^{(0)} - c^2/v^2)^2 + \kappa^2 c^4/v^2 \omega^2}{[\epsilon^{(0)} - c^2/v^2 + \kappa^2 c^2/\omega^2]^2}. \quad (2.126)$$

Суммарное собственное поле частицы складывается из $E_{\omega, \kappa}^{(0)q}(z)$ (см. (2.118)) и $\delta E_{\omega, \kappa}^q(z)$, т. е. $E_{\omega, \kappa}^q(z) = E_{\omega, \kappa}^{(0)q}(z) + \delta E_{\omega, \kappa}^q(z)$. Легко видеть, что этот результат (формула (2.126)) можно получить и из общего выражения для $E_{\omega, \kappa}^q(z)$ (формула (2.19)), положив в (2.19) $\epsilon = \epsilon^{(0)} \pm \Delta \epsilon/2$ и разложив (2.19) по малой величине $\Delta \epsilon$.

Поле излучения $E_{\omega, \kappa}^r(z)$, уходящее на $z = \pm \infty$, можно выделить из (2.125), если учесть вклад полюсов функции Грина (нуль знаменателя (2.125))

$$\eta = -\frac{\omega}{v} \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2/\omega^2}. \quad (2.127)$$

При этом, как говорилось, нужно учесть требование причинности, т. е. запаздывающий характер функции Грина. Это нетрудно сделать, если считать, что $\epsilon^{(0)}$ содержит бесконечно малую, мнимую, нечетную по ω часть. Тогда в верхней полуплоскости η будет лежать полюс, соответствующий знаку плюс в (2.127),

а в нижней — знаку минус в (2.127). Это значит, что при $z > 0$ поле излучения пропорционально $\exp(i\omega z \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2} / c)$, а при $z < 0$ — соответственно пропорционально $\exp(-i\omega z \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2} / c)$ (ср. (2.20)). Так же, как и в (2.20), эти поля описывают волны, распространяющиеся от границы. Поле излучения $E_{\omega, \kappa}^r(z)$, получаемое таким путем из (2.125), может быть выражено через введенные выше амплитуды a_1 и a_2 (см. (2.20)). Для амплитуды излучения вперед a_2 получаем

$$a_2 = \frac{\pi \Delta \epsilon \Delta z \kappa^2 c^2 / \omega^2}{4c (\epsilon^{(0)})^2 \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2} (1 - \epsilon^{(0)} v^2 / c^2 + \kappa^2 v^2 / \omega^2)} \times \\ \times \frac{1 - (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \epsilon^{(0)} v^2 / c^2}{\text{sh} \{ \pi \Delta z \omega [1 - (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2}] / 2v \}}, \quad (2.128)$$

а для амплитуды излучения назад имеем

$$a_1 = - \frac{\pi \Delta \epsilon \Delta z \kappa^2 c^2 / \omega^2}{4c (\epsilon^{(0)})^2 \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2} (1 - \epsilon^{(0)} v^2 / c^2 + \kappa^2 v^2 / \omega^2)} \times \\ \times \frac{1 + (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \epsilon^{(0)} v^2 / c^2}{\text{sh} \{ \pi \Delta z \omega [1 + (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2}] / 2v \}}. \quad (2.129)$$

Эти выражения можно сравнить с теми, которые получаются из точных выражений (2.27), (2.28) для резкой границы при $\Delta \epsilon \ll \epsilon^{(0)}$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$:

$$a_2 = \frac{v}{2c} \frac{\kappa^2 c^2 \Delta \epsilon [1 - (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \epsilon^{(0)} v^2 / c^2]}{\omega^2 (\epsilon^{(0)})^2 \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2}} \times \\ \times \left\{ (1 - \epsilon^{(0)} v^2 / c^2 + \kappa^2 v^2 / \omega^2) [1 - (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2}] \right\}^{-1}, \quad (2.130)$$

$$a_1 = - \frac{v}{2c} \frac{\kappa^2 c^2 \Delta \epsilon [1 + (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \epsilon^{(0)} v^2 / c^2]}{\omega^2 (\epsilon^{(0)})^2 \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2}} \times \\ \times \left\{ (1 - \epsilon^{(0)} v^2 / c^2 + \kappa^2 v^2 / \omega^2) [1 + (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2}] \right\}^{-1}. \quad (2.131)$$

При сопоставлении (2.128), (2.129) с (2.130), (2.131) нужно учесть, что $\Delta \epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$. Тогда, считая аргумент $\text{sh} \{ \pi \Delta z \omega [1 \mp (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2}] / 2v \}$ малым и учтя лишь линейный член разложения, убеждаемся в совпадении (2.128), (2.129) с (2.130), (2.131). Из этого сравнения следует, что резкой границу можно считать при выполнении неравенства

$$\Delta z \ll \frac{L_f}{\pi^2} = \frac{2v}{\pi \omega [1 \mp (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2}]}, \quad (2.132)$$

где L_f — длина зоны формирования излучения (2.104). Численный множитель π^2 в данном случае заметно меняет количественные оценки влияния нерезкости границы.

Амплитуды a_2 и a_1 можно найти для произвольных $\delta\epsilon_\eta$. Тогда в a_2 войдет $\delta\epsilon_\eta$ при $\eta = -(\omega/v)(1 - \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2/\omega^2} v/c)$, а в a_1 соответственно $\delta\epsilon_\eta$ при $\eta = -(\omega/v)(1 + \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2/\omega^2} v/c)$. Используя общую связь между энергией переходного излучения вперед $W_2^{\text{tr}} = W_2^{\text{r}}$ и амплитудой a_2 , получаем

$$W_2^{\text{tr}}(\omega, \theta_2) = \frac{q^2 \omega^2 \left[1 - \epsilon^{(0)} v^2/c^2 - (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)}} \cos \theta_2 \right]^2 \sin^2 \theta_2}{\epsilon^{(0)} \sqrt{\epsilon^{(0)}} c^3 \left[1 - (\epsilon^{(0)} v^2/c^2) \cos^2 \theta_2 \right]^2} \times \\ \times |\delta\epsilon_\eta|^2 \Big|_{\eta = -(\omega/v) [1 - (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)}} \cos \theta_2]}. \quad (2.133)$$

Аналогичным путем найдем спектральную плотность переходного излучения назад:

$$W_1^{\text{tr}}(\omega, \theta_1) = \frac{q^2 \omega^2 \left[1 - \epsilon^{(0)} v^2/c^2 + (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)}} \cos \theta_1 \right]^2 \sin^2 \theta_1}{\epsilon^{(0)} \sqrt{\epsilon^{(0)}} c^3 \left[1 - (\epsilon^{(0)} v^2/c^2) \cos^2 \theta_1 \right]^2} \times \\ \times |\delta\epsilon_\eta|^2 \Big|_{\eta = -(\omega/v) [1 + (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)}} \cos \theta_1]}. \quad (2.134)$$

Эти выражения справедливы для любых изменений диэлектрической проницаемости, как плавных, так и резких, при условии $\delta\epsilon \ll \epsilon^{(0)}$ и в этом отношении обобщают выражения (2.130), (2.131), справедливые только для резких скачков ϵ . С помощью (2.133), (2.134) можно описывать переходное излучение в любых слабо неоднородных средах при условии, что при $z \rightarrow \pm\infty$ среда становится однородной. Последнее условие возникает из требования, чтобы можно было пренебречь всеми полями, локализованными вблизи переходного слоя. Для конкретного $\delta\epsilon$ в форме (2.113) эти поля вблизи переходного слоя определяются вычетами (2.125) в полюсах

$$\eta = \frac{2in}{\Delta z}; \quad \begin{aligned} n = 1, 2, \dots; & \quad z > 0, \\ n = -1, -2, \dots; & \quad z < 0. \end{aligned} \quad (2.135)$$

В результате имеем

$$\delta E_{\omega, \kappa}(z) = \frac{qi \Delta\epsilon}{2\pi^2 \omega} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\exp(i\omega z/v - 2n|z|/\Delta z)}{\epsilon^{(0)} - \epsilon^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} \times \\ \times \{ (\epsilon^{(0)} - c^2/v^2) [\epsilon^{(0)} - (c/v + 2inzc/\omega |z| \Delta z)^2] + \\ + (\kappa^2 c^2/\omega^2) (c/v + 2inzc/\omega |z| \Delta z) (c/v) \} \times \\ \times [\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2/\omega^2 - (c/v + 2inzc/\omega |z| \Delta z)^2]^{-1}. \quad (2.136)$$

Эти поля экспоненциально убывают от границы в обе стороны и не вносят (при $z \rightarrow \pm\infty$) вклада ни в изменение собственного поля $\delta E_{\omega, \kappa}^{\text{q}}$, ни в поле излучения $\delta E_{\omega, \kappa}^{\text{r}}$. Однако они могут

совершать работу над частицей, даже в отсутствие излучения*). Что касается самого излучения, то, как отмечалось, для (2.113) оно совпадает с излучением для резкой границы, только если выполнено неравенство (2.132). Если же выполнено противоположное неравенство, т. е. ширина переходного слоя много больше L_t/π^2 (для зависимости (2.113)), то излучение становится экспоненциально малым:

$$W_2^{\text{tr}}(\omega, \theta_2) = \frac{q^2 (\Delta\epsilon)^2 (\Delta z)^2 \omega^2 \sin^2 \theta_2 \exp(-2\pi^2 \Delta z/L_t)}{4c^3 \epsilon^{(0)} \sqrt{\epsilon^{(0)}} [1 - (v^2/c^2) \epsilon^{(0)} \cos^2 \theta_2]^2} \times \\ \times \left| 1 - (v^2/c^2) \epsilon^{(0)} - (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)}} \cos \theta_2 \right|^2, \quad (2.137)$$

В данном случае спектр излучения будет иметь вид $\propto \omega^2 \exp(-\text{const} \cdot \omega)$ (так как $L_t \propto 1/\omega$; см. (2.104)). Численный коэффициент $2\pi^2$ в (2.137), хотя и полученный для конкретного вида (2.113) для $\delta\epsilon$, указывает на то, что в ряде случаев обрезание интенсивности излучения возникает на существенно меньших частотах, нежели те, которые получаются из оценок по порядку величины с использованием размеров зоны формирования (2.104).

3. Интегральное излучение ультрарелятивистских частиц на размытой границе раздела сред. Несмотря на то, что в спектральной интенсивности переходного излучения на размытой границе возникает экспоненциальный «завал» при частотах и углах, соответствующих тому, что L_t меньше, чем ширина переходной зоны Δz (с учетом численных множителей, о которых шла речь), интегральная (по углам и частотам) энергия переходного излучения падает с ростом Δz не экспоненциально. Это особенно отчетливо видно для нерелятивистских частиц, когда

$$L_t \approx 2\pi v/\omega. \quad (2.138)$$

Из (2.137) при $v \ll c/\sqrt{\epsilon^{(0)}}$ получаем

$$W_2^{\text{tr}}(\omega, \theta_2) = \frac{q^2 (\Delta\epsilon)^2 \omega^2 (\Delta z)^2 \sin^2 \theta_2}{4c^3 \epsilon^{(0)} \sqrt{\epsilon^{(0)}}} \exp\left(-\frac{\pi \Delta z \omega}{v}\right). \quad (2.139)$$

Следовательно,

$$W_2^{\text{tr}} = \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} W_2^{\text{tr}}(\omega, \theta_2) 2\pi \sin \theta_2 d\theta_2 = \frac{q^2}{3\pi^2} \frac{v^3}{c^3} \frac{(\Delta\epsilon)^2}{\epsilon^{(0)} \sqrt{\epsilon^{(0)}}} \frac{1}{\Delta z}. \quad (2.140)$$

*) К полям, локализованным в области переходного слоя, нужно отнести также те, которые возникают от полюсов (2.127) при $x^2 c^2/\omega^2 > \epsilon^{(0)}$, так как они экспоненциально убывают от границы и отчасти связаны с поверхностными волнами (см. § 3.1).

Для ультрарелятивистских частиц при увеличении Δz в первую очередь исчезает основной максимум излучения вперед, возникающий под малыми углами $\theta \approx \theta_2 \ll 1$ и в области больших частот $\omega \sim \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$. Исчезновение этого максимума обязано тому, что размер зоны формирования излучения (2.108) в данном случае убывает от своего максимального значения (2.109), достигаемого при $\omega \sim \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$, как при увеличении частоты ($\omega > \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$), так и при уменьшении частоты ($\omega < \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$). Поэтому размытость границы (конечное Δz) обрезает спектр излучения как со стороны больших частот ($\omega > \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$), так и со стороны малых частот ($\omega < \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$). Таким образом, если Δz оказывается больше максимальной длины $L_{l, \max}$ (см. (2.109)), то происходит экспоненциальный завал полной интенсивности в максимуме, приходящемся для излучения ультрарелятивистской частицы на малые углы и высокие частоты.

Покажем количественно, как это происходит. Используя неравенства $\mathcal{E} / Mc^2 \gg 1$, $\theta_2^2 \ll 1$, $1 - \varepsilon^{(0)} \approx \omega_{pe}^2 / \omega^2 \ll 1$, из выражения (2.133) получаем для функции $\delta \varepsilon$, описываемой формулами (2.114), (2.121):

$$W_2^{\text{tr}}(\omega) = \int_0^\infty W_2^{\text{tr}}(\omega, \theta_2) \pi d\theta_2^2 = \frac{q^2 |\Delta N|^2 \omega_{pe}^4}{\pi c N_0^2 \omega^4} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\theta_2^2 \exp \left[-(\omega \Delta z / 2c) \left((Mc^2 / \mathcal{E})^2 + \theta_2^2 + \omega_{pe}^2 / \omega^2 \right) \right]}{\left[(Mc^2 / \mathcal{E})^2 + \theta_2^2 + \omega_{pe}^2 / \omega^2 \right]^4} d\theta_2^2. \quad (2.141)$$

Интегрирование по углу дает

$$W_2^{\text{tr}}(\omega) = \frac{q^2 |\Delta N|^2 \omega_{pe}^4}{6\pi c \omega^4 N_0^2} \frac{1}{\left[(Mc^2 / \mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2 / \omega^2 \right]^2} \times \\ \times \Phi \left(\frac{\omega \Delta z}{2c} \left(\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \right), \quad (2.142)$$

$$\Phi(x) = (1 - 2x - x^2) \exp(-x) - (3x^2 + x^3) \text{Ei}(-x). \quad (2.143)$$

Для резкой границы $\Delta z \rightarrow 0$; $\Phi(x) \rightarrow 1$ и (2.142) совпадает с (2.60). Если же

$$\Delta z \gg \frac{c}{\omega_{pe}} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}, \quad (2.144)$$

то $x \gg 1$ и $\Phi(x) \approx x e^{-x}$. Интегральная интенсивность, получающаяся из (2.142), такова:

$$W_2^{\text{tr}} = \int_0^\infty W_2^{\text{tr}}(\omega) d\omega = \frac{q^2 \omega_{pe} (\Delta N)^2}{12c N_0^2} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \sqrt{\frac{\Delta z}{L_{l, \max}}} \exp \left(-\frac{2\pi \Delta z}{L_{l, \max}} \right), \quad (2.145)$$

где $L_{l, \max} = (2\pi c / \omega_{pe}) \mathcal{E} / Mc^2$.

Для остального излучения ультрарелятивистской частицы вне пределов основного максимума (т. е. при $\theta^2 \gg (Mc^2/\mathcal{E})^2$) получаем

$$W^{\text{tr}} = \int_0^\infty W^{\text{tr}}(\omega) d\omega = \frac{q^2 (\Delta\epsilon)^2}{4\pi^2 c (\epsilon^{(0)})^{3/2}} \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi 2\pi \sin^3 \theta \times \\ \times \frac{(1 - \epsilon^{(0)} - \sqrt{\epsilon^{(0)}} \cos \theta)^2 \exp \left[-(\omega \Delta z / c) |1 - \sqrt{\epsilon^{(0)}} \cos \theta| \right]}{(1 - \epsilon^{(0)} \cos^2 \theta)^2 (1 - \sqrt{\epsilon^{(0)}} \cos \theta)^2}. \quad (2.146)$$

При $\Delta z \rightarrow 0$ это выражение переходит в (2.68). Фактически в данном случае излучаются достаточно низкие частоты и обычно $\epsilon^{(0)}$ уже не близко к единице. Если $\epsilon^{(0)}$ не сильно зависит от ω (область частот вдали от линий), то обрезания частотного спектра со стороны малых частот не происходит и, следовательно, максимальная излучаемая частота примерно обратно пропорциональна Δz , т. е. суммарная энергия излучения падает как $1/\Delta z$. Самым важным здесь является то, что при выполнении неравенства (2.144) исчезает основной максимум и перестают излучаться высокие частоты.

4. Переходное излучение при плавном изменении диэлектрической проницаемости во времени. Рассмотрим теперь аналогичную задачу о переходном излучении заряда, когда диэлектрическая проницаемость изменяется только во времени и при этом ее относительное изменение мало:

$$\epsilon = \epsilon^{(0)} + \delta\epsilon(t); \quad |\delta\epsilon(t)| \ll \epsilon^{(0)}. \quad (2.147)$$

В уравнении (2.81), справедливом при произвольных изменениях ϵ во времени, используем (2.147) и положим $\mu = 1$ и

$$E_{\mathbf{k}}(t) = E_{\mathbf{k}}^{(0)}(t) + \delta E_{\mathbf{k}}(t); \quad |\delta E_{\mathbf{k}}(t)| \ll |E_{\mathbf{k}}^{(0)}(t)|. \quad (2.148)$$

Тогда из (2.81) получаем в первом приближении

$$k^2 E_{\mathbf{k}}^{(0)}(t) + \frac{\epsilon^{(0)}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_{\mathbf{k}}^{(0)}(t) = \frac{4\pi i q v(\mathbf{k}v) \exp(-i\mathbf{k}v t)}{c^2 (2\pi)^3}, \quad (2.149)$$

$$k^2 \delta E_{\mathbf{k}}(t) + \frac{\epsilon^{(0)}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta E_{\mathbf{k}}(t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\epsilon(t) E_{\mathbf{k}}^{(0)}(t). \quad (2.150)$$

Будем считать, что в отсутствие изменений ϵ (при $\epsilon = \epsilon^{(0)}$) поле излучения отсутствует, т. е. решение (2.149) таково:

$$E_{\mathbf{k}}^{(0)}(t) = \frac{4\pi i q(\mathbf{k}v) v \exp(-i\mathbf{k}v t)}{c^2 (2\pi)^3 [k^2 - \epsilon(\mathbf{k}v)^2/c^2]}. \quad (2.151)$$

Записав

$$\delta\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\epsilon_\sigma \exp(-i\sigma t) d\sigma, \quad (2.152)$$

вновь воспользуемся принципом причинности для получения запаздывающего решения уравнения (2.150):

$$\delta E_{\mathbf{k}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_{\mathbf{k},\sigma} \exp[-i(\sigma + \mathbf{k}\mathbf{v})t] d\sigma}{k^2 - \varepsilon^{(0)}(\sigma + \mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2}, \quad (2.153)$$

где

$$G_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{(\sigma + \mathbf{k}\mathbf{v})^2 4\pi i q v (\mathbf{k}\mathbf{v}) \delta\varepsilon_{\sigma}}{(2\pi)^3 c^4 [k^2 - \varepsilon^{(0)}(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2]}. \quad (2.154)$$

Если

$$\delta\varepsilon(t) = \frac{\Delta\varepsilon}{2} \operatorname{th} \frac{t}{\Delta t}, \quad (2.155)$$

т. е.

$$\delta\varepsilon_{\sigma} = \frac{\Delta\varepsilon}{4i} \frac{\Delta t}{\operatorname{sh}(\pi\sigma \Delta t/2)}, \quad (2.156)$$

расчеты поля $\delta E_{\mathbf{k}}(t)$ аналогичны тем, которые были проделаны для размытой границы раздела сред. Интеграл по σ замыкаем в комплексной плоскости. Обход особенности около $\sigma \rightarrow 0$ дает изменение собственного поля частицы. Возникают также поля, затухающие экспоненциально во времени (времени $t=0$ соответствует $\delta\varepsilon=0$; см. (2.155)). Полюсы

$$\sigma + \mathbf{k}\mathbf{v} = \pm kc/\sqrt{\varepsilon^{(0)}} \quad (2.157)$$

дают поле излучения; при этом из требования причинности (запаздывающее решение) видим, что оба полюса возникают при $t > 0$. В данном случае излучаются две волны в обе стороны.

Используя обозначения, введенные для амплитуды излучения формулой (2.84), из (2.153), (2.154) получаем

$$a_{+} = - \frac{i\pi v (\mathbf{k}\mathbf{v})}{\varepsilon^{(0)} \sqrt{\varepsilon^{(0)}} c [1 - \varepsilon^{(0)}(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/k^2 c^2]} \delta\varepsilon_{\sigma} \Big|_{\sigma = -\mathbf{k}\mathbf{v} + kc/\sqrt{\varepsilon^{(0)}}}. \quad (2.158)$$

В пределе резкого скачка, когда $\delta\varepsilon_{\sigma} = \Delta\varepsilon/(2\pi i\sigma)$, выражение (2.158) совпадает с (2.93) при $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon^{(0)}$. Интенсивность излучения в общем случае имеет вид

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^4 k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{c^3 (\varepsilon^{(0)})^{3/2} |1 - \varepsilon^{(0)}(v^2/c^2) \cos^2 \theta|^2} \times \\ \times |\delta\varepsilon_{\sigma}|^2 \Big|_{\sigma = kc(1 - \sqrt{\varepsilon^{(0)}}(v/c) \cos \theta) / \sqrt{\varepsilon^{(0)}}}. \quad (2.159)$$

Для конкретного вида $\delta\varepsilon(t)$, описываемого соотношением (2.155), имеем

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^4 (\Delta t)^2 (\Delta\varepsilon)^2 k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{16c^3 (\varepsilon^{(0)})^{3/2} [1 - \varepsilon^{(0)}(v^2/c^2) \cos^2 \theta]^2 \operatorname{sh}^2(\pi^2 \Delta t/t_f)}, \quad (2.160)$$

где t_f — время формирования излучения, определяемое формулой (2.106):

$$t_f = \frac{2\pi \sqrt{\varepsilon^{(0)}}}{kc [1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon^{(0)}} \cos \theta]}. \quad (2.161)$$

Экспоненциальный обрыв в спектре излучения возникает при $\Delta t \gg t_f/\pi^2$.

§ 2.5. Энергетический баланс в переходном излучении.

Работа сил. Перенормировка собственной энергии (массы)

1. Баланс энергии и макроскопическая перенормировка энергии собственного поля. Анализ вопроса о времени и длине формирования переходного излучения важен и для выяснения энергетического баланса при переходном излучении, который не является тривиальным. Такой баланс целесообразно подвести для энергии частицы и других величин (энергии поля, излученной энергии, работы поля над зарядом), отвечающих расстояниям, превосходящим как длину формирования излучения, так и ширину переходной зоны (если последняя больше длины зоны формирования излучения). При этом, говоря о работе поля над зарядом, мы, естественно, имеем в виду полную работу на всей длине, включающей как зону формирования, так и переходную зону, т. е. на той длине, на которой интеграл по пути заряда перестает зависеть от его местоположения.

На первый взгляд можно было бы думать, что излученная энергия будет равна работе, совершаемой полем над зарядом*). Такой вывод, однако, ошибочен. Работа поля над зарядом может иметь даже другой порядок величины по сравнению с излученной энергией или иметь другой знак (в последнем случае, если скорость заряда не поддерживается постоянной внешним источником, заряд будет, излучая, ускоряться). Объясняется это изменением энергии собственного поля заряда (макроскопическая перенормировка энергии или массы [55]). На то, что электромагнитная масса заряда в среде отличается от ее значения в вакууме, было обращено внимание в работе [56], правда, вне всякой связи с переходным излучением (в [56] этот вопрос рассматривался в общем случае для сред с пространственной дисперсией). В [19] проблема перенормировки массы обсуждалась уже в применении к задаче о пересечении зарядом границы раздела двух сред. При этом, однако, подсчитывался поток электромагнитной энергии, переносимый собственным полем частицы, т. е. фактически рассматривалось изменение импульса, а не энергии. В общем случае по изменению импульса нельзя найти изменение

*) Кстати, при рассмотрении работы сил над зарядом скорость его можно считать постоянной (как подчеркивалось, заряд может иметь бесконечно большую массу или изменение его скорости может быть скомпенсировано дополнительными силами). Это, конечно, не противоречит тому, что над зарядом совершается работа.

энергии, так как часть импульса передается границе (о перенормировке импульса при переходном излучении см. § 2.6). К тому же сама проблема изменения импульса электромагнитного поля в среде достаточно сложна (см. [1], гл. 13) и требует отдельного рассмотрения.

Решить задачу о макроскопической перенормировке массы и связать ее с переходным излучением удалось в [55], используя метод функций Грина в среде. Выполнение полного баланса энергии при переходном излучении с учетом энергии макроскопической перенормировки массы было доказано лишь в [40], причем перенормировка энергии подсчитывалась просто как разность энергий собственного поля частицы в двух средах. Здесь мы будем следовать методу расчета перенормировки энергии, использованному в [40].

2. Работа поля излучения над зарядом. Работа над зарядом совершается собственным полем и полем излучения (свободным полем) на длинах, меньших или порядка размера зоны формирования переходного излучения, т. е. до того, как поле излучения и поле заряда разделятся. Работа поля при этом не равна излученной энергии. Мы начнем с рассмотрения случая резкой границы раздела сред или резкого изменения свойств среды во времени. Работа W^t полного поля с учетом того, что скорость v заряда q является заданной, определяется так ($E = E^r + E^q$):

$$\frac{dW^t}{dt} = q\mathbf{v}\mathbf{E}|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t}; \quad W^t = q \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}\mathbf{E}|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t} dt. \quad (2.162)$$

Работа свободного поля определяется E^r , а собственного — E^q .

В случае переходного излучения при резком изменении диэлектрической проницаемости (или μ) во времени интеграл по времени в (2.162) для свободного поля распространен на интервал $t > 0$, так как $E^r \neq 0$ только при $t > 0$. Для переходного излучения на границе сред при $t < 0$ работу совершает поле излучения назад, а при $t > 0$ — поле излучения вперед.

Используя выражение (2.20) на границе раздела сред, получим для работы свободного поля (работу собственного поля не учитываем)

$$W^t = \frac{q^2 v}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{a_2}{1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - x^2 c^2 / \omega^2}} - \frac{a_1}{1 + (v/c) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - x^2 c^2 / \omega^2}} \right\} dx^2. \quad (2.163)$$

Уже выражение (2.163) указывает на существенное отличие работы сил над зарядом от энергии переходного излучения, пропорциональной $|a|^2$, а не первой степени a , как в (2.163). Знак

амплитуды поля излучения a зависит от знака скачков ϵ и μ , т. е. от $\epsilon_2 - \epsilon_1$ и $\mu_2 - \mu_1$ (см. (2.27), (2.28)), и, следовательно, знак работы сил зависит от знаков $\epsilon_2 - \epsilon_1$ и $\mu_2 - \mu_1$. Вместе с тем, знак энергии излучения от этих знаков не зависит (энергия излучения всегда положительна). Легко видеть, что различие состоит не только в этом: различаются зависимости от скорости v , угла θ и т. п. Наконец, в энергию излучения вдали от границы вклад вносят только распространяющиеся волны $\kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon_2 \mu_2$, $\kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon_1 \mu_1$, тогда как в работу сил вносят вклад и поля, локализованные у границы (условия $\kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_2 \mu_2$, $\kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_1 \mu_1$). Физически это совершенно ясно. Например, излучив в среде 1 волну, которая не может распространяться в среде 2 (волна полностью отражается), частица, двигаясь в среде 2, будет тем не менее испытывать силу со стороны этой волны, которая проникает в среду 2 на расстояние порядка длины волны. Описанная картина соответствует $\kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon_1 \mu_1$, но $\kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_2 \mu_2$, причем в работу сил в (2.163) вносит вклад как первый, так и второй член. Точно так же возможно полное внутреннее отражение от среды 1, что соответствует выполнению неравенств $\kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_1 \mu_1$, $\kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon_2 \mu_2$. Наконец, в условиях $\kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_1 \mu_1$, $\kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_2 \mu_2$ поля локализованы у границы и (2.163) может соответствовать работе излученных частицей поверхностных волн. Для ультрарелятивистской частицы большая часть энергии излучения и работы приходится на распространяющиеся объемные волны $\kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon_1 \mu_1$, $\epsilon_2 \mu_2$ в области прозрачности. Нашей задачей будет показать, что даже в области прозрачности работа сил не совпадает с излученной энергией.

Работу сил поля излучения (распространяющихся волн) можно получить из (2.163), (2.27), (2.28):

$$W^f = \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} W_1^f(\omega, \theta_1) 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1 + \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} W_2^f(\omega, \theta_2) 2\pi \sin \theta_2 d\theta_2, \quad (2.164)$$

где

$$W_1^f(\omega, \theta_1) = - \frac{q^2 v^2 \mu_1}{\pi^2 c^3} \frac{V \epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_1} \operatorname{Re} \left[(\epsilon_2 - \epsilon_1) \sin^2 \theta_1 \cos \theta_1 \times \right. \\ \times \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_1} - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_1 \frac{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \right) \times \\ \times \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_1} \right)^{-1} \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 \cos \theta_1} \right)^{-2} \times \\ \times \left(\epsilon_2 \cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_1}} \right)^{-1} \times \\ \left. \times \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 \cos \theta_1} \right)^{-1} \right], \quad (2.165)$$

$$\begin{aligned}
W_2^f(\omega, \theta_2) = & \frac{q^2 v^2 \mu_2}{\pi^2 c^3} \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\text{Re}} \left[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin^2 \theta_2 \cos \theta_2 \times \right. \\
& \times \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2} - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_2 \frac{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right) \times \\
& \times \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2} \right)^{-1} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2 \right)^{-2} \times \\
& \times \left(\varepsilon_1 \cos \theta_2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2} \right)^{-1} \times \\
& \times \left. \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2 \right)^{-1} \right]. \quad (2.166)
\end{aligned}$$

Сходным образом можно найти работу сил поля излучения над зарядом в случае, когда ε и μ меняются скачком во времени:

$$\begin{aligned}
W^f = q \int_0^\infty dt \int \frac{4\pi i q v [\mathbf{k}v]^2}{(2\pi)^3 k^3 v^2} \left[a_+(\mathbf{k}) \exp \left(i \mathbf{k}v t - i \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} t \right) - \right. \\
\left. - a_+^*(\mathbf{k}) \exp \left(-i \mathbf{k}v t + i \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} t \right) \right] d\mathbf{k}. \quad (2.167)
\end{aligned}$$

Отсюда, используя (2.93), получаем

$$W^f = \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi W^f(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (2.168)$$

где

$$\begin{aligned}
W^f(\omega, \theta) = & \frac{q^2 \mu_2 v^2 \sin^2 \theta}{2\pi^2 c^3} \text{Re} \left\{ \frac{1}{1 - \varepsilon_1 \mu_1 (v^2/c^2) \cos^2 \theta} \times \right. \\
& \times \left. \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \mu_1 (v/c) \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} (\mu_1 - \mu_2)}{[1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta]^2} \right\}. \quad (2.169)
\end{aligned}$$

Это выражение для работы сил существенно отличается от выражения для энергии излучения (2.95) (содержит, например, лишь первую степень $[1 - \varepsilon_1 \mu_1 (v^2/c^2) \cos^2 \theta]$ в знаменателе и первую степень множителя $[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \mu_1 (v/c) \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} (\mu_1 - \mu_2)]$ в числителе).

Все указанные различия проиллюстрируем на конкретном примере ультрарелятивистских частиц, когда энергии для переходного излучения вперед, для излучения на границе раздела сред и излучения при изменении свойств среды во времени практически (в пределе $v \rightarrow c$) совпадают. Легко видеть, что и выражения для работы сил W^f в этом случае также практически совпадают. Действительно, считая $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $1 - \varepsilon_1 = \omega_{pe,1}^2/\omega^2 \ll 1$; $1 - \varepsilon_2 = \omega_{pe,2}^2/\omega^2 \ll 1$, $(Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll 1$, получим как из (2.166), так и из

(2.169) для работы поля излучения вперед одно и то же выражение:

$$W^f(\omega, \theta) \approx \frac{2q^2\theta^2(\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2)}{\omega^2\pi^2c[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2]} \times \\ \times [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2]^{-2}. \quad (2.170)$$

Сравним это выражение со спектральной плотностью энергии излучения (2.59) или (2.100)

$$W^{tr}(\omega, \theta) \approx \frac{q^2\theta^2(\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2)^2}{\pi^2c\omega^4} \times \\ \times [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2]^{-2}[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2]^{-2}. \quad (2.171)$$

Выражение (2.171) содержит дополнительный множитель в числителе $(\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2)/\omega^2$ и дополнительный множитель $(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2$ в знаменателе. Считая θ^2 , $(Mc^2/\mathcal{E})^2$ и ω_{pe}^2/ω^2 величинами одного порядка, получим, что энергия излучения примерно в $\Delta N/N$ раз меньше работы сил. Таким образом, в случае $\Delta N \ll N_0$ излучаемая энергия много меньше работы сил, тогда как в случае $\Delta N/N = 1$ излучаемая энергия того же порядка величины, что и работа сил (однако работа сил может отличаться по знаку и значению численного коэффициента).

Спектральное распределение работы сил получится из (2.171) при интегрировании по углам:

$$W^f(\omega) = \int_0^\pi W^f(\omega, \theta) \pi d\theta^2, \quad (2.172)$$

т. е.

$$W^f(\omega) = \frac{2q^2}{\pi c} \left\{ 1 + \frac{\omega^2[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2]}{\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2} \right\}. \quad (2.173)$$

Если $|\Delta N|/N_0 \ll 1$, т. е. $|\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2|/\omega_{pe}^2 \ll 1$, то

$$W^f(\omega) \approx \frac{q^2}{\pi c} \frac{\Delta N}{N_0} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2}. \quad (2.174)$$

При $\omega \ll \omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$ величина $W^f(\omega)$ постоянна и падает как $1/\omega^2$ при больших частотах. Сравнивая (2.174) с (2.60), мы убеждаемся, что, как и указывалось выше, работа сил намного (примерно в $N_0/\Delta N$ раз) превосходит энергию излучения. Полная работа *)

*) Стоит еще раз упомянуть о том, что эта работа производится полем излучения (распространяющимися волнами) до того, когда это поле «оторвется» от частицы, т. е. в пределах длины зоны формирования переходного излучения.

сил в рассматриваемом случае $\Delta N/N_0 \ll 1$ равна

$$W^{\text{т}} = \int_0^{\infty} W^{\text{т}}(\omega) d\omega = \frac{q^2 \omega_{\text{pe}} \Delta N}{2c N_0} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.175)$$

Если изменение N велико, то для переходов из вакуума в среду ($\Delta N/N = 1$, $N_1 = 0$) из (2.173) получаем

$$W^{\text{т}} = \frac{2q^2 \omega_{\text{pe}}}{3c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.176a)$$

В то же время при переходе из среды в вакуум ($\Delta N/N = 1$, $N_2 = 0$) имеем

$$W^{\text{т}} = - \frac{4q^2 \omega_{\text{pe}}}{3c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.176b)$$

В этом случае работа сил по абсолютной величине имеет тот же порядок, что и энергия излучения (2.65), однако численные коэффициенты иные. Если же считать не скорость частицы постоянной, а учитывать реакцию излучения на частицу, то положительный знак работы сил (2.176a) при влете частицы в среду означает, что, излучая, частица ускоряется, а не тормозится, причем ускорение производится именно полем излучения. Эффект ускорения частиц при излучении может быть значительным (особенно для сгустков зарядов и токов при выполнении условия когерентности, см. § 3.7 гл. 3). Его предлагалось использовать для ускорения частиц [54, 57].

Причина того, что работа сил поля излучения не равна излученной энергии, состоит, как уже указывалось, в том, что при переходе частицы из одной среды в другую происходит также изменение энергии собственного поля частицы. Обозначим эту энергию перенормировки собственного поля частицы через $\Delta W^{\text{ч}}$. Ясно, что эта величина зависит только от начального и конечного состояний частицы и соответствующей среды, т. е. величина $\Delta W^{\text{ч}}$ при влете частицы из вакуума в среду $\Delta W_0^{\text{ч}}$ должна быть равна по величине и противоположна по знаку величине $\Delta W^{\text{ч}}$ при вылете частицы из той же среды в вакуум. Так как величина $-W^{\text{т}}$ должна отличаться от $\Delta W_0^{\text{ч}}$ только на величину излученной энергии $W^{\text{тр}}$, то разность значений $W^{\text{т}}$ при вылете и влете в среду должна давать удвоенное значение $\Delta W_0^{\text{ч}}$.

Вычитая из выражения (2.176b) выражение (2.176a), получаем

$$\Delta W_0^{\text{ч}} = - \frac{q^2 \omega_{\text{pe}}}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.177a)$$

Тогда при влете частицы в среду из (2.176a) получаем

$$W^{\text{тр}} = -W^{\text{т}} - \Delta W_0^{\text{ч}} = \frac{q^2 \omega_{\text{pe}}}{3c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}, \quad (2.177b)$$

что соответствует результату (2.65). Точно так же при вылете частицы из среды из (2.176б) получаем

$$W^{\text{tr}} = -W^{\text{f}} + \Delta W_0^{\text{q}} = \frac{q^2 \omega_{\text{pe}}}{3c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.177\text{в})$$

Напомним еще раз, что ΔW_0^{q} — перенормировка собственной энергии при влете частицы в среду. Эти соображения о величине перенормировки энергии собственного поля частицы мы подкрепим прямым расчетом в п. 5 настоящего параграфа. Здесь же отметим, что в случае $\Delta N/N_0 \ll 1$, когда энергия переходного излучения мала (в $\Delta N/N_0$ раз меньше W^{f}), вся работа сил поля излучения практически идет на перенормировку энергии собственного поля частицы, т. е. указанная перенормировка должна быть равна со знаком минус величине W^{f} , задаваемой формулой (2.175).

3. Работа сил над зарядом в случае размытой границы раздела сред. Рассмотрим здесь полную работу сил поля над ультрарелятивистским зарядом в общем случае произвольного переходного слоя при условии $\delta\epsilon(z) \ll \epsilon^{(0)}$. В общем случае нужно учитывать как распространяющиеся волны $\kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon^{(0)}$ (истинное поле излучения), так и поля, локализованные у границы (для резкой границы они соответствуют либо поверхностным волнам, либо волнам, претерпевшим полное внутреннее отражение). Мы видели, что в случае резкой границы поля, локализованные у границы, дают пренебрежимо малый вклад в работу сил поля над частицей и вся работа производится полем излучения. С другой стороны, было показано, что для очень размытой границы раздела сред в поле излучения при больших Δz появляется экспоненциальный множитель (см. (2.137)) и при $\Delta z \gg (c/\omega_{\text{pe}})\mathcal{E}/Mc^2$ работа поля излучения над частицей будет малой. Но, так как изменение энергии собственного поля частицы зависит только от начального и конечного состояния и в отсутствие излучения должно быть равным по величине и противоположным по знаку работе сил, то указанная работа сил не должна зависеть от вида $\delta\epsilon(z)$ (значения диэлектрической проницаемости в средах 1 и 2 вдали от переходного слоя фиксированы, т. е. $\delta\epsilon(z) \rightarrow \epsilon_2 = \epsilon^{(0)} + \Delta\epsilon/2$, $z \rightarrow \infty$ и $\delta\epsilon(z) \rightarrow \epsilon_1 = \epsilon^{(0)} - \Delta\epsilon/2$, $z \rightarrow -\infty$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$). Очевидно при этом, что в данном случае работа будет производиться полями, локализованными у границы.

Можно сделать, однако, и более сильное утверждение, а именно, что в приближении, линейном по $\delta\epsilon(z)/\epsilon^{(0)} \ll 1$, полная работа поля над частицей не зависит от вида $\delta\epsilon(z)$. Это утверждение относится к любым, а не только к достаточно размытым переходным слоям. Физический смысл этого результата в том, что энергия переходного излучения всегда квадратична по $\delta\epsilon(z)/\epsilon^{(0)}$ и поэтому в линейном приближении по $\delta\epsilon(z)/\epsilon^{(0)}$ она мала.

Следовательно, работа сил определяется перенормировкой энергии собственного поля, которая не может зависеть от вида

$\delta\epsilon(z)$. С переходом от резкой границы к размытой меняется соотношение между работами сил, производимыми локализованными полями и полями излучения. Их сумма, однако, остается одной и той же (в линейном по $\delta\epsilon(z)/\epsilon^{(0)}$ приближении). (О балансе энергии для произвольного $\epsilon_2 - \epsilon_1$ см. ниже пп. 5 и 6.)

Конкретности ради (хотя результат от этого не зависит) мы используем выражение для $\delta\epsilon_\eta$ в форме (2.120) и подставим (2.125) в работу сил поля $\delta E_{\omega, \kappa}(z)$:

$$W^f = \frac{q^2 \Delta z \Delta \epsilon}{4\pi(\epsilon^{(0)})^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int \frac{\delta(\eta)(\epsilon^{(0)} - c^2/v^2)}{\omega \operatorname{sh}(\pi\eta\Delta z/2)} \times \\ \times \frac{\epsilon^{(0)} + \left(\eta + \frac{\omega}{v}\right) \kappa^2 c^4 \left[v\omega^3 \left(\epsilon^{(0)} - \frac{c^2}{v^2} \right) \right]^{-1} - \frac{c^2}{\omega^2} \left(\eta + \frac{\omega}{v} \right)^2}{\left(\epsilon^{(0)} - \frac{c^2}{v^2} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right) \left[\epsilon^{(0)} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \frac{c^2}{\omega^2} \left(\eta + \frac{\omega}{v} \right)^2 \right]} d\kappa. \quad (2.178)$$

В подынтегральном выражении (2.178) нужно учесть нечетность по η множителя $\operatorname{sh}(\pi\eta\Delta z/2)$ и четность $\delta(\eta)$; в остальных сомножителях поэтому нужно оставить лишь нечетную по η часть; она пропорциональна η и $\eta/\operatorname{sh}(\pi\eta\Delta z/2) \rightarrow 2/\pi\Delta z$ при $\eta \rightarrow 0$. Таким образом, получаем

$$W^f = \frac{q^2 \Delta \epsilon}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{\kappa^2 c^4 (3\epsilon^{(0)} - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)}{\omega^4 v (\epsilon^{(0)})^2 (\epsilon^{(0)} - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)^3} d\kappa^2 = \\ = \frac{q^2 \Delta \epsilon}{\pi v} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{\theta_0^2 (3\epsilon^{(0)} - c^2/v^2 - \epsilon^{(0)} \theta_0^2)}{(\epsilon^{(0)} - c^2/v^2 - \epsilon^{(0)} \theta_0^2)^3} d\theta_0^2; \quad \theta_0^2 = \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2 \epsilon^{(0)}}. \quad (2.179)$$

Этот результат фактически не зависит от конкретного вида $\delta\epsilon_\eta$, который мы здесь использовали. Общность результата (2.179) (его пригодность для любых $\delta\epsilon$) следует из нечетности $\delta\epsilon(z)$ и необходимости асимптотики $\delta\epsilon_\eta \rightarrow 1/(2\pi i\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$ для того, чтобы имело место изменение $\delta\epsilon$ от $-\Delta\epsilon/2$ до $+\Delta\epsilon/2$ при изменении z от $-\infty$ до $+\infty$.

Для ультрарелятивистских частиц можно считать, что $1 - \epsilon^{(0)} \approx \omega_{pe}^2/\omega^2 \ll 1$, и записать (2.179) в виде

$$W^f = -\frac{2q^2}{\pi c} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{\Delta\epsilon \theta_0^2 d\theta_0^2}{[\theta_0^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^3}. \quad (2.180)$$

Интегрирование по θ_0^2 дает ($\Delta\epsilon = -(\Delta N/N_0)\omega_{pe}^2/\omega^2$)

$$W^f = \frac{q^2 \Delta N}{\pi c N_0} \int_0^{\infty} \frac{(\omega_{pe}^2/\omega^2) d\omega}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2}, \quad (2.181)$$

$$W^I = \frac{q^2 \Delta}{2cN_0} \omega_{pe} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.182)$$

Полная работа сил над ультрарелятивистской частицей, таким образом, совпадает с (2.175) — работой поля излучения в случае резкой границы раздела сред. Однако выражение (2.182) не зависит от Δz и описывает также работу сил в случае, когда размытость Δz значительно превышает размер зоны формирования, т. е. когда переходное излучение практически отсутствует. При изменении размера переходной области Δz происходит лишь перераспределение работы между полем излучения и полем, локализованным в переходной зоне, так что суммарная работа сил всегда равна (2.182) независимо от величины Δz . Подчеркнем еще раз, что здесь мы провели расчеты, считая скорость частицы постоянной. Независимость работы сил от вида $\delta\epsilon(z)$ связана с тем, как уже отмечалось, что энергия переходного излучения мала, и работа сил определяется изменением энергии собственного поля частицы, т. е. изменением ее электромагнитной массы.

4. Перенормировка энергии собственного поля частицы. Энергия собственного поля заряда равна

$$W^q = \int \frac{1}{8\pi} [\epsilon (\mathbf{E}^q(\mathbf{r}, t))^2 + \mu (\mathbf{H}^q(\mathbf{r}, t))^2] d\mathbf{r}. \quad (2.183)$$

Здесь так же, как и выше, мы дисперсию не учитываем, хотя окончательный результат для релятивистских частиц пригоден и при наличии частотной дисперсии. Изменение энергии (2.183) при переходе заряда из среды 1 в среду 2 назовем энергией макроскопической перенормировки массы:

$$\Delta W^q = W_2^q - W_1^q. \quad (2.184)$$

Подставив в (2.183) разложение полей в форме (2.12), получаем

$$\begin{aligned} W^q = & \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \int \left\{ \epsilon E_{\omega, \kappa}^q(z) E_{-\omega', -\kappa}^q(z) + \right. \\ & + \epsilon E_{\perp, \omega, \kappa}^q(z) E_{\perp, -\omega', -\kappa}^q(z) + \frac{c^2}{\omega\omega'\mu} \left[\left(\kappa_y E_{\omega, \kappa}^q(z) + i \frac{\partial}{\partial z} E_{y, \omega, \kappa}^q(z) \right) \times \right. \\ & \times \left(\kappa_y E_{-\omega', -\kappa}^q(z) - i \frac{\partial}{\partial z} E_{y, -\omega', -\kappa}^q(z) \right) + \left(\kappa_x E_{\omega, \kappa}^q(z) + i \frac{\partial}{\partial z} E_{x, \omega, \kappa}^q(z) \right) \times \\ & \left. \left. \times \left(\kappa_x E_{-\omega', -\kappa}^q(z) - i \frac{\partial}{\partial z} E_{x, -\omega', -\kappa}^q(z) \right) \right] \right\} d\kappa. \end{aligned} \quad (2.185)$$

Здесь использованы соотношения (2.14). Учитывая, что $\mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa}^q$ параллельно κ и что собственные поля зависят от z как $\exp(i\omega z/v)$,

а также, принимая во внимание выражения (2.24) и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega'}{v} \right) z \right] dz = 2\pi v \delta(\omega - \omega'), \quad (2.186)$$

можно выразить W^q через $E_{\omega, \kappa}^q$ следующим образом:

$$W^q = \pi^2 v \int |E_{\omega, \kappa}^q|^2 \varepsilon \left[1 + \frac{\kappa^2 c^2 (\varepsilon \mu + c^2/v^2)}{\omega^2 (\varepsilon \mu - c^2/v^2)^2} \right] d\omega d\kappa. \quad (2.187)$$

Подставив сюда собственное поле заряда (2.19), получаем

$$W^q = \frac{q^2 v}{2\pi c^2} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{(\varepsilon \mu - c^2/v^2)^2 + (\kappa^2 c^2/\omega^2)(\varepsilon \mu + c^2/v^2)}{[\varepsilon \mu - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2]^2} d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon}. \quad (2.188)$$

Энергия (2.188), естественно, расходится. Это хорошо известная расходимость, связанная с бесконечной (в рамках электродинамики) электромагнитной массой заряда (для покоящегося заряда, например, энергия его собственного электростатического поля q^2/r расходится при $r \rightarrow 0$). Расходимость (2.188) по κ^2 является логарифмической, а по ω расходимость связана с тем, что при $\omega \rightarrow \infty$ $\varepsilon \rightarrow 1$, $\mu \rightarrow 1$, т. е. поляризация среды не существенна. Однако вакуумная электромагнитная масса заряда должна быть перенормирована, т. е. включена в массу частицы M . Только конечная добавка, связанная с наличием среды, описывает реальное изменение массы и энергии частицы (макроскопическую перенормировку массы). Разность W^q в двух средах $\Delta W^q = W_2^q - W_1^q$ также конечна и наблюдаема.

Для того чтобы получить ΔW^q и сравнить с работой сил над ультрарелятивистской частицей (2.180), в (2.188) нужно положить $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} \pm \Delta\varepsilon/2$, ввести переменную $\theta_0^2 = \kappa^2 c^2/\omega^2 \varepsilon^{(0)}$ и считать в подынтегральном выражении, что $M c^2/\mathcal{E} \ll 1$, $\theta_0^2 \ll 1$. Тогда из (2.188) получаем

$$W_2^q - W_1^q = -\frac{2q^2}{\pi c} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \theta_0^2 \Delta\varepsilon \frac{1}{[(M c^2/\mathcal{E})^2 + \theta_0^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^3} d\theta_0^2, \quad (2.189)$$

что отличается знаком от (2.180). Таким образом, в рамках сделанных предположений вся работа сил переходит в энергию макроскопической перенормировки массы (напомним, что переходное излучение в рассматриваемых условиях $\Delta\varepsilon/\varepsilon^{(0)} \ll 1$ относительно мало, как для резкой, так и для размытой границы; для резкой границы оно меньше (2.189) примерно в $\Delta\varepsilon/\varepsilon^{(0)} \ll 1$ раз). Перенормировка энергии (2.189), естественно, не зависит от степени размытости границы (граница даже не фигурирует в определении ΔW^q , т. е. ΔW^q остается тем же вне зависимости от «пути пере-

хода от ε_1 к ε_2 *). Поэтому в данном случае и работа сил $W' = -\Delta W^q$ не зависит от этой размытости. Баланс энергий при $\delta\varepsilon \ll \varepsilon$ с учетом переходного излучения, а также в общем случае мы рассмотрим ниже.

5. Баланс энергий для ультрарелятивистских частиц. Рассмотрим теперь случай произвольных, не малых, резких изменений ε . Для ультрарелятивистских частиц основной вклад в перенормировку энергии собственного поля вносят поперечные поля **). Поэтому для расчета перенормировки проще всего остановиться на случае изменения ε скачком во времени, когда (в силу однородности пространства) поля строго делятся на поперечные и продольные и можно воспользоваться выражениями (2.80), (2.83) для поперечного собственного поля частицы:

$$W^q = \pi^2 \int \left(\varepsilon + \frac{k^2 c^2}{\mu (\mathbf{k}v)^2} \right) \frac{[\mathbf{k}v]^2}{k^2 v^2} |E_{\mathbf{k}}^q|^2 d\mathbf{k}. \quad (2.190)$$

Правда, для случая изменения ε во времени вопрос о сохранении энергии нуждается в дополнительном анализе, на чем мы еще остановимся в следующем пункте (п. 6). Для ультрарелятивистских частиц, однако, этот момент не существен. Подставляя сюда выражение (2.83), получаем

$$W^q = \frac{q^2}{4\pi^2 c^2} \int \frac{\mu [\mathbf{k}v]^2 (1 + \varepsilon \mu (\mathbf{k}v)^2 / k^2 c^2)}{k^4 (1 - \varepsilon \mu (\mathbf{k}v)^2 / k^2 c^2)^2} d\mathbf{k}. \quad (2.191)$$

Для ультрарелятивистских частиц $|\mathbf{k}| \approx \omega/c$; $\mu = 1$, $|1 - \varepsilon| \ll 1$, $(\mathbf{k}v)^2 / k^2 v^2 \approx 1 - \theta^2$, $\theta^2 \ll 1$ и, как легко видеть,

$$W^q = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \int_0^\infty \frac{1}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^2} d\omega. \quad (2.192)$$

Энергия перенормировки массы в этом случае равна

$$\Delta W^q = W_2^q - W_1^q = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{\theta^2 (\omega_{pe,1}^2 - \omega_{pe,2}^2)}{\omega^2} \times$$

*) Нужно все же подчеркнуть, что сделанное утверждение относится лишь к переходному излучению на границе раздела двух сред. В случае же изменения ε во времени вопрос о балансе энергий еще требует уточнения (см. п. 6), причем, как мы увидим, определенное изменение энергии собственного поля частицы происходит также и из-за работы, совершаемой над средой (при наличии заряда) внешними источниками.

**) Это утверждение можно проверить, учтя только изменение собственной энергии поперечного поля заряда и сравнив результат с тем, который получается из выражения (2.188), учитывающего полное собственное поле. При сравнении нужно, как обычно для ультрарелятивистского случая, считать $Mc^2/\mathcal{E} \ll 1$, $\omega_{pe}^2/\omega^2 \ll 1$, $\theta^2 \ll 1$. Совпадение величины ΔW^q для двух указанных расчетов и дает основание для утверждения о том, что основной вклад в перенормировку энергии вносит поперечное собственное поле заряда.

$$\times \frac{2(Mc^2/\mathcal{E})^2 + 2\theta^2 + \omega_{\text{pe},1}^2/\omega^2 + \omega_{\text{pe},2}^2/\omega^2}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe},1}^2/\omega^2]^2 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe},2}^2/\omega^2]^2} d\theta^2. \quad (2.193)$$

При $\Delta N/N_0 \ll 1$ получим в линейном приближении по $\Delta N/N_0$

$$\Delta W^q = -\frac{q^2}{2c} \omega_{\text{pe}} \frac{\Delta N}{N_0} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}, \quad (2.194)$$

что соответствует (2.175) и, следовательно, в этом приближении работа сил идет на перенормировку массы. Переходное излучение имеет следующий порядок малости по $\Delta N/N_0 \ll 1$. Легко убедиться в выполнении баланса энергий и в этом порядке. Из (2.173) получим поправку δW^t к работе (2.175), квадратичную по $\Delta N/N_0$:

$$\delta W^t = -\frac{2q^2}{3\pi c} \left(\frac{\Delta N}{N_0}\right)^2 \int_0^\infty \frac{\omega_{\text{pe}}^4 d\omega}{\omega^4 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]^2} = -\frac{q^2}{6c} \left(\frac{\Delta N}{N_0}\right)^2 \omega_{\text{pe}} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}, \quad (2.195)$$

а из (2.193) получим поправку к перенормировке энергии, квадратичную по $\Delta N/N_0$:

$$\delta W^q = \frac{q^2}{8c} \left(\frac{\Delta N}{N_0}\right)^2 \omega_{\text{pe}} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.196)$$

Таким образом, используя (2.195), (2.196) и (2.64) получаем

$$\begin{aligned} \delta W^t + W^{\text{tr}} &= \frac{q^2 \omega_{\text{pe}}}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{6}\right) \left(\frac{\Delta N}{N_0}\right)^2 = \\ &= -\frac{q^2 \omega_{\text{pe}}}{8c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \left(\frac{\Delta N}{N_0}\right)^2 = -\Delta W^q, \end{aligned} \quad (2.197)$$

т. е. баланс энергий выполнен.

Хотя мы провели анализ для случая, когда ε меняется во времени, все результаты (для ультрарелятивистских частиц) применимы и для случая скачка ε в пространстве. В последнем случае интерес представляет $\Delta N/N = 1$ (частица влетает или вылетает из среды в вакуум *).

Если $\Delta N/N = 1$, когда роль переходного излучения не мала, то из (2.193) при влете в среду ($\Delta N/N = 1$, $N_1 = 0$) получаем (ср. с (2.177a)):

$$\Delta W^q = \Delta W_0^q = -\frac{q^2 \omega_{\text{pe}}}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}, \quad (2.198)$$

а при вылете из среды

$$\Delta W^q = -\Delta W_0^q = \frac{q^2 \omega_{\text{pe}}}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.199)$$

*) В случае изменения ε во времени считать, что в некий момент времени среда рождается из вакуума ($\Delta N/N = 1$), весьма искусственно.

Легко убедиться в соблюдении энергетического баланса при вылете (см. (2.198), (2.176a) и (2.65)):

$$W^{\text{tr}} + W^{\text{f}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) \frac{q^2 \omega_{\text{pe}}}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} = -\Delta W^{\text{q}} \quad (2.200)$$

или $-W^{\text{f}} = W^{\text{tr}} + \Delta W^{\text{q}}$ (стоит отметить, что W^{f} — это работа поля над частицей, а $-W^{\text{f}}$ — работа частицы над полем). Аналогично при вылете (см. (2.199), (2.176b) и (2.65)):

$$W^{\text{tr}} + W^{\text{f}} = \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \right) \frac{q^2 \omega_{\text{pe}}}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} = -\Delta W^{\text{q}}. \quad (2.201)$$

Таким образом, эффект перенормировки массы (энергии) полностью объясняет, почему, например, излучение может сопровождаться ускорением (а не торможением) заряда.

6. Баланс энергий в общем случае. Для того чтобы с самого начала не усложнять рассмотрение, мы выше не только для переходного излучения на границе раздела сред, но и в случае изменяющегося ϵ во времени, считали соблюдающимся закон сохранения энергии без учета работы внешних источников над средой. Вместе с тем изменение ϵ во времени означает, как мы увидим, что в присутствии заряда над средой совершается работа. Почему же в ультрарелятивистском случае (см. предыдущий п. 5) баланс энергий оказался соблюденным несмотря на неучет работы внешних сил?

Дело просто в том, что в этом пределе работа внешних источников оказывается малой как по сравнению с энергией переходного излучения, так и по сравнению с энергией перенормировки массы и работой сил над зарядом. В общем случае — для произвольных скоростей частицы — нужно (при изменении ϵ во времени) учитывать работу внешних источников над средой. Если же речь идет об изменении ϵ (или ϵ и μ) в пространстве при их неизменности во времени, то закон сохранения энергии должен, очевидно, соблюдаться без всякого учета работы внешних источников над средой, поскольку эта работа равна нулю. В работе сил над зарядом нужно учитывать также работу полей, локализованных у границы, и работу собственного поля E^{q} , а в энергии излучения — энергию излучения поверхностных волн. Баланс энергии в общем случае может быть получен, разумеется, как при изменении ϵ во времени, так и в случае изменения ϵ в пространстве. Но необходимость учета энергии, излученной в виде поверхностных волн при изменении ϵ в пространстве, и работы собственного поля E^{q} требует дополнительных расчетов (об излучении поверхностных волн см. § 3.1 гл. 3).

Остановимся поэтому здесь на балансе энергий при изменении ϵ во времени, когда, в общем случае, необходимо учесть работу внешних источников, но при этом работа собственного поля E^{q} над зарядом равна нулю (если условие излучения В.—Ч. не выполнено).

Начнем с рассмотрения простейшей задачи о заряде q , покоящемся в среде, когда

$$\mathbf{D}^q(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{E}^q(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{\epsilon r^3}. \quad (2.202)$$

Энергия поля заряда в среде равна

$$W^q = \int \frac{(\mathbf{D}(\mathbf{r}))^2}{8\pi\epsilon} d\mathbf{r} \quad (2.203)$$

и, естественно, зависит от обрезания на малых r , поскольку для точечного заряда энергия расходится. Пусть теперь ϵ изменяется от значения ϵ_1 до значения ϵ_2 . Очевидно, что при этом происходит изменение энергии, равное

$$\delta W^q = \frac{1}{8\pi} \int \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) (\mathbf{D}(\mathbf{r}))^2 d\mathbf{r}, \quad (2.204)$$

причем индукция $\mathbf{D}$ при изменении ϵ не меняется ($\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi q\delta(\mathbf{r})$ и $\mathbf{D}$ не зависит от ϵ). Покоящийся заряд произвести работу над средой не может и ясно, что вся энергия (2.204) черпается из внешних источников, совершающих работу в процессе изменения ϵ во времени (для этого, например, нужно изменить плотность среды).

Теперь можно найти работу внешних сил и в общем случае, когда $\mathbf{D}$ зависит от времени, $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$. Как ясно из изложенного, существенным является как раз то значение $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$, которое непрерывно на скачке ϵ , т. е. $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ при $t = 0$. Точно так же при скачке μ существенно $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$. Работу внешних источников в общем случае обозначим через δW . Получаем

$$\begin{aligned} \delta W = & \int \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0))^2 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \theta(t) d\mathbf{r} + \\ & + \int \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0))^2 \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) \theta(t) d\mathbf{r}, \quad (2.205) \\ \theta(t) = & \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

К результату (2.205) можно прийти и опираясь на теорему Пойнтинга *) (см. [34]), что, по сути дела, эквивалентно более простому и наглядному выводу, который мы здесь привели. Простоты ради для проверки баланса энергий можно считать, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, и не учитывать второй член в (2.205). Считая $t > 0$, получаем

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0))^2 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) d\mathbf{r}. \quad (2.206)$$

В случае, когда скачок ϵ не является резким, вместо (2.206)

*) Введенная в [34] величина δW отличается знаком от (2.205), т. е. δW в [34] — это работа заряда над внешними источниками.

имеем (см. [34])*)

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^t (\mathbf{D}(\mathbf{r}, t))^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\varepsilon} \right) dt d\mathbf{r}. \quad (2.207)$$

Заметим, что в силу непрерывности $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$ можно в (2.206) подставить значение $\mathbf{D}$ до скачка ε , когда поле излучения отсутствовало, и тем самым выразить δW через собственное поле заряда до скачка:

$$\delta W = \pi^2 \int |\mathbf{D}_{\mathbf{k}}(0)|^2 \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} d\mathbf{k} = \pi^2 \int \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{q(1)}(0)|^2 d\mathbf{k}. \quad (2.208)$$

Подставив сюда (2.83), получим ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$, θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$)

$$\delta W = \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi \delta W(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (2.209)$$

где

$$\delta W(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^4 \mu^2 \varepsilon_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{4\pi^2 c^5 \sqrt{\varepsilon_2 \mu [1 - \varepsilon_1 \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta]}}. \quad (2.210a)$$

Стоит подчеркнуть, что для ультрарелятивистских частиц величина δW пренебрежимо мала, и именно поэтому мы ранее смогли (см. п. 5) составить энергетический баланс для ультрарелятивистских частиц, не учитывая δW . Действительно, в ультрарелятивистском пределе ($(Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll 1$, $\theta^2 \ll 1$, $\omega_{pe}/\omega^2 \ll 1$) из (2.210a) получаем

$$\delta W(\omega, \theta) \approx \frac{q^2 \theta^2 (\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2)}{4\pi^2 c \omega^2 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2]^2}, \quad (2.210б)$$

т. е. при $(Mc^2/\mathcal{E})^2 \sim \theta^2 \sim \omega_{pe}^2/\omega^2$, величина δW примерно в $(Mc^2/\mathcal{E})^2$ раз меньше, чем (2.170). В общем случае произвольных скоростей величина δW существенна.

Перенормировка энергии для произвольных скоростей будет описываться выражением (см. (2.184) и (2.188)):

$$\Delta W^q(\omega, \theta) = W_2^q(\omega, \theta) - W_1^q(\omega, \theta) = \frac{q^2 \mu v^2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu} \sin^2 \theta}{4\pi^2 c^3} \times$$

*) Теорему Пойнтинга можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{D}^2}{8\pi\varepsilon} + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi\mu} \right) - \frac{\mathbf{D}^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\mu} + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \end{aligned}$$

откуда и следует выражение для δW ($\mu = \text{const}$).

$$\times \left\{ \frac{1 + \varepsilon_2 \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta}{[1 - \varepsilon_2 \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta]^2} - \frac{1 + \varepsilon_1 \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta}{[1 - \varepsilon_1 \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta]^2} \right\}. \quad (2.211)$$

Далее, формула для работы сил получится из (2.169):

$$W^f(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^3 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \mu^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2\pi^2 c^4 [1 - \varepsilon_1 \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta] [1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon_2 \mu} \cos \theta]^2}, \quad (2.212)$$

и, наконец, для мощности излучения имеем

$$W^{tr}(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^4 \mu^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{4\pi^2 c^5 \sqrt{\varepsilon_2 \mu} [1 - \varepsilon_1 \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta]^2 [1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon_2 \mu} \cos \theta]^2}. \quad (2.213)$$

Используя для всех величин выражения, проинтегрированные по углам:

$$W(\omega) = \int_0^\pi W(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (2.214)$$

и проведя необходимое интегрирование по углам всех выражений (2.210) — (2.213), удастся убедиться в справедливости соотношения

$$\delta W(\omega) - W^f(\omega) = \Delta W^q(\omega) + W^{tr}(\omega), \quad (2.215a)$$

которое может быть также записано в виде (интегрируем по ω и учитываем, что $\Delta W^q = W_2^q - W_1^q$)

$$W_1^q + \delta W - W^f = W_2^q + W^{tr}. \quad (2.215b)$$

В левой части (2.215b) стоит начальная энергия собственного поля заряда W_1^q плюс работа внешних источников и работа заряда над полем излучения $-W^f$ (W^f — работа поля излучения над зарядом), а в правой части стоит конечная энергия собственного поля заряда плюс энергия поля излучения. Уравнение (2.215b), таким образом, действительно описывает баланс энергий в общем случае.

§ 2.6. Баланс импульсов в переходном излучении

1. Перенормировка импульса. Переход частицы из среды 1 в среду 2 приводит к изменению не только энергии, но и импульса собственного поля частицы в среде. Понятие об импульсе поля в среде долгое время было предметом обсуждений, однако сейчас этот вопрос выяснен достаточно подробно (см. [1], гл. 13 и указанную там литературу). Выражение для импульса поля в среде $\mathbf{P}$ в форме Минковского состоит из импульса электромагнитного поля

$$\mathbf{P}_{el} = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{r} \quad (2.216)$$

и импульса, обусловленного действием объемной силы Абрагама на среду:

$$\mathbf{P}_A = \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{r}, \quad (2.217)$$

или

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{e1} + \mathbf{P}_A = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{r}. \quad (2.218)$$

Естественно, можно интересоваться частями импульса $\mathbf{P}$ (например, $\mathbf{P}_{e1}$ или $\mathbf{P}_A$), однако здесь нас интересует суммарный импульс $\mathbf{P}$. В какой бы форме ни записывать закон сохранения импульса (в форме Минковского или Абрагама), в этот закон в простейших условиях входит сумма $\mathbf{P}_{e1}$ и $\mathbf{P}_A$. Нас здесь будет поэтому интересовать импульс $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{e1} + \mathbf{P}_A$, причем для собственного поля частицы

$$\mathbf{P}^q = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c} \int [\mathbf{E}^q\mathbf{H}^q] d\mathbf{r}. \quad (2.219)$$

Это выражение, вообще говоря, является расходящимся. Однако нас здесь интересует разность значений (2.219) в среде 2 и среде 1, которая является конечной:

$$\Delta\mathbf{P}^q = \mathbf{P}_2^q - \mathbf{P}_1^q. \quad (2.220)$$

Конкретные выражения для $\Delta\mathbf{P}^q$ по форме несколько различны для случая, когда изменяются свойства среды во времени, и для случая, когда свойства среды изменяются в пространстве (что связано с использованием несколько различных разложений; см. § 2.2 и 2.3).

Как отмечалось в § 2.3, при изменении свойств среды во времени в переходное излучение вносят вклад только поперечные (по отношению к $\mathbf{k}$) поля. Однако в перенормировку импульса $\Delta\mathbf{P}^q$ вносят вклад не только поперечные, но и продольные поля. Дело в том, что в импульс (2.219) входит полное электрическое поле $\mathbf{E}^q$, включающее в себя как поперечную (см. (2.80)), так и продольную ($\mathbf{E}^l$) составляющую; магнитное поле $\mathbf{H}^q$ определяется, естественно, только поперечной составляющей поля $\mathbf{E}^q$ и задается выражением (2.86). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k^q(t) &= \mathbf{E}_k^{q,l}(t) + \mathbf{E}_k^{q,t}(t), \\ \mathbf{E}_k^{q,l}(t) &= -\frac{4\pi i q \mathbf{k}}{k^2 \varepsilon (2\pi)^3} \exp(-i \mathbf{k} \mathbf{v} t) \end{aligned} \quad (2.221a)$$

и, следовательно (см. (2.80)),

$$\mathbf{E}_k^q(t) = \frac{4\pi i q \mu (\mathbf{v}(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \mathbf{k}c^2/\varepsilon\mu)}{c^2 (2\pi)^3 [k^2 - \varepsilon\mu (\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2]} \exp(-i \mathbf{k} \mathbf{v} t). \quad (2.221b)$$

Подставляя (2.221b) и (2.86) в (2.219) и утя, что от нуля отлична

лишь компонента P^q вдоль скорости частицы, получаем

$$P_z^q = \frac{P^q v}{v} = \frac{q^2 \mu}{2\pi^2 v c^2} \int \frac{[k v]^2 dk}{[k^2 - \epsilon \mu (k v)^2 / c^2]^2} \quad (2.222)$$

и, следовательно,

$$\Delta P_z^q = P_{z,2}^q - P_{z,1}^q = \frac{q^2}{2\pi^2 v c^2} \int \frac{[k v]^2}{k^4} \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_2}{[1 - \epsilon_2 \mu_2 (k v)^2 / k^2 c^2]^2} - \frac{\mu_1}{[1 - \epsilon_1 \mu_1 (k v)^2 / k^2 c^2]^2} \right\} dk. \quad (2.223)$$

В случае перехода через границу раздела сред необходимо использовать разложение (2.12) (см. § 2.2). Нас здесь также интересует лишь не равная нулю проекция импульса P на скорость частицы (на ось z , направленную по v):

$$P_z^q = \frac{\epsilon \mu \pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} [E_{x,\omega,\kappa}^q(z) H_{y,-\omega',-\kappa}^q(z) - \\ - H_{x,-\omega',-\kappa}^q(z) E_{y,\omega,\kappa}^q(z)] \exp[-i(\omega - \omega')t] dz d\omega d\omega' d\kappa. \quad (2.224)$$

Компоненты P_x^q и P_y^q из симметрии задачи должны быть равными нулю (расчет это и показывает). Используя выражение (2.115б) для полей H_y и H_x и учтя, что собственные поля зависят от z как $\exp(i\omega z/v)$ (см. (2.17)), а также используя соотношение (2.186), получаем

$$P_z^q = 2\pi^2 \int |E_{\omega,\kappa}^q|^2 \frac{\kappa^2 c^2 \epsilon^2 \mu}{\omega^2 (\epsilon \mu - c^2/v^2)^2}. \quad (2.225)$$

Подставив сюда собственное поле заряда (2.19), окончательно имеем

$$P_z^q = \frac{q^2}{\pi c^2} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{\kappa^2 c^2 \epsilon \mu^2 / \omega^2}{(\epsilon \mu - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)^2} d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2 \epsilon \mu}. \quad (2.226)$$

Итак,

$$\Delta P_z^q = P_{z,2}^q - P_{z,1}^q = \frac{q^2}{\pi c^2} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \times \\ \times \left[\frac{\mu_2}{(\epsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)^2} - \frac{\mu_1}{(\epsilon_1 \mu_1 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)^2} \right] d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}. \quad (2.227)$$

Выражения (2.223) и (2.227) хотя по форме и различны, фактически тождественны, в чем можно убедиться, заменяя в (2.223) k_z на ω/v и переходя к интегрированию по положительным частотам ω . Для ультрарелятивистских частиц ($\theta^2 = \kappa^2 c^2 / \omega^2 \ll 1$,

$Mc^2/\mathcal{E} \ll 1$, $\omega_{pe}^2/\omega^2 \ll 1$) оба выражения для перенормировки импульса дают

$$P_z^q = \frac{q^2}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{\theta^2 d\theta^2}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^2}. \quad (2.228)$$

Сравнивая (2.228) с энергией собственного поля (2.192), мы видим, что

$$W^q = cP_z^q, \quad (2.229)$$

$$\Delta W^q = c\Delta P_z^q. \quad (2.230)$$

Этот результат вполне естествен. Подчеркнем, что соотношение (2.230) справедливо лишь в первом приближении по использованному для ультрарелятивистской частицы малым параметрам.

2. Баланс импульсов для ультрарелятивистской частицы. Необходимо помимо импульса собственного поля знать еще импульс поля излучения и импульс, связанный с работой поля излучения над частицей.

Импульс поля излучения для изменения ϵ во времени будет равен (ср. (2.222), см. (2.84))

$$\mathbf{P}^r = \mathbf{P}^{tr} = \frac{\mathbf{v}q^2}{\pi^2 cv} \int \frac{\epsilon_2 [\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{k^4 v^2} \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{kv} |a_+(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}. \quad (2.231)$$

В ультрарелятивистском пределе

$$P_z^{tr} = \mathbf{v}\mathbf{P}^{tr}/v \rightarrow W^{tr}/c. \quad (2.232)$$

При получении последнего соотношения мы использовали (2.94).

При изменении ϵ (или ϵ и μ) в пространстве импульс поля излучения определится соотношением, аналогичным (2.224),

$$P_z^{tr} = \frac{\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int \epsilon \mu [E_{x,\omega,\kappa}^r(z) H_{y,-\omega',-\kappa}^r(z) - H_{x,-\omega',-\kappa}^r(z) E_{y,\omega,\kappa}^r(z)] \exp[-i(\omega - \omega')t] d\omega d\omega' d\kappa. \quad (2.233)$$

Отсюда

$$P_{z,1,2}^{tr} = \mp \frac{q^2}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \epsilon_{1,2} \left(\epsilon_{1,2} \mu_{1,2} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right) |a_{1,2}|^2 \frac{d\kappa^2}{\kappa^2}, \quad (2.234)$$

где индексы 1 и 2 соответственно относятся к среде 1 и среде 2; знак минус относится к среде 1, а знак плюс — среде 2 (импульсы поля излучения направлены от границы раздела сред). При получении (2.234) так же, как и при получении выражения для энергии переходного излучения, можно вычислять импульс P_z^{tr} для поля излучения, достаточно далеко ушедшего от границы (как

в среде 1, так и в среде 2), и, следовательно, интегрировать по всем значениям z в (2.233), выбрав точку $z=0$ где-то внутри среды 1 (или 2) вдали от границы. При получении (2.234) мы использовали соотношения (2.156), (2.24), (2.20), (2.33), (2.35). Формула (2.234) так же, как и (2.231), пригодна для любых скоростей частиц. В случае ультрарелятивистской частицы величина $P_{z,1}^{\text{tr}}$ пренебрежимо мала. Учтя, что $|\varepsilon_2 - 1| \approx \omega_{\text{pe2}}^2 / \omega^2 \ll 1$, $\theta^2 \ll 1$, $Mc^2/\mathcal{E} \ll 1$, получим, что импульсы поля излучения (2.232) и (2.234) совпадают и равны

$$P_z^{\text{tr}} \approx P_{z,2}^{\text{tr}} \approx W_2^{\text{tr}}/c \approx W^{\text{tr}}/c. \quad (2.235)$$

Наконец, из (2.162) видно, что импульс, связанный с силой, действующей на частицу со стороны излучения, равен (в (2.162) вклад вносит только компонента E^r , параллельная $\mathbf{v}$ *)

$$P_z^{\text{f}} = W^{\text{f}}/v \quad (2.236)$$

и для ультрарелятивистской частицы

$$P_z^{\text{f}} \approx W^{\text{f}}/c. \quad (2.237)$$

Таким образом, для ультрарелятивистских частиц все части импульса (P_z^{f} , P_z^{tr} и ΔP_z^{q}), входящие в закон сохранения импульса, отличаются от соответствующих выражений для энергии (W^{f} , W^{tr} и ΔW^{q}), входящих в закон сохранения энергии, только множителем c , т. е. закон сохранения импульса

$$P_z^{\text{tr}} + P_z^{\text{f}} = -\Delta P_z^{\text{q}} = -P_{z,2}^{\text{q}} + P_{z,1}^{\text{q}} \quad (2.238a)$$

является следствием закона сохранения энергии. Закон сохранения импульса можно также записать в следующей форме:

$$P_{1,z}^{\text{q}} - P_z^{\text{f}} = P_{2,z}^{\text{q}} + P_z^{\text{tr}}. \quad (2.238б)$$

В левой части (2.238б) стоит начальный импульс собственного поля частицы плюс импульс $-P_z^{\text{f}}$, переданный частицей полю излучения E^r (P_z^{f} — импульс, переданный полем излучения частице), а в правой части (2.238б) стоит конечный импульс собственного поля частицы плюс импульс поля излучения.

3. Закон сохранения импульса в общем случае. При изменении ε (или ε и μ) во времени закон сохранения импульса должен выполняться в форме (2.238) и в случае произвольных скоростей частицы, тогда как в случае изменения ε (или ε и μ) в пространстве нужно учесть еще дополнительный импульс δP_z , передаваемый частицей границе раздела сред. Вообще, можно отметить, что для баланса импульсов в переходном излучении картина является в известном смысле дополнительной по отношению к ба-

*) Имеем $\frac{d}{dt} P_z^{\text{f}} = qE_z^{\text{f}}|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t} = \frac{q}{v} \mathbf{v} E^{\text{f}}|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t} = \frac{d}{dt} \frac{W^{\text{f}}}{v}$.

лансу энергии. В случае изменения ϵ (или ϵ и μ) во времени дополнительный импульс внешними источниками среде не передается, но передается дополнительная энергия, тогда как в случае изменения ϵ (или ϵ и μ) в пространстве дополнительная энергия не передается, но на границе при этом передается дополнительный импульс.

Докажем поэтому вначале справедливость закона сохранения (2.238) в общем случае для изменения ϵ ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$) во времени. Согласно (2.169),

$$P_z = \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi P_z(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (2.239)$$

$$P_z^f(\omega, \theta) = \frac{\mu^2 q^2 v^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin^2 \theta \cos \theta}{2\pi^2 c^4 [1 - \epsilon_1 \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta] [1 - \sqrt{\epsilon_2 \mu} (v/c) \cos \theta]^2}, \quad (2.240)$$

а, согласно (2.231), (2.213),

$$P_z^{\text{tr}}(\omega, \theta) = \frac{q^2 \mu^3 v^4 (\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 \sin^2 \theta \cos^3 \theta}{4\pi^2 c^6 [1 - \epsilon_1 \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta]^2 [1 - \sqrt{\epsilon_2 \mu} (v/c) \cos \theta]^2} \quad (2.241)$$

и, наконец, согласно (2.223),

$$\Delta P_z^q = \frac{q^2 v^3 \sqrt{\epsilon_2 \mu} \mu^2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) \sin^2 \theta \cos^2 \theta [2 - (\epsilon_1 + \epsilon_2) \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta]}{2\pi^2 c^5 [1 - \epsilon_1 \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta]^2 [1 - \epsilon_2 \mu (v^2/c^2) \cos^2 \theta]^2}. \quad (2.242)$$

Вводим

$$P_z(\omega) = \int_0^\pi P_z(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (2.243)$$

После приведения выражений (2.240)–(2.242) к общему знаменателю и отбрасывания членов, нечетных по $\cos \theta$, не дающих вклада в (2.243), получаем

$$-P_z^f(\omega) = \Delta P_z^q(\omega) + P_z^{\text{tr}}(\omega). \quad (2.244)$$

Учтя, что $\Delta P_z^q(\omega) = P_{z,2}^q(\omega) - P_{z,1}^q(\omega)$, и интегрируя (2.224) по частоте, получаем в общем случае закон баланса импульсов (2.2386).

4. Импульс, передаваемый частице от границы раздела сред. Импульс, передаваемый частице от границы раздела сред, можно найти, учтя, что тензор натяжений поля T_{ij} испытывает скачок на границе раздела. Рассмотрим компоненту $T_{zz}(r_\perp, z, t)$

на границе *)

$$T_{zz} = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E_z^2 + \mu H_z^2) - \frac{1}{8\pi} (\epsilon E_\perp^2 + \mu H_\perp^2). \quad (2.245)$$

Учтем, что на границе раздела непрерывны тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей и нормальные компоненты электрической и магнитной индукции. Отсюда

$$\begin{aligned} T_{zz}^{(1)}(\mathbf{r}_\perp, 0, t) - T_{zz}^{(2)}(\mathbf{r}_\perp, 0, t) = \\ = -\frac{1}{8\pi} \left\{ (D(\mathbf{r}_\perp, 0, t))^2 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) + (B(\mathbf{r}_\perp, 0, t))^2 \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) - \right. \\ \left. - (E_\perp(\mathbf{r}_\perp, 0, t))^2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) - (H_\perp(\mathbf{r}_\perp, 0, t))^2 (\mu_2 - \mu_1) \right\}, \quad (2.246) \end{aligned}$$

где $D(\mathbf{r}_\perp, 0, t) = \epsilon E_z(\mathbf{r}_\perp, 0, t)$, $B(\mathbf{r}_\perp, 0, t) = \mu H_z(\mathbf{r}_\perp, 0, t)$.

Для того чтобы получить полный импульс δP_z , переданный частице от границы раздела сред, нужно проинтегрировать (2.246) по $\mathbf{r}_\perp$ и t :

$$\begin{aligned} \delta P_z = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \left\{ (E_\perp(\mathbf{r}_\perp, 0, t))^2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) + (H_\perp(\mathbf{r}_\perp, 0, t))^2 (\mu_2 - \mu_1) - \right. \\ \left. - (D(\mathbf{r}_\perp, 0, t))^2 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) - (B(\mathbf{r}_\perp, 0, t))^2 \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) \right\} d\mathbf{r}_\perp, \quad (2.247) \end{aligned}$$

где, как и прежде, продольные (по z) компоненты пишутся без индекса z . К тому же результату можно прийти, проанализировав закон сохранения импульса вдоль $\mathbf{v}$ (по z). Так как неоднородности ϵ и μ также направлены по z , то мы получим (см. [58])**):

$$\frac{\partial}{\partial z} T_{zz} + \frac{1}{8\pi} \left(\mathbf{E}^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \mathbf{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) = \rho^q E_z + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon \mu}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}]_z. \quad (2.248)$$

Проинтегрировав (2.248) по всему пространству, получим дополнительный член, обязанный неоднородности ϵ и μ на границе:

$$\delta P_z = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dz \int \frac{1}{8\pi} \left(\mathbf{E}^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \mathbf{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) d\mathbf{r}_\perp. \quad (2.249)$$

*) Напомним, что компонента тензора натяжений $T_{z,n}$ равна проекции на ось z силы, действующей извне на единицу поверхности, внешняя нормаль к которой направлена по $\mathbf{n}$ (см. [58], с. 155). Чтобы получить искомую полную силу, надо проинтегрировать $-T_{zz}$ по всей поверхности (т. е. по $d\mathbf{r}_\perp$).

Разумеется, импульс не только передается частице от границы раздела сред, но и сама граница раздела сред получает импульс, равный этому импульсу по величине и обратный по знаку. Однако, естественно, энергия при этом не передается границе раздела, поскольку скорость границы раздела равна нулю.

**) В правой части (2.248) отсутствует член $[\mathbf{j}^q \mathbf{B}]_z/c$, так как он в нашем случае равен нулю ($\mathbf{j}^q$ параллельно оси z).

Для получения (2.247) из (2.249) нужно учесть непрерывность тангенциальных компонент поля и нормальных компонент индукции, что для резкой границы сразу дает (2.247). Однако выражение (2.249) справедливо и для размытой границы раздела сред. Величина δP_z для ультрарелятивистских частиц мала. В общем же случае полный баланс импульсов при переходном излучении на границе раздела сред может быть выполнен только с учетом импульса (2.247) или (2.249), передаваемого от границы раздела сред (ср. с законом сохранения энергии (2.215) для изменения ϵ во времени):

$$\delta P_z(\omega) - P_z^f(\omega) = \Delta P_z^q(\omega) + P_z^{\text{tr}}(\omega) \quad (2.250)$$

или

$$P_{z,1}^q + \delta P_z - P_z^f = P_{z,2}^q + P_z^{\text{tr}}. \quad (2.251)$$

Подставив в (2.247) разложение полей в форме (2.12), получаем

$$\delta P_z = -\pi^2 \int \left\{ |D_{\omega, \kappa}(0)|^2 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) + |B_{\omega, \kappa}(0)|^2 \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) - |E_{\perp, \omega, \kappa}(0)|^2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) - |H_{\perp, \omega, \kappa}(0)|^2 (\mu_2 - \mu_1) \right\} d\omega d\kappa. \quad (2.252)$$

В это выражение нужно подставить сумму собственного поля (2.19) и поля излучения (2.20) на границе раздела сред:

$$\begin{aligned} \delta P_z = & -\frac{q^2}{2\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left| \epsilon_2 a_2 - \frac{\epsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2}{\epsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} \right|^2 - \right. \\ & - (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \left| \frac{c/v \epsilon_2}{\epsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} - \frac{\omega^2}{\kappa^2 c^2} a_2 \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right|^2 - \\ & \left. - (\mu_2 - \mu_1) \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \left| \frac{1}{\epsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} - \frac{\omega^2}{\kappa^2 c^2} a_2 \epsilon_2 \right|^2 \right\} d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}. \quad (2.253) \end{aligned}$$

Это выражение справедливо для резкой границы раздела сред.

Для того чтобы не загромождать изложения, мы рассмотрим конкретно здесь случай слабых скачков ϵ при $\mu_1 = \mu_2 = 1$, т. е. $\epsilon_1 = \epsilon^{(0)} - \Delta\epsilon/2$, $\epsilon_2 = \epsilon^{(0)} + \Delta\epsilon/2$, $\Delta\epsilon/\epsilon^{(0)} \ll 1$. Мы будем интересоваться (см. ниже) в (2.253) только линейными и квадратичными по $\Delta\epsilon$ членами. Тогда, как это видно из (2.253), достаточно a_2 учесть лишь линейные по $\Delta\epsilon$ члены:

$$\begin{aligned} a_2 \approx & \frac{v \kappa^2 c^2 \Delta\epsilon \left[1 - (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2/\omega^2} - (v^2/c^2) \epsilon^{(0)} \right]}{2c\omega^2 (\epsilon^{(0)})^2 \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2/\omega^2}} \times \\ & \times \left[1 - (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2/\omega^2} \right]^{-2} \left[1 + (v/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2/\omega^2} \right]^{-1}, \quad (2.254) \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta P_z = & \frac{q^2 \Delta \varepsilon}{2\pi c^2 (\varepsilon^{(0)})^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{(1 - \varepsilon^{(0)} v^2/c^2)^2 + \kappa^2 v^2/\omega^2}{[1 - \varepsilon^{(0)} v^2/c^2 + \kappa^2 v^2/\omega^2]^2} d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \\ & - \frac{q^2 (\Delta \varepsilon)^2}{2\pi c v (\varepsilon^{(0)})^3} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2 \sqrt{\varepsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2/\omega^2}} \times \\ & \times \{[1 - \varepsilon^{(0)} (v^2/c^2)][1 - 2\varepsilon^{(0)} (v^2/c^2) + \kappa^2 v^2/\omega^2] + \varepsilon^{(0)} (v^2/c^2)[\varepsilon^{(0)} (v^2/c^2) - \\ & - \kappa^2 v^2/\omega^2]\} [1 - \varepsilon^{(0)} (v^2/c^2) + \kappa^2 v^2/\omega^2]^{-3} d(\kappa^2 c^2/\omega^2). \quad (2.255) \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что δP_z содержит два члена: первый, линейный по $\Delta \varepsilon$ и второй, квадратичный по $\Delta \varepsilon$. Оказывается, что второй член связан с импульсом, передаваемым границе при переходном излучении, т. е. существует только на достаточно резкой границе, тогда как первый сохраняется и для сколь угодно размытой границы.

5. Соотношение между перенормировками энергии и импульса на размытой границе раздела сред. Покажем, что если учесть добавочный импульс δP_z , передаваемый от размытой границы раздела, то будет выполняться соотношение

$$\Delta W^q = v(\Delta P_z^q - \delta P_z^q), \quad (2.256)$$

причем δP_z^q есть значение δP_z для размытой границы (индекс q указывает на то, что в данном случае δP_z играет роль дополнительной перенормировки импульса).

В правой части (2.256) стоит фактически полное изменение импульса частицы как из-за перенормировки, так и из-за импульса, переданного от границы. Ограничимся здесь, опять-таки, случаем $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\Delta \varepsilon/\varepsilon^{(0)} \ll 1$. Используем (2.249):

$$\delta P_z^q = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^\infty dz \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \int (\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t))^2 d\mathbf{r}_\perp dt. \quad (2.257)$$

Подставив сюда решение (2.116), можно вычислить интегралы по $\mathbf{r}_\perp$ и t , интеграл же по z даст $\Delta \varepsilon$; в результате

$$\delta P_z^q = \frac{q^2 \Delta \varepsilon}{2\pi (\varepsilon^{(0)})^2 c^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{(1 - \varepsilon^{(0)} v^2/c^2)^2 + \kappa^2 v^2/\omega^2}{(1 - \varepsilon^{(0)} v^2/c^2 + \kappa^2 v^2/\omega^2)^2} d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}. \quad (2.258)$$

Этот результат, действительно, совпадает с первым членом (2.255). Из (2.227) получим при $\Delta \varepsilon/\varepsilon^{(0)} \ll 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$

$$\Delta P_z^q = \frac{2q^2 \Delta \varepsilon}{\pi c^2 (\varepsilon^{(0)})^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{(\kappa^2 v^2/\omega^2)(\varepsilon^{(0)})^2 v^4/c^4}{(1 - \varepsilon^{(0)} v^2/c^2 + \kappa^2 v^2/\omega^2)^3} d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}, \quad (2.259)$$

а из (2.188)

$$\Delta W^q = - \frac{2q^2 \Delta \varepsilon v}{\pi c^2 (\varepsilon^{(0)})^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{(\kappa^2 v^2 / \omega^2) (\varepsilon^{(0)})^2 (v^4 / c^4)}{(1 - \varepsilon^{(0)} v^2 / c^2 + \kappa^2 v^2 / \omega^2)^3} d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} -$$

$$- \frac{q^2 v \Delta \varepsilon}{2\pi c^2 (\varepsilon^{(0)})^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{(1 - \varepsilon^{(0)} v^2 / c^2)^2 + \kappa^2 v^2 / \omega^2}{(1 - \varepsilon^{(0)} v^2 / c^2 + \kappa^2 v^2 / \omega^2)^2} d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}. \quad (2.260)$$

Таким образом,

$$\Delta W^q - v \Delta P_z^q = - \frac{q^2 v \Delta \varepsilon}{2\pi c^2 (\varepsilon^{(0)})^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{(1 - \varepsilon^{(0)} v^2 / c^2)^2 + \kappa^2 v^2 / \omega^2}{(1 - \varepsilon^{(0)} v^2 / c^2 + \kappa^2 v^2 / \omega^2)^2} d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}. \quad (2.261)$$

Из сравнения с (2.258) убеждаемся в справедливости (2.256).

Но мы знаем (см. п. 3 § 2.5), что работа сил над зарядом на размытой границе равна со знаком минус величине перенормировки энергии:

$$\Delta W^q = - W^f. \quad (2.262)$$

Следовательно,

$$v (\Delta P_z^q - \delta P_z^q) = - W^f. \quad (2.263)$$

В силу $W^f = v P_z^f$ из (2.263) следует и закон сохранения импульса в прежней форме ($P_z^{\text{tr}} = 0$). Таким образом, работа сил на размытой границе связана с перенормировкой импульса и передачей импульса границе. О другом содержании соотношения (2.256) см. § 2.7.

6. Соотношение между перенормировками энергии и импульса для плавного изменения ε во времени. Рассмотрим случай плавного изменения ε во времени, когда переходное излучение пренебрежимо мало. Покажем, что для плавного изменения ε

$$\Delta W^q - \delta W^q = v \Delta P_z^q \quad (2.264)$$

Здесь δW^q — значение δW для случая плавного изменения ε во времени (индекс q указывает на то, что δW в данном случае играет роль дополнительной перенормировки энергии).

Считаем $\Delta \varepsilon / \varepsilon^{(0)} \ll 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Из (2.207), используя выражение (2.80), (2.83), а также $\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\varepsilon} \approx - \frac{1}{\varepsilon^{(0)2}} \frac{\partial}{\partial t} \delta \varepsilon(t)$, получим

$$\delta W^q = - \frac{q^2}{4\pi^2 c^2} \int \frac{[\mathbf{k}v]^2 \Delta \varepsilon (\mathbf{k}v)^2 d\mathbf{k}}{k^6 c^2 [1 - \varepsilon^{(0)} (\mathbf{k}v)^2 / k^2 c^2]^2}. \quad (2.265)$$

С другой стороны, из (2.191), (2.223) получаем, что $-v \Delta P_z^q + \Delta W^q$ также равно правой части (2.265), что и доказывает (2.264). Та-

ким образом, в данном случае работа внешних источников при изменении ϵ во времени и перенормировка энергии связаны с перенормировкой импульса.

Естественно, соотношения (2.256), (2.264) здесь иллюстрировались на примере слабого скачка $\Delta\epsilon/\epsilon^{(0)} \ll 1$ только для простоты, тогда как они справедливы и в общем случае.

Можно сказать, что в определенном смысле δW^q в (2.264) соответствует дополнительной перенормировке энергии, а δP^q в (2.256) — дополнительной перенормировке импульса.

§ 2.7. Вероятности переходного излучения

1. Законы сохранения. Выше мы везде считали скорость частицы постоянной. Это, как указывалось, вполне обосновано, ибо изменение скорости можно компенсировать за счет работы внешних сил или считать это изменение сколь угодно малым, увеличивая массу частицы (в пределе $M \rightarrow \infty$ изменение скорости в результате всех рассматриваемых эффектов стремится к нулю). Однако при рассмотрении баланса энергии и импульса (в частности, имея в виду квантовые обобщения) удобно фиксировать лишь начальную энергию и импульс «голой» частицы: $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,1}) = \sqrt{M^2 c^4 + p_{0,1}^2 c^2}$ и $\mathbf{p}_{0,1}$. При этом под «голой» мы понимаем частицу, движущуюся в вакууме. При движении частицы в среде (например, среде I) энергия и импульс всей системы (частица + поле + среда) равны

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,1}) + W_1^q, \quad (2.266)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{0,1} + \mathbf{P}_1^q. \quad (2.267)$$

Здесь на самом деле нужно, конечно, добавлять к энергии «голой» частицы $\mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,1})$ и импульсу «голой» частицы $\mathbf{p}_{0,1}$ соответственно W_1^q и $\mathbf{P}_1^q$, а члены $W_1^q - W_1^q|_{\epsilon_1, \mu_1=1}$ и $\mathbf{P}_1^q - \mathbf{P}_1^q|_{\epsilon_1, \mu_1=1}$, поскольку W_1^q и $\mathbf{P}_1^q$ были определены ранее как полная энергия и импульс собственного поля заряда, движущегося в среде. Но, разумеется, везде ниже фигурируют разности $\Delta W^q = W_2^q - W_1^q$ и $\Delta \mathbf{P}^q = \mathbf{P}_2^q - \mathbf{P}_1^q$, а скорость $\mathbf{v}$ практически постоянна. Поэтому величины $W_{1,2}^q|_{\epsilon_{1,2}, \mu_{1,2}=1}$ и $\mathbf{P}_{1,2}^q|_{\epsilon_{1,2}, \mu_{1,2}=1}$ в конечных выражениях сокращаются.

Для определения конечного состояния нужно проанализировать законы сохранения энергии и импульса. При этом работа сил поля излучения сказывается на значении конечного импульса и поэтому описывается изменением импульса частицы. Проиллюстрируем с этих позиций закон сохранения (2.256) для размытой границы раздела сред, когда энергией и импульсом переходного излучения можно пренебречь (см. выше).

Заметим, что до пересечения границы раздела сред энергия и импульс системы равны (2.266) и (2.267), а после пересечения

размытой границы

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,2}) + W_2^q, \quad (2.268)$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{0,2} + \mathbf{P}_2^q - \delta\mathbf{P}^q, \quad (2.269)$$

где $-\delta\mathbf{P}^q$ — импульс, переданный границе раздела.

В силу законов сохранения

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,2}) - \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,1}) + \Delta W^q = 0, \quad (2.270a)$$

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{0,2} - \mathbf{p}_{0,1} + \Delta\mathbf{P}^q - \delta\mathbf{P}^q = 0. \quad (2.270b)$$

Далее, в силу малости $\Delta\mathbf{P}^q$ и $\delta\mathbf{P}^q$ по сравнению с $\mathbf{p}_{0,2}$ и $\mathbf{p}_{0,1}$ имеем

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,2}) - \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,1}) = \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_{0,2} - \mathbf{p}_{0,1}) = -\mathbf{v}(\Delta\mathbf{P}^q - \delta\mathbf{P}^q). \quad (2.271)$$

Отсюда в силу (2.270a)

$$\Delta W^q = \mathbf{v}(\Delta\mathbf{P}^q - \delta\mathbf{P}^q), \quad (2.272)$$

что совпадает с соотношением (2.256). В этом выводе есть один момент, который требует оговорки. Дело в том, что все величины $W_{1,2}^q$, $\mathbf{P}_{1,2}^q$, $\delta\mathbf{P}$ зависят от скорости частицы $\mathbf{v}$, и W_1^q , например, нужно писать как $W_1^q(\mathbf{v}_1)$, а W_2^q как $W_2^q(\mathbf{v}_2)$. Однако учет различия скоростей в этих величинах является превышением точности, так как мы учитываем лишь эффекты первой степени по q^2 (фактически малым параметром является $(q^2/Mc^2)\omega_{pe}/c$, т. е. отношение классического радиуса к длине c/ω_{pe}), учет же изменения скорости в $W_{1,2}^q$, $\mathbf{P}_{1,2}^q$ и $\delta\mathbf{P}$ будет следующим порядком малости по $(q^2/Mc^2)\omega_{pe}/c$. Это значит, что во всех величинах, содержащих q^2 , можно ставить значение начальной скорости, кроме самих величин $\mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,2})$ и $\mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,1})$, которые мы разлагаем до членов первого порядка по q^2 *). Наконец, можно найти и изменение энергии частицы из (2.270)

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,2}) - \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,1}) = -\Delta W^q = W^t, \quad (2.273)$$

которое оказывается равным работе поля над частицей. Таким образом, смысл соотношения (2.256) становится совершенно прозрачным. Точно так же интерпретируется и соотношение (2.264) для плавного изменения ϵ во времени (нужно учесть энергию δW , связанную с работой внешних источников над частицей).

Сходный анализ известен для излучения В.—Ч. Задав начальную энергию $\mathcal{E}(\mathbf{p})$ и импульс $\mathbf{p}$ частицы, после излучения имеем энергию $\mathcal{E}(\mathbf{p}') + \hbar\omega(\mathbf{k})$ и импульс $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}$. При $\hbar k \ll p$ получим условие излучения В.—Ч.**)

$$\omega(\mathbf{k}) = k\mathbf{v}. \quad (2.274)$$

*) В окончательные соотношения входит только разность $\mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,2}) - \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,1})$, которая содержит лишь члены первого порядка по q^2 .

**) Поскольку условие излучения В.—Ч. является следствием квантовых законов сохранения энергии и импульса при излучении, то условие (2.274) можно назвать также законом сохранения при излучении В.—Ч.

Хотя само условие (2.274) классическое, его квантовый вывод очень нагляден (см. [1] и указанную там литературу). Интенсивность излучения В.—Ч. можно выразить, вводя вероятность излучения $w_p^{V-Ch}(\mathbf{k})$ (см. [73])

$$Q^{V-Ch} = \int \frac{\hbar \omega(\mathbf{k}) w_p^{V-Ch}(\mathbf{k})}{(2\pi)^3} d\mathbf{k}, \quad (2.275)$$

где $\hbar \omega(\mathbf{k})$ — энергия кванта, $d\mathbf{k}(2\pi)^{-3}$ — элементарный фазовый объем, а вероятность $w_p^{V-Ch}(\mathbf{k})$ задается выражением (см. [73], $\mu = 1$)

$$w_p^{V-Ch}(\mathbf{k}) = \frac{q^2 [\mathbf{k}\mathbf{v}]^2 (2\pi)^3}{\pi \hbar k^2 \left. \frac{\partial}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_k}} \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (2.276)$$

Из (2.275), (2.276) легко получить формулу для интенсивности излучения В.—Ч. (2.23). Нашей задачей будет введение представлений о вероятности переходного излучения.

Из проведенного анализа видна специфика этой задачи. Во-первых, изменение энергии и импульса происходит и без излучения и, во-вторых, в случае пространственного изменения ϵ при излучении возникает дополнительная передача импульса от границы раздела сред, а в случае изменения ϵ во времени в процессе излучения дополнительная энергия будет передана внешними источниками.

При наличии излучения, величины δP_z и δW состоят из двух частей. Например,

$$\delta P_z = \delta P_z^q + \delta P_z^{tr}, \quad (2.277)$$

где δP_z^q — это та часть δP_z , которая не связана с излучением, а следовательно, определяется соотношением (2.272) (для размытой границы $\delta P_z = \delta P_z^q$), а δP_z^{tr} — часть δP_z , связанная с переходным излучением. Точно так же при изменении ϵ во времени нужно записать

$$\delta W = \delta W^i + \delta W^{tr}, \quad (2.278)$$

где δW^{tr} — часть δW , связанная с переходным излучением, а δW^i определяется соотношением (2.264).

2. Вероятность переходного излучения при прохождении заряда через резкую границу раздела двух сред. Пусть при пересечении границы раздела сред 1 и 2 у частицы есть определенная вероятность либо излучить фотон в среду 2 (вперед по движению частицы, когда $\mathbf{k}$ имеет углы $0 < \theta = \theta_2 < \pi/2$), либо излучить фотон в среду 1 (назад, когда $\mathbf{k}$ имеет углы $\pi/2 < \theta = \pi - \theta_1 < \pi$). При этом часть импульса может забирать граница раздела сред. Обозначим импульс, передаваемый от границы раздела сред, через $\hbar \mathbf{k}_0$. Вообще говоря, передаваемый импульс $\hbar \mathbf{k}$,

не обязательно перпендикулярен границе раздела сред. Мы здесь введем вероятность переходного излучения $w_p^{\text{tr}}(\mathbf{k}, k_{0,z})$, проинтегрированную по всем значениям перпендикулярных компонент импульса $\hbar \mathbf{k}_{0,\perp}$ (вдоль границы, но перпендикулярно скорости заряда), отнесенную к величине $dk_{0,z}$, а также к единичному фазовому объему $d\mathbf{k}(2\pi)^{-3}$ испускаемого фотона. Вероятность испускания фотона, проинтегрированная по всем значениям передаваемого импульса, будет иметь вид *)

$$w_p^{\text{tr}}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} w_p^{\text{tr}}(\mathbf{k}, k_{0,z}) dk_{0,z}, \quad (2.279)$$

тогда как полная излученная энергия равна

$$W^{\text{tr}} = \int \hbar \omega(\mathbf{k}) w_p^{\text{tr}}(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (2.280)$$

Рассмотрим вопрос о том, как видоизменяются законы сохранения при излучении. Вместо (2.269) имеем

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{0,2} + \mathbf{P}_2^q - \delta \mathbf{P}^q + \hbar \mathbf{k} - \hbar \mathbf{k}_0, \quad (2.281)$$

а вместо (2.268)

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,2}) + W_2^q + \hbar \omega(\mathbf{k}), \quad (2.282)$$

что отличается от соответствующих соотношений (2.268), (2.269) учетом энергии и импульса излучаемого фотона и импульса $\hbar \mathbf{k}_0$, передаваемого границе раздела. Следовательно,

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,2}) + \Delta W^q + \hbar \omega(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,1}). \quad (2.283)$$

Раскладывая обе части равенства (2.283) по малым $\mathbf{P}^q$, $\delta \mathbf{P}$, $\hbar \mathbf{k}$, $\hbar \mathbf{k}_0$, получаем

$$\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}_0\mathbf{v}. \quad (2.284)$$

Это соотношение можно записать также в следующем виде:

$$k_{0,z} = -\frac{1}{v}(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (2.285)$$

что в свою очередь позволяет записать вероятность $w_p^{\text{tr}}(\mathbf{k}, k_{0,z})$ в виде

$$w_p^{\text{tr}}(\mathbf{k}, k_{0,z}) = w_p^{\text{tr}}(\mathbf{k}) \delta\left(k_{0,z} + \frac{1}{v}(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v})\right). \quad (2.286)$$

Выделим в (2.280) интегрирование по $k_z > 0$ (когда $k_z = (\omega/c)\sqrt{\epsilon_2\mu_2 - \kappa^2 c^2/\omega^2}$), что соответствует излучению вперед, и интегрирование по $k_z < 0$ (когда $k_z = -(\omega/c)\sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2}$),

*) Индекс tr указывает на то, что речь идет о процессе переходного излучения.

что соответствует излучению назад. Тогда

$$W^{\text{tr}} = W_1^{\text{tr}} + W_2^{\text{tr}}, \quad (2.287)$$

$$W_2^{\text{tr}} = \int_0^\infty \frac{\hbar \omega d\omega}{8\pi^2 c} \int_0^\infty \frac{\varepsilon_2 \mu_2 w_p^{\text{tr}(2)}(\omega, \kappa)}{V \varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} d\kappa^2, \quad (2.288)$$

$$W_1^{\text{tr}} = \int_0^\infty \frac{\hbar \omega d\omega}{8\pi^2 c} \int_0^\infty \frac{\varepsilon_1 \mu_1 w_p^{\text{tr}(1)}(\omega, \kappa)}{V \varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} d\kappa^2, \quad (2.289)$$

где $w_p^{\text{tr}(2)}(\omega, \kappa) \equiv w_p^{\text{tr}}(\omega, \theta_2)$ — вероятность излучения вперед, $\kappa^2 c^2 / \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 = \sin^2 \theta_2$, а $w_p^{\text{tr}(1)}(\omega, \kappa) \equiv w_p^{\text{tr}}(\omega, \theta_1)$ — вероятность излучения назад, $\kappa^2 c^2 / (\omega^2 \varepsilon_1 \mu_1) = \sin^2 \theta_1$. Сопоставляя (2.288) с (2.38), а (2.289) — с аналогичным соотношением для W_1^{tr} , получаем

$$w_p^{\text{tr}(2)}(\omega, \kappa) = \frac{8\pi q^2 c^2 \cos^2 \theta_2}{\hbar \omega^3 \mu_2 \sin^2 \theta_2} |a_2|^2, \quad (2.290)$$

$$w_p^{\text{tr}(1)}(\omega, \kappa) = \frac{8\pi q^2 c^2 \cos^2 \theta_1}{\hbar \omega^3 \mu_1 \sin^2 \theta_1} |a_1|^2. \quad (2.291)$$

3. Импульс, передаваемый от границы в процессе переходного излучения. Введенная вероятность позволяет вычислить импульс, передаваемый от границы в процессе переходного излучения. Этот импульс может быть вычислен и независимо при помощи (2.277). Совпадение этих выражений подтверждает правильность и целесообразность введенных понятий вероятностей переходного излучения.

С помощью вероятности $w_p^{\text{tr}}(\mathbf{k}, k_{0,z})$ можно найти:

$$\delta P_z^{\text{tr}} = \int \hbar k_{0,z} w_p^{\text{tr}}(\mathbf{k}, k_{0,z}) d\mathbf{k} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (2.292)$$

Для излучения вперед имеем

$$\frac{k_{0,z}}{\omega(\mathbf{k})} = -\frac{1}{v} \left(1 - \frac{k_z v}{\omega}\right) = -\frac{1}{v} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2\right), \quad (2.293)$$

в то время как для излучения назад

$$\frac{k_{0,z}}{\omega(\mathbf{k})} = -\frac{1}{v} \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \theta_1\right). \quad (2.294)$$

Поскольку выражение для передаваемого импульса в процессе излучения отличается от энергии излучения лишь множителем (2.293) и (2.294), то δP_z^{tr} можно записать через спектральные плотности энергии переходного излучения вперед $W_2^{\text{tr}}(\omega, \theta_2)$ (см. (2.40)) и назад $W_1^{\text{tr}}(\omega, \theta_1)$ (см. (2.43)); обе среды 1 и 2

считаем прозрачными):

$$\delta P_z^{\text{tr}} = - \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} \frac{2\pi}{v} W_2^{\text{tr}}(\omega, \theta_2) \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2\right) \sin \theta_2 d\theta_2 - \\ - \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} \frac{2\pi}{v} W_1^{\text{tr}}(\omega, \theta_1) \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \theta_1\right) \sin \theta_1 d\theta_1. \quad (2.295)$$

Для ультрарелятивистских частиц, например, основной максимум переходного излучения вперед в пределах $\theta \sim Mc^2/\mathcal{E}$ и $\omega_{\text{pe}}^2/\omega^2 \sim (Mc^2/\mathcal{E})^2$ не дает заметно большего вклада в величину импульса δP_z^{tr} , передаваемого от границы при переходном излучении, по сравнению с остальными областями углов θ и частот ω вне указанного максимума. Это связано с тем, что множитель $1 - (v/c)\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2$ в первом члене (2.295) в этом случае весьма мал ($\sim (Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll 1$). Поэтому основной вклад для ультрарелятивистских частиц дают углы порядка единицы, когда в (2.288) можно положить приближенно $v \approx c$. Так, при влете частицы в среду $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$, $\mu_2 = 1$ получаем

$$\delta P_z^{\text{tr}} = - \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} \frac{2q^2 \sqrt{\varepsilon} |\varepsilon - 1|^2 \cos^2 \theta_2 \sin^3 \theta_2}{\pi c^2 (1 - \varepsilon \cos^2 \theta_2) (1 + \sqrt{\varepsilon} \cos \theta_2)} \times \\ \times \frac{(1 - \varepsilon - \sqrt{1 - \varepsilon \sin^2 \theta_2})^2 d\theta_2}{(1 - \sqrt{1 - \varepsilon \sin^2 \theta_2})^2 [\cos \theta_2 + \sqrt{\varepsilon (1 - \varepsilon \sin^2 \theta_2)}]^2} - \\ - \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} \frac{2q^2 |\varepsilon - 1|^2 (\varepsilon - \sin^2 \theta_1) \cos^2 \theta_1 \sin^3 \theta_1}{\pi c^2 (1 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_1})^2 (\varepsilon \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_1})^2} \times \\ \times [1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta_1]^{-1} [1 - (v/c) \cos \theta_1]^{-1} d\theta_1. \quad (2.296)$$

Второй член (2.296) имеет особенность при $\theta_1 \rightarrow 0$, а именно, он содержит достаточно большой множитель порядка $(\mathcal{E}/Mc^2)^4$. Однако это дает лишь слабую логарифмическую зависимость δP_z^{tr} от $\mathcal{E}$. Заметим, что δP_z^{tr} квадратично по скачку ε и μ .

Как указывалось, существует независимый способ расчета δP_z^{tr} при использовании соотношения (2.277), каждый член $(\delta P_z$ и $\delta P_z^{\text{tr}})$ в котором содержит в первом приближении выражения, линейные по скачку ε и μ . Как оказывается, эти линейные члены в (2.277) полностью сокращаются и остаются только квадратичные члены по скачку ε и μ , как и должно быть, если пользоваться вероятностными соображениями. Для того чтобы не загромождать изложение, мы проиллюстрируем это для простейшего случая слабых скачков, когда $\Delta\varepsilon/\varepsilon^{(0)} \ll 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon^{(0)} - \Delta\varepsilon/2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon^{(0)} + \Delta\varepsilon/2$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Как уже отмечалось, первый член δP_z в (2.255) соответствует δP_z^q , второй же член в (2.255) будет искомой величиной δP_z^{tr} . Выпишем его еще раз:

$$\delta P_z^{\text{tr}} = -\frac{q^2}{2\pi c v} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{(\Delta \varepsilon)^2 \kappa^2 v^2}{(\varepsilon^{(0)})^3 \omega^2 \sqrt{\varepsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2}} \times \\ \times \left[\left(1 - \frac{\varepsilon^{(0)} v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{2\varepsilon^{(0)} v^2}{c^2} + \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2} \right) + \frac{\varepsilon^{(0)} v^2}{c^2} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\varepsilon^{(0)} v^2}{c^2} - \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2} \right) \right] \frac{d(\kappa^2 c^2 / \omega^2)}{(1 - v^2/c^2 + \kappa^2 v^2 / \omega^2)^3}. \quad (2.297)$$

Этот результат в точности совпадает с тем, который получается с помощью вероятности (2.295):

$$\delta P_z^{\text{tr}} = -\frac{q^2}{\pi c v} \int_0^\infty \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} \int_0^\infty \varepsilon^{(0)} \sqrt{\varepsilon^{(0)} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \left[|a_2|^2 \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon^{(0)} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right) + \right. \\ \left. + |a_1|^2 \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon^{(0)} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right) \right] d\omega. \quad (2.298)$$

Подставив сюда a_2 из (2.254) и a_1 получающееся из (2.254) заменой $v \rightarrow -v$, $\Delta \varepsilon \rightarrow -\Delta \varepsilon$, находим

$$\delta P_z^{\text{tr}} = -\frac{q^2}{4\pi c v} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{\kappa^2 v^2 (\Delta \varepsilon)^2}{\omega^2 (\varepsilon^{(0)})^3 \sqrt{\varepsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2 / \omega^2}} \times \\ \times \left(1 - \frac{\varepsilon^{(0)} v^2}{c^2} + \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2} \right)^{-3} \left[\left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon^{(0)} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right) \times \right. \\ \times \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon^{(0)} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} - \frac{\varepsilon^{(0)} v^2}{c^2} \right)^2 + \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon^{(0)} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right) \times \\ \times \left. \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon^{(0)} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} - \frac{\varepsilon^{(0)} v^2}{c^2} \right)^2 \right] d \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}, \quad (2.299)$$

что, как легко видеть, тождественно (2.297). Еще раз подчеркнем, что δP_z^{tr} — это лишь часть передаваемого от границы в процессе переходного излучения импульса, исчезающая для достаточно размытой границы. Другая часть, δP_z^q , сохраняется и для размытой границы.

4. Вероятность переходного излучения при скачкообразном изменении ε во времени. Введем вероятность переходного излучения частицей импульса $\mathbf{p}$ фотона импульса $\hbar \mathbf{k}$ в интервале от $\mathbf{k}$ до $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$ с передачей энергии $\hbar \omega_0$ в интервале от ω_0 до $\omega_0 + d\omega_0$, нормированную на $d\omega_0$ и на $d\mathbf{k}(2\pi)^{-3}$. Обозначим эту

вероятность через

$$w_{\mathbf{p}}^{\text{tr}}(\mathbf{k}, \omega_0). \quad (2.300)$$

Полная вероятность излучения, просуммированная (проинтегрированная) по всем возможным передаваемым энергиям $\hbar\omega_0$, будет

$$w_{\mathbf{p}}^{\text{tr}}(\mathbf{k}) = \int_0^{\infty} w_{\mathbf{p}}^{\text{tr}}(\mathbf{k}, \omega_0) d\omega_0, \quad (2.301)$$

а полная излученная энергия

$$W^{\text{tr}} = \int \hbar\omega(\mathbf{k}) w_{\mathbf{p}}^{\text{tr}}(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (2.302)$$

Эта энергия совпадает с (2.94), т. е.

$$w_{\mathbf{p}}^{\text{tr}}(\mathbf{k}) = \frac{8\pi q^2 \varepsilon_2}{\hbar \omega(\mathbf{k}) k^3} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{k^2 v^2} |a_+(\mathbf{k})|^2. \quad (2.303)$$

Найдем теперь $w_{\mathbf{p}}^{\text{tr}}(\mathbf{k}, \omega_0)$. До излучения импульс был равным

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{0,1} + \mathbf{P}_1^q, \quad (2.304)$$

а после излучения он стал равным

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{0,2} + \mathbf{P}_2^q + \hbar\mathbf{k}. \quad (2.305)$$

Для энергии до излучения имеем

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,1}) + W_1^q, \quad (2.306)$$

а после излучения

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0(\mathbf{p}_{0,2}) + W_2^q - \delta W^q + \hbar\omega(\mathbf{k}) - \hbar\omega_0. \quad (2.307)$$

Отсюда, используя (2.264), получаем

$$\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{v} + \omega_0. \quad (2.308)$$

Следовательно, можно записать

$$w_{\mathbf{p}}^{\text{tr}}(\mathbf{k}, \omega_0) = w_{\mathbf{p}}^{\text{tr}}(\mathbf{k}) \delta(\omega_0 - \omega(\mathbf{k}) + \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (2.309)$$

5. Энергия, переданная источником в процессе переходного излучения при скачкообразном изменении ε во времени. Найдем теперь, используя введенные вероятности, величину δW^{tr} :

$$\begin{aligned} \delta W^{\text{tr}} &= \int_0^{\infty} \hbar\omega_0 w_{\mathbf{p}}^{\text{tr}}(\mathbf{k}, \omega_0) d\omega_0 \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \\ &= \frac{q^2}{\pi^2} \int \varepsilon_2 \frac{\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega(\mathbf{k}) k^2} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{k^2 v^2} |a_+(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.310)$$

Здесь мы использовали соотношение (2.303). Выражение (2.310) не содержит $\hbar$ и является классическим. Используя (2.93),

можно (2.310) записать в следующей форме:

$$\delta W^{\text{tr}} = \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\pi} \delta W^{\text{tr}}(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (2.311)$$

где

$$\delta W^{\text{tr}}(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^2 \sqrt{\mu_2} \sin^2 \theta}{4\pi^2 c^3 \sqrt{\epsilon_2} [1 - (v/c) \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \cos \theta]} \times \\ \times \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2} (\mu_1/\mu_2 - 1) + \mu_1 (\epsilon_1 - \epsilon_2)(v/c) \cos \theta}{[1 - \epsilon_1 \mu_1 (v^2/c^2) \cos^2 \theta]^2}. \quad (2.312)$$

Существует независимый способ расчета δW^{tr} при помощи соотношения (2.278). При этом в данном случае нетрудно проделать расчет для произвольных, а не только малых скачков ϵ . Считая для простоты $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, подставив в соотношение (2.278) δW из (2.210а), а δW^{ch} из (2.264), используя точные выражения для ΔP_z^q (2.223) и ΔW^{ch} (2.241), убеждаемся в том, что результат такого расчета δW^{tr} совпадает с (2.311), (2.312) при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Напомним, что δW^{tr} описывает только часть передаваемой энергии, которая возникает при резком изменении ϵ , связанном с самим процессом переходного излучения. Величина δW^{tr} исчезает для плавного изменения ϵ во времени, когда переходное излучение становится малым. При этом остается лишь вклад δW^{ch} .

6. Замечания о квантовой теории и экспериментах по переходному излучению. Хотя мы здесь и использовали квантовые представления, но, по сути дела, все вычисленные величины были классическими. Однако введение соответствующих вероятностей является шагом к построению квантовой теории переходного излучения. Попытка построения такой теории на полуфеноменологической основе была предпринята в [60] (см. также [60а]), где квантовалось поле в среде при наличии границы («элементарной» волной была тройка — падающая, отраженная и преломленная волны). Полная квантовая «теория переходного излучения» еще требует дальнейшего развития и сопоставления с результатами [60]. Уже в полуклассическом расчете, проведенном здесь, была продемонстрирована нетривиальная роль перенормировок импульса и энергии и роль энергии, передаваемой от внешних источников в процессе переходного излучения при изменении свойств среды во времени, а также роль передаваемого от границы импульса при излучении на границе раздела сред. В квантовой теории следует использовать квантовые выражения для перенормировки энергии и импульса (см. [55]).

Несмотря на большую роль макроскопических перенормировок энергии и импульса, при переходном излучении до сих пор, насколько нам известно, не делались попытки их измерения, хотя само переходное излучение изучено экспериментально до-

статочно подробно (см., например, [211, 28]). Вместе с тем, как мы видели, перенормировки энергии и импульса могут в ряде случаев намного превосходить энергию переходного излучения (для малых $\Delta\epsilon/\epsilon$). По импульсу, передаваемому границе, можно судить о перенормировке энергии, причем для ультрарелятивистских частиц доля импульса, передаваемого из-за перенормировки энергии, много больше, чем доля импульса, передаваемого при переходном излучении. При наличии пучка частиц суммарный импульс, передаваемый границе, конечно, возрастает. Наконец, при прохождении релятивистских частиц через пластинку, размер которой больше зоны формирования, пластинка должна испытать два разделенных во времени импульса противоположного знака за счет импульса, передаваемого на передней и задней границе пластинки.

Эти и другие вопросы должны подробно обсуждаться при конкретной экспериментальной постановке задачи об измерении соответствующих импульсов и, естественно, это выходит за рамки настоящей книги. Здесь мы хотели лишь обратить внимание на широкий круг экспериментально не исследованных, но небезынттересных задач, связанных с переходным излучением.

Стоит отметить и возможность использования физических представлений о перенормировке энергии для оценки полной энергии переходного излучения в довольно сложных структурах, резко изменяющихся в пространстве или во времени (например, при вылете частиц или сгустков из сложных волноводов и т. п., см. [32]). Перестройка собственного поля при наличии достаточно резкой границы приводит, в конечном счете, к переходному излучению. Поэтому при наличии сложных структур (волноводов, препятствий и т.п.) оценку переходного излучения можно в ряде случаев дать, зная разницу энергий собственных полей источников в двух структурах (при условии, что граница между ними достаточно резкая). Так может быть оценена энергия переходного излучения при влете или вылете зарядов в сложные волноводные структуры, в частности, заполненные средой. И, наконец, последнее замечание о законах сохранения (2.284) и (2.308) с передачей энергии или импульса среде (или границе раздела). Передача либо энергии, либо импульса является необходимым условием излучения (если условие излучения В.—Ч. не выполнено), так же как, например, в случае тормозного излучения частиц необходимым условием является то, что часть импульса или энергии должна забрать одна из сталкивающихся частиц. Сходство законов сохранения при переходном излучении с законами сохранения для тормозного излучения не удивительно, так как уже простейшая интерпретация переходного излучения для идеального проводника (зеркала) связана с рассмотрением мгновенного торможения заряда и изображения (§ 2.1). Мы увидим также, что законы сохранения (2.284), (2.308) аналогичны соответствующим законам сохранения при переходном рассеянии (гл. 4).

ГЛАВА 3

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 3.1. Переходное излучение поверхностных волн

1. Введение. Переходное излучение может возникнуть в весьма разнообразных условиях и от разных источников. Ниже мы остановимся на ряде соответствующих задач. Именно, будет рассмотрено переходное излучение для различных сред (анизотропных, магнитоактивных, гиротропных и более общих сред с пространственной дисперсией), для разных типов излучаемых волн (поверхностных волн, экситонов, фононов и т. д.) и, наконец, различных источников (зарядов, электрических и магнитных диполей, квадрупольей, сгустков зарядов, токов). Остановимся мы и на интерференции переходного излучения с излучением В.—Ч., а также на интерференции переходного излучения, возникающего на различных границах. Наконец, мы постараемся осветить проблему индуцированного переходного излучения. Из разобранных задач и вопросов можно, как мы надеемся, лучше понять также общую физическую и теоретическую ситуацию в отношении переходного излучения и, кроме того, оценить возможную роль переходного излучения в различных областях физики. При этом мы оставляем в стороне важный (в частности, для приложений) круг вопросов о переходном излучении при наличии различных внешних структур (препятствий), волноводов и т. д. (как упоминалось в гл. 1, некоторые типы возникающего при этом излучения иногда называют дифракционными; см. [32]). Не будем мы подробно останавливаться ниже и на учете поглощения (существенного при сопоставлении с экспериментами по переходному излучению), а также касаться ряда деталей, связанных с переходным излучением в каналах и щелях, кристаллах, жидких кристаллах и т. д.

2. Поверхностные волны. Как известно, на границе раздела сред могут, при определенных условиях, распространяться поверхностные волны различных типов. Здесь мы ограничимся рассмотрением поверхностных электромагнитных волн, причем

в условиях, когда пространственной дисперсией можно пренебречь (см., например, [61] и [64]).

Пусть имеется граница раздела сред 1 и 2. Среды здесь считаем непоглощающими. Они характеризуются проницаемостями ϵ_1, μ_1 и ϵ_2, μ_2 . Вначале будем считать поверхностные волны свободными, точнее, заряд q и другие источники, которые могут возбуждать поверхностные волны, будем считать отсутствующими. Поверхностные волны локализованы у границы, т. е. экспоненциально убывают от границы $z=0$ в обе стороны (рис. 6).

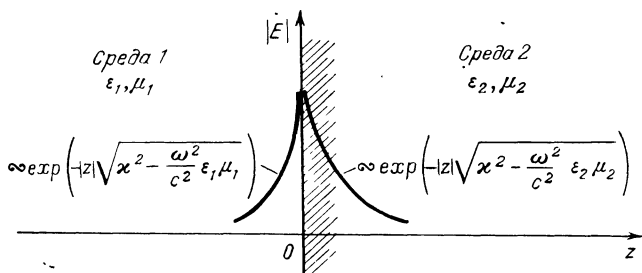


Рис. 6. Схематическое изображение напряженности электрического поля поверхностной волны.

Для описания поля поверхностных волн можно воспользоваться решением (2.20), считая, что в среде 1 $\kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_1 \mu_1$, а в среде 2 $\kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_2 \mu_2$. Выполнение этих двух условий обеспечивает экспоненциальное убывание поля от границы: в среде 1 волна убывает в сторону $z < 0$, т. е. $E^{(1)} \propto \exp(z\sqrt{\kappa^2 - \epsilon_1 \mu_1 \omega^2 / c^2})$, а в среде 2 волна убывает в сторону $z > 0$, т. е. $E^{(2)} \propto \exp(-z\sqrt{\kappa^2 - \epsilon_2 \mu_2 \omega^2 / c^2})$. Граничные условия (2.18) те же, что и использованные при получении выражений (2.25) и (2.26). Поэтому для нахождения дисперсионного уравнения поверхностных волн достаточно в (2.25), (2.26) отбросить члены, обязанные своим появлением собственному полю заряда. Таким образом, имеем

$$\epsilon_1 a_1 = \epsilon_2 a_2, \quad a_1 \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_1 \mu_1} = -a_2 \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_2 \mu_2}. \quad (3.1)$$

Отсюда *)

$$\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa} \equiv \epsilon_1 \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_2 \mu_2} + \epsilon_2 \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_1 \mu_1} = 0; \quad \kappa = |\kappa|. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) является дисперсионным уравнением поверхностных волн, т. е. определяет зависимость частоты поверхност-

*) Введенная величина $\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa}$ связана с так называемым поверхностным импедансом $\zeta_{\omega, \kappa}$ соотношением $\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa} = \zeta_{\omega, \kappa} \epsilon_1 \epsilon_2 \kappa c / \omega$ (см. § 3.4, формулы (3.147), (3.161)).

ных волн ω от κ . В частности, для медленных волн $\kappa^2 c^2 / \omega^2 \gg \gg \epsilon_1 \mu_1, \epsilon_2 \mu_2$ (этот случай отвечает пренебрежению запаздыванием; формально он осуществляется при $c \rightarrow \infty$) получаем

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0. \quad (3.3)$$

Если среда с $\epsilon_1 = \epsilon$ граничит с вакуумом ($\epsilon_2 = 1$), то из (3.3) имеем

$$\epsilon = -1. \quad (3.4)$$

Для $\epsilon = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$, отсюда $\omega = \omega_{pe} / \sqrt{2}$. Такова частота поверхностной плазменной волны (при пренебрежении пространственной дисперсией).

В общем случае уравнение (3.2) дает

$$\omega = \omega_s(\kappa), \quad (3.5)$$

т. е. описывает зависимость частоты поверхностной волны от ее волнового числа.

3. Переходное излучение поверхностных волн. Рассмотрим теперь задачу о нормальном падении заряда на границу раздела двух изотропных сред. Найденные в § 2.2 амплитуды (2.27), (2.28) поля переходного излучения содержат вклады, связанные с излучением поверхностных волн. Действительно, проведенное вычисление амплитуд a_1 и a_2 не ограничено предположением $\kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon_1 \mu_1, \epsilon_2 \mu_2$ и справедливо и при выполнении противоположных неравенств. Неравенство $\kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon_2 \mu_2$ использовалось в § 2.2 лишь при подсчете энергии переходного излучения в среде 2 (вперед), так как считалось, что среда 2 прозрачна и волны свободно уходят далеко от границы (соотношение же между $\kappa^2 c^2 / \omega^2$ и $\epsilon_1 \mu_1$ могло быть произвольным). При подсчете энергии излучения в среде 1 (назад) в § 2.2 считалось, что волны свободно распространяются в среде 1, т. е. $\kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon_1 \mu_1$, тогда как соотношение между $\kappa^2 c^2 / \omega^2$ и $\epsilon_2 \mu_2$ произвольно. Если $\epsilon_1 \mu_1 < \kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon_2 \mu_2$, то волны свободно распространяются в среде 2, но экспоненциально убывают в среде 1; далеко от границы в среде 2 тогда имеются те волны, которые будучи испущенными в среде 2 в сторону границы, претерпели на ней полное внутреннее отражение (в силу $\kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_1 \mu_1$ они не проникают в среду 1 существенно глубже, чем на длину волны) и дали вклад в излучение вперед (напомним, что угол θ_2 между $\mathbf{k}$ и $\hat{\mathbf{v}}$ в среде 2 определяется соотношением $\sin^2 \theta_2 = \kappa^2 c^2 / (\omega^2 \epsilon_2 \mu_2)$, а условие $\kappa^2 c^2 / \omega^2 = \epsilon_1 \mu_1$ как раз соответствует углу полного внутреннего отражения $\sin^2 \theta_2 = \epsilon_1 \mu_1 / \epsilon_2 \mu_2$). Естественно, выполнение условия $\epsilon_1 \mu_1 < \kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon_2 \mu_2$ предполагает, что $\epsilon_2 \mu_2 > \epsilon_1 \mu_1$. Если же выполнено противоположное неравенство, т. е. $\epsilon_2 \mu_2 < \epsilon_1 \mu_1$, то существуют значения $\kappa^2 c^2 / \omega^2$, удовлетворяющие неравенствам $\epsilon_1 \mu_1 > \kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_2 \mu_2$. В этом случае волны свободно уходят в среду 1 и испытывают полное внутреннее отражение от среды 2. Таким образом, при $\kappa^2 c^2 / \omega^2 < \epsilon_1 \mu_1, \epsilon_2 \mu_2$ волны свободно уходят как

в среду 1, так и в среду 2. Если $\kappa^2 c^2 / \omega^2$ попадает между $\epsilon_1 \mu_1$ и $\epsilon_2 \mu_2$, то волны свободно уходят либо в среду 1, либо в среду 2 (в зависимости от того, больше или меньше $\epsilon_1 \mu_1$ чем $\epsilon_2 \mu_2$). Их энергия во всех перечисленных случаях сосредоточена, в конечном счете, в волнах, далеко ушедших от границы. При одновременном выполнении двух условий

$$\kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_1 \mu_1, \quad \kappa^2 c^2 / \omega^2 > \epsilon_2 \mu_2 \quad (3.6)$$

волны не отходят от границы, т. е. представляют собой поверхностные волны, распространяющиеся вдоль границы. Они, естественно, не вошли в подсчитанную в § 2.2 энергию волн, далеко ушедших от границы раздела сред.

Для расчета энергии, излученной зарядом в виде поверхностных волн, нужно найти энергию поля поверхностных волн при $t \rightarrow \infty$ при выполнении условий (3.6). Обозначим энергию переходного излучения поверхностных волн через W^s . Для расчета W^s нужно учесть, что электрическая и магнитная энергии поверхностных волн (в отличие от случая объемных волн, рассмотренных в § 2.2), вообще говоря, не равны друг другу и что экспоненциальное убывание поля поверхностных волн от границы не приводит при интегрировании по z к $\delta(\omega - \omega')$ (как это было для объемных волн; см. (2.35)). Имеем

$$\begin{aligned} W^s = & \frac{1}{4\pi} \int_{t \rightarrow \infty} d\mathbf{r}_\perp \int_0^\infty dz \left\{ \int_{-\infty}^t dt' \left[E^{r(2)}(\mathbf{r}, t') \frac{\partial}{\partial t'} \epsilon_2 E^{r(2)}(\mathbf{r}, t') + \right. \right. \\ & \left. \left. + E_\perp^{r(2)}(\mathbf{r}, t') \frac{\partial}{\partial t'} \epsilon_2 E_\perp^{r(2)}(\mathbf{r}, t') \right] + \frac{1}{2} \mu_2 (H_\perp^{r(2)}(\mathbf{r}, t))^2 \right\} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{t \rightarrow \infty} d\mathbf{r}_\perp \int_{-\infty}^0 dz \left\{ \int_{-\infty}^t \left[E^{r(1)}(\mathbf{r}, t') \frac{\partial}{\partial t'} \epsilon_1 E^{r(1)}(\mathbf{r}, t') + \right. \right. \\ & \left. \left. + E_\perp^{r(1)}(\mathbf{r}, t') \frac{\partial}{\partial t'} \epsilon_1 E_\perp^{r(1)}(\mathbf{r}, t') \right] dt' + \frac{1}{2} \mu_1 (H_\perp^{r(1)}(\mathbf{r}, t))^2 \right\}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Здесь E^r — продольная (вдоль z) компонента напряженности электрического поля излучения; соответствующая продольная компонента напряженности магнитного поля равна нулю: $H^r = 0$. Дисперсия (частотная) будет учитываться только в ϵ_1 и ϵ_2 , но не в μ_1 и μ_2 . В соответствии с этим плотность магнитной энергии в (3.7) записана как $\mu H^2 / 8\pi$, а плотность электрической энергии как

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^t \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t'} dt'. \quad (3.8)$$

Подставив в (3.7) разложение полей (2.12) и симметризуя резуль-

тат путем замен $\omega \rightleftharpoons -\omega'$, $\kappa \rightleftharpoons -\kappa$, получаем

$$\begin{aligned}
 W^8 = & \frac{\pi}{2} \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^\infty d\omega d\omega' \int \left[\frac{\varepsilon_2(\omega) \omega - \varepsilon_2(-\omega') \omega'}{\omega - \omega'} \times \right. \\
 & \times (E_{\omega, \kappa}^{r(2)}(z) E_{-\omega', -\kappa}^{r(2)}(z) + E_{\perp, \omega, \kappa}^{r(2)}(z) E_{\perp, -\omega', -\kappa}^{r(2)}(z)) + \\
 & + \mu_2 \mathbf{H}_{\perp, \omega, \kappa}^{r(2)}(z) \mathbf{H}_{\perp, -\omega', -\kappa}^{r(2)}(z) \left. \right] \exp[-i(\omega - \omega')t] d\kappa + \\
 & + \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^\infty d\omega d\omega' \int \left[\frac{\varepsilon_1(\omega) \omega - \varepsilon_1(-\omega') \omega'}{\omega - \omega'} \times \right. \\
 & \times (E_{\omega, \kappa}^{r(1)}(z) E_{-\omega', -\kappa}^{r(1)}(z) + E_{\perp, \omega, \kappa}^{r(1)}(z) E_{\perp, -\omega', -\kappa}^{r(1)}(z)) + \\
 & + \mu_1 \mathbf{H}_{\perp, \omega, \kappa}^{r(1)}(z) \mathbf{H}_{\perp, -\omega', -\kappa}^{r(1)}(z) \left. \right] \exp[-i(\omega - \omega')t] d\kappa; \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

При $\omega' \rightarrow \omega$ множитель $[\varepsilon_2(\omega)\omega - \varepsilon_2(-\omega')\omega']/(\omega - \omega')$ в (3.9) стремится к $(\partial/\partial\omega)\omega\varepsilon_2(\omega)$ (в силу отсутствия поглощения $\varepsilon_2(-\omega) = \varepsilon_2(\omega)$). То же самое имеет место и для аналогичного множителя в среде 1 ($z < 0$)*).

Фактически энергия (3.9) при $\omega \neq \omega'$ сильно осциллирует во времени и при $t \rightarrow \infty$ должны сохраняться члены, соответствующие $\omega = \omega'$. Для того чтобы доказать последнее, нужно учесть, что с помощью соотношений (2.15), (2.16), (2.20), (2.24) можно входящие в (3.9) поля выразить через амплитуды поля излучения a_1 и a_2 (см. (2.20), (2.27), (2.28)). Нам удобно в данном случае, учитывая соотношение (3.6), выделить в амплитудах a_1 и a_2 поверхностный импеданс (3.2):

$$a_2 = -i \frac{\omega}{|\omega|} \frac{1}{\zeta_{\omega, \kappa}} b_{2, \omega, \kappa}, \quad a_1 = -i \frac{\omega}{|\omega|} \frac{1}{\zeta_{\omega, \kappa}} b_{1, \omega, \kappa}. \quad (3.10)$$

Согласно (2.27), (2.28) имеем

$$\begin{aligned}
 b_{2, \omega, \kappa} = & \frac{\nu \kappa^2 c^2}{c \omega^2} \left[\frac{1 + i \frac{\omega}{|\omega|} \frac{\nu}{c} \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_1 \mu_1}}{1 - \varepsilon_1 \mu_1 \frac{\nu^2}{c^2} + \frac{\kappa^2 \nu^2}{\omega^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + i \frac{\omega}{|\omega|} \frac{\nu}{c} \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_1 \mu_1}}{1 - \varepsilon_2 \mu_2 \frac{\nu^2}{c^2} + \frac{\kappa^2 \nu^2}{\omega^2}} \right], \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

*) Появление в электрической энергии, при учете дисперсии, множителя $\frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon$ вместо ε хорошо известно (см., например, [61]).

$$b_{1,\omega,\kappa} = \frac{v}{c} \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \left[\frac{1 - i \frac{\omega}{|\omega|} \frac{v}{c} \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_2 \mu_2}}{1 - \varepsilon_2 \mu_2 \frac{v^2}{c^2} + \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2}} - \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - i \frac{\omega}{|\omega|} \frac{v}{c} \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_2 \mu_2}}{1 - \varepsilon_1 \mu_1 \frac{v^2}{c^2} + \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2}} \right]. \quad (3.12)$$

Учитывая, далее, соотношение (2.22) и наличие знака плюс в формуле (2.20) для области 2, получаем вместо (2.33) интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp \left[-z \left(\sqrt{\kappa^2 - \mu_2 \varepsilon_2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}} + \sqrt{\kappa^2 - \mu_2 \varepsilon_2(-\omega') \frac{\omega'^2}{c^2}} \right) \right] = \left(\sqrt{\kappa^2 - \mu_2 \varepsilon_2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}} + \sqrt{\kappa^2 - \mu_2 \varepsilon_2(-\omega') \frac{\omega'^2}{c^2}} \right)^{-1}. \quad (3.13)$$

Соответственно в среде 1 имеем

$$\int_{-\infty}^0 dz \exp \left[z \left(\sqrt{\kappa^2 - \mu_1 \varepsilon_1(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}} + \sqrt{\kappa^2 - \mu_1 \varepsilon_1(-\omega') \frac{\omega'^2}{c^2}} \right) \right] = \left(\sqrt{\kappa^2 - \mu_1 \varepsilon_1(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}} + \sqrt{\kappa^2 - \mu_1 \varepsilon_1(-\omega') \frac{\omega'^2}{c^2}} \right)^{-1}. \quad (3.14)$$

В результате энергия W^s выражается через амплитуды b_1 и b_2 :

$$\begin{aligned} W^s = & \frac{q^2}{8\pi^2} \int_0^\infty d\kappa^2 \int_{-\infty}^\infty d\omega d\omega' \frac{b_{2,\omega,\kappa} b_{2,-\omega',\kappa}}{|\omega| |\omega'| \tilde{\zeta}_{\omega,\kappa} \tilde{\zeta}_{-\omega',\kappa}} \exp[-i(\omega - \omega')t] \times \\ & \times \left(\sqrt{\kappa^2 - \mu_2 \varepsilon_2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}} + \sqrt{\kappa^2 - \mu_2 \varepsilon_2(-\omega') \frac{\omega'^2}{c^2}} \right)^{-1} \times \\ & \times \left[\frac{\varepsilon_2(\omega) \omega - \varepsilon_2(-\omega') \omega'}{\omega - \omega'} \left(1 + \frac{|\omega| |\omega'|}{\kappa^2 c^2} \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \mu_2 \varepsilon_2(\omega)} \times \right. \right. \\ & \times \left. \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega'^2} - \mu_2 \varepsilon_2(-\omega')} \right) + \frac{\varepsilon_2(\omega) \varepsilon_2(-\omega') \omega \omega'}{c^2 \kappa^2} \Big] + \\ & + \frac{q^2}{8\pi^2} \int_0^\infty d\kappa^2 \int_{-\infty}^\infty d\omega d\omega' \frac{b_{1,\omega,\kappa} b_{1,-\omega',\kappa}}{|\omega| |\omega'| \tilde{\zeta}_{\omega,\kappa} \tilde{\zeta}_{-\omega',\kappa}} \exp[-i(\omega - \omega')t] \times \\ & \times \left(\sqrt{\kappa^2 - \mu_1 \varepsilon_1(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}} + \sqrt{\kappa^2 - \mu_1 \varepsilon_1(-\omega') \frac{\omega'^2}{c^2}} \right)^{-1} \times \\ & \times \left[\frac{\varepsilon_1(\omega) \omega - \varepsilon_1(-\omega') \omega'}{\omega - \omega'} \left(1 + \frac{|\omega| |\omega'|}{\kappa^2 c^2} \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \mu_1 \varepsilon_1(\omega)} \times \right. \right. \\ & \times \left. \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega'^2} - \mu_1 \varepsilon_1(-\omega')} \right) + \frac{\varepsilon_1(\omega) \varepsilon_1(-\omega') \omega \omega'}{c^2 \kappa^2} \Big]. \quad (3.15) \end{aligned}$$

В формуле (3.15) нужно перейти к пределу $t \rightarrow \infty$, считая обе среды непоглощающими, т. е. пренебрегая мнимыми частями проницаемостей. Подынтегральное выражение (3.15) является быстро осциллирующей функцией времени, если только ω не стремится к ω' . Поэтому во всех выражениях под интегралом (3.15) можно положить $\omega = \omega'$, за исключением резонансных знаменателей $\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa}$ и $\tilde{\zeta}_{-\omega, \kappa}$, которые обращаются в нуль для поверхностных волн. Учтя $\varepsilon_{1,2}(-\omega') = \varepsilon_{1,2}(-\omega) = \varepsilon_{1,2}(\omega)$ (в силу отсутствия поглощения), получаем

$$W^s = \frac{q^2}{16\pi^2} \int_0^\infty d\kappa^2 \int_{-\infty}^\infty d\omega d\omega' \frac{\exp[-i(\omega - \omega')t]}{\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa} \tilde{\zeta}_{-\omega', \kappa}} \times \\ \times \left\{ \frac{|b_{2, \omega, \kappa}|^2}{\sqrt{\kappa^2 - \mu_2 \varepsilon_2(\omega) \omega^2 / c^2}} \left[\left(2 - \frac{\mu_2 \varepsilon_2(\omega) \omega^2}{\kappa^2 c^2} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon_2(\omega)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_2 \varepsilon_2^2(\omega) \omega^2}{\kappa^2 c^2} \right] + \frac{|b_{1, \omega, \kappa}|^2}{\sqrt{\kappa^2 - \mu_1 \varepsilon_1(\omega) \omega^2 / c^2}} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(2 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1(\omega) \omega^2}{\kappa^2 c^2} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon_1(\omega)) + \frac{\mu_1 \varepsilon_1^2(\omega) \omega^2}{\kappa^2 c^2} \right] \right\}; \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Здесь мы использовали $b_{1,2,-\omega, \kappa} = b_{1,2, \omega, \kappa}^*$. Далее, используя четность по ω и κ выражения в фигурных скобках (3.16), получаем *) ($\varphi(-\omega) = \varphi(\omega)$)

$$\int_{-\infty}^\infty d\omega \varphi(\omega) \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp[-i(\omega - \omega')t] d\omega'}{\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa} \tilde{\zeta}_{-\omega', \kappa}} = 8\pi^2 \int_0^\infty \frac{\delta(\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa})}{\frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{\zeta}_{\omega, \kappa}} \varphi(\omega) d\omega; \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

При получении (3.17) было использовано условие $\frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{\zeta}_{\omega, \kappa} > 0$ для значений ω и κ , удовлетворяющих дисперсионному уравнению

*) Для доказательства соотношения (3.17) нужно учесть возможность резонанса $\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa} = 0$ и использовать для $1/\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa}$ следующую формулу:

$$\frac{1}{\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa}} = P \left(\frac{1}{\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa}} \right) - i \frac{\omega}{|\omega|} \pi \delta(\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa}),$$

где P — символ главного значения; аналогичную формулу нужно использовать для $1/\tilde{\zeta}_{-\omega', \kappa}$; далее, необходимо $\tilde{\zeta}_{-\omega', \kappa}$ разложить по $\omega' - \omega$, используя первые два члена такого разложения: $\tilde{\zeta}_{-\omega', \kappa} = \tilde{\zeta}_{-\omega, \kappa} + (\omega' - \omega) \frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{\zeta}_{-\omega, \kappa}$, и, наконец, используя $\tilde{\zeta}_{-\omega, \kappa} = \tilde{\zeta}_{\omega, \kappa}$ (отсутствие затухания), преобразовать интеграл к положительным частотам и учесть, что

$$\frac{\sin xt}{x} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \pi \delta(x).$$

нию для поверхностных волн $\bar{\xi}_{\omega, \kappa} = 0$. Это условие означает фактически положительность энергии поверхностных волн и в равновесных средах всегда выполняется. В том, что энергия поверхностных волн пропорциональна $\frac{\partial}{\partial \omega} \bar{\xi}_{\omega, \kappa}$, можно убедиться и из (3.16) (см. ниже).

Используя соотношение $\bar{\xi}_{\omega, \kappa} = 0$, которое применительно к рассматриваемой задаче о переходном излучении поверхностных волн следует из (3.17), можно найти соотношение между амплитудами b_2 (3.11) и b_1 (3.12):

$$b_{\omega, \kappa} \equiv \varepsilon_2 b_{2, \omega, \kappa} = \varepsilon_1 b_{1, \omega, \kappa} = (v/c) (\kappa^2 c^2 / \omega^2) \times \\ \times \left[\frac{\varepsilon_2}{1 - i \frac{v}{c} \frac{\omega}{|\omega|} \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_1 \mu_1}} - \frac{\varepsilon_1}{1 + i \frac{v}{c} \frac{\omega}{|\omega|} \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_2 \mu_2}} \right], \quad (3.18)$$

и, следовательно, получить

$$W^s = \frac{q^2}{2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \int_0^\infty \frac{|b_{\omega, \kappa}|^2 \delta(\bar{\xi}_{\omega, \kappa})}{\frac{\partial}{\partial \omega} \bar{\xi}_{\omega, \kappa}} \times \\ \times \left[\frac{(2 - \varepsilon_2 \mu_2 \omega^2 / \kappa^2 c^2) \varepsilon_2^{-2} (\partial \omega \varepsilon_2 / \partial \omega) + \mu_2 \omega^2 / \kappa^2 c^2}{\sqrt{\kappa^2 - \varepsilon_2 \mu_2 \omega^2 / c^2}} + \right. \\ \left. + \frac{(2 - \varepsilon_1 \mu_1 \omega^2 / \kappa^2 c^2) \varepsilon_1^{-2} (\partial \omega \varepsilon_1 / \partial \omega) + \mu_1 \omega^2 / \kappa^2 c^2}{\sqrt{\kappa^2 - \varepsilon_1 \mu_1 \omega^2 / c^2}} \right] d\kappa^2. \quad (3.19)$$

Далее, при $\bar{\xi}_{\omega, \kappa} = 0$ легко получить

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \bar{\xi}_{\omega, \kappa} = - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa^2 c}{2 \omega^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - \varepsilon_2 \mu_2 \omega^2 / c^2}} \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{\varepsilon_2^2} \left(2 - \frac{\varepsilon_2 \mu_2 \omega^2}{\kappa^2 c^2} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon_2) + \frac{\mu_2 \omega^2}{\kappa^2 c^2} \right] + \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - \varepsilon_1 \mu_1 \omega^2 / c^2}} \left[\frac{1}{\varepsilon_1^2} \left(2 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1 \omega^2}{\kappa^2 c^2} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon_1) + \frac{\mu_1 \omega^2}{\kappa^2 c^2} \right] \right\}. \quad (3.20)$$

В силу дисперсионного уравнения (3.2) имеем $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$ (либо $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$, либо, наоборот, $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_2 > 0$).

Таким образом, действительно, энергия поверхностных волн пропорциональна $\frac{\partial}{\partial \omega} \bar{\xi}_{\omega, \kappa}$ (т. е. квадратной скобке в (3.19)) *).

*) Этот результат носит общий характер, хотя здесь он был получен для случая энергии поверхностных волн, излученных зарядом q .

В силу соотношения (3.20) множители $\frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{\zeta}_{\omega, \kappa}$ в (3.19) сокращаются (аналогично тому, как для объемных волн сокращаются множители $\frac{\partial}{\partial \omega} \epsilon$, учитывающие дисперсию). Окончательно получаем

$$W^s = \frac{q^2}{c} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{|b_{\omega, \kappa}|^2 \delta(\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa})}{\kappa^2 |\epsilon_1(\omega) \epsilon_2(\omega)|} d\kappa^2. \quad (3.21)$$

Проведем теперь в (3.21) интегрирование по κ^2 с помощью δ -функции. Уравнение $\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa} = 0$ имеет относительно κ^2 только один корень

$$\kappa^2 \equiv \kappa_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_1^2 \epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_2^2 \epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}, \quad (3.22)$$

и, следовательно,

$$\delta(\tilde{\zeta}_{\omega, \kappa}) = \delta(\kappa^2 - \kappa_0^2) \left(\frac{\partial}{\partial \kappa^2} \tilde{\zeta}_{\omega, \kappa} \right)^{-1}. \quad (3.23)$$

В результате энергия поверхностных волн, излученная зарядом q , равна

$$W^s = \int_0^\infty W^s(\omega) d\omega, \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} W^s(\omega) = & \frac{2q^2 v^2 (\epsilon_1^2 \epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_2^2 \epsilon_1 \mu_1)}{c^3 (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}} \times \\ & \times [1 + (v^2/c^2) (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 (\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1) / (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)] \times \\ & \times [1 + (v^2/c^2) \epsilon_1^2 (\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1) / (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)]^{-1} \times \\ & \times [1 + (v^2/c^2) \epsilon_2^2 (\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1) / (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ограничения при интегрировании по частотам в (3.24) определяются выполнением трех условий: $\kappa_0^2 > 0$ (см. (3.22)) и условий (3.6).

Подставив в (3.6) соотношения (3.22), получаем

$$\frac{\epsilon_1^2 (\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1)}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} > 0, \quad \frac{\epsilon_2^2 (\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1)}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} > 0, \quad \frac{\epsilon_1^2 \epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_2^2 \epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} > 0. \quad (3.26)$$

Для $\mu_1 = \mu_2 = 1$ условия (3.26) означают

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 < 0, \quad \epsilon_1 \epsilon_2 < 0, \quad (3.27)$$

а соотношение (3.22) имеет вид (см. [64])

$$\kappa_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (3.28)$$

Энергия излучения (3.25) запишется тогда в виде

$$W^s(\omega) = \frac{2q^2 v^2 |\varepsilon_2 - \varepsilon_1| |\varepsilon_1 \varepsilon_2| [1 + (v^2/c^2) |\varepsilon_1 + \varepsilon_2|]}{c^3 \sqrt{|\varepsilon_1 + \varepsilon_2|} [|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| + (v^2/c^2) \varepsilon_1^2] [|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| + (v^2/c^2) \varepsilon_2^2]}. \quad (3.29)$$

В частном случае среды с $\varepsilon_1 = -|\varepsilon|$, граничащей с вакуумом ($\varepsilon_2 = 1$), условия (3.27) означают, что $\varepsilon_1 < -1$, а (3.29) переходит в результат, полученный в [62] (см. также [63, 63a]) *):

$$W^s(\omega) = \frac{2q^2 v^2 (1 + |\varepsilon|) |\varepsilon| [1 + (v^2/c^2) (|\varepsilon| - 1)]}{c^3 \sqrt{|\varepsilon| - 1} [|\varepsilon| - 1 + (v^2/c^2) |\varepsilon|^2] (|\varepsilon| - 1 + v^2/c^2)}. \quad (3.30)$$

Это выражение может расходиться при $|\varepsilon| \rightarrow 1$. Для плазмы $\varepsilon_1 = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ (т. е. $|\varepsilon| = \omega_{pe}^2/\omega^2 - 1$) и условие $\varepsilon_1 < -1$ означает, что $\omega < \omega_{pe}/\sqrt{2}$. В этом случае особенность имеет вид $1/\sqrt{\omega_{pe}/\sqrt{2} - \omega}$; интеграл по частотам не расходится, что позволяет сделать оценку полной энергии излучения поверхностных волн:

$$W^s = \int_0^\infty W^s(\omega) d\omega \sim \frac{q^2 v^2}{c^3} \omega_{pe}. \quad (3.31)$$

Сравнивая (3.31) с энергией переходного излучения объемных волн нерелятивистской частицы (2.51), мы видим, что энергия излучения поверхностных и объемных волн сравнимы по величине. Для ультрарелятивистских частиц ($v \rightarrow c$ в (3.31)) энергия излучения поверхностных волн пренебрежимо мала по сравнению с энергией излучения объемных волн. Излучение поверхностных волн, естественно, необходимо учитывать в общем балансе энергии. В гл. 2 баланс энергии был проведен в общем случае (для произвольных скоростей) только для переходного излучения при изменении свойств среды во времени, когда поверхностных волн нет, или в ультрарелятивистском пределе для переходного излучения на границе раздела, когда энергией переходного излучения поверхностных волн можно пренебречь. В общем же случае переходное излучение поверхностных волн на границе раздела сред, естественно, необходимо учитывать, точно так же, как в работе сил над зарядом (2.163) необходимо учитывать области κ^2 , для которых выполняются неравенства (3.6).

*) Результат [62] отличается от (3.30) отсутствием коэффициента 2, но, по-видимому, в [62] интеграл по ω распространяется и на отрицательные ω , тогда как в (3.24) и (3.31) $\omega > 0$.

Эта часть работы соответствует как работе поля излученных поверхностных волн, так и работе поля волн, испытавших полное внутреннее отражение (если выполняется только одно из неравенств (3.6)).

Описанные нами поверхностные волны являются простейшими, когда роль пространственной дисперсии мала. Вообще говоря, с учетом пространственной дисперсии, а также с учетом того, что граничные условия отражают конкретные физические свойства поверхностей, существует большое многообразие поверхностных волн (поверхностных поляритонов, экситонов и т. п., см. [64], § 11). Анализ переходного излучения различных поверхностных волн отдельными частицами или потоками частиц представляет собой один из перспективных методов в физике поверхностей (см., например, [221]). Наклонное или скользящее падение частиц на поверхность может увеличить их взаимодействие с поверхностью и привести (в случае пучка частиц) к индуцированному усилению поверхностных волн пучком (об индуцированном переходном излучении см. § 3.8).

§ 3.2. Переходное излучение при наличии излучения Вавилова — Черенкова

1. Постановка задачи. До сих пор мы считали, что условие излучения В.—Ч. не выполнено ни в одной из сред. В целом ряде случаев такое предположение оправдано, поскольку излучение В.—Ч. и переходное излучение могут лежать в совершенно разных частотных и угловых интервалах (например, для релятивистских частиц максимальная частота переходного излучения достигает значений $\omega \sim \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$, тогда как для излучения В.—Ч. она не может превышать ω_{pe}). Далее, например, в изотропной плазме условие излучения В.—Ч. для электромагнитных (поперечных) волн вообще никогда не выполняется (рассматриваются источники, движущиеся со скоростью $v < c$; об источниках со скоростью $v \geq c$ см. [1], гл. 9).

Тем не менее, нужно обсудить вопрос о том, как видоизменится переходное излучение, если условие В.—Ч. выполняется. Если среда, в которой выполняется условие В.—Ч., является бесконечной (полубесконечной), то при неучете поглощения полная энергия излучения В.—Ч., испущенная зарядом, движущимся с постоянной скоростью (например, когда скорость поддерживается внешним источником), неограниченно возрастает. Поэтому при реалистической постановке задачи нужно либо учитывать поглощение, либо считать траекторию заряда ограниченной, либо, например, рассматривать не полубесконечную среду, а пластинку. Ограничение траектории заряда приводит к дополнительному излучению старта и остановки (см. § 2.1). Искусственно же обрывать интегралы по пути без самосогласованного решения соответствующей электродинамической задачи (см. [65]) недостаточно последовательно.

Поэтому мы здесь остановимся на случае излучения заряда q , пролетающего через пластинку толщины d с проницаемостями ϵ_2, μ_2 (в которых учитывается поглощение), окруженную прозрачной средой с проницаемостями ϵ_1, μ_1 (рис. 7). (Случай, когда среда 1 представляет собой вакуум, рассмотрен в [66].) Мы будем, кроме того, считать, что заряд q падает нормально на

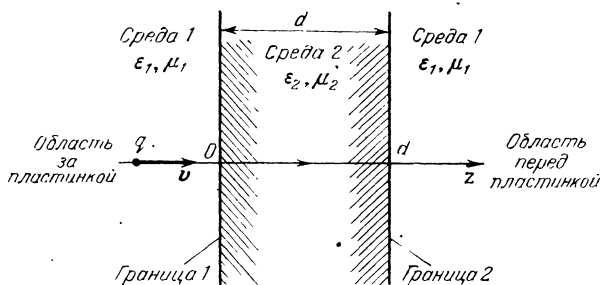


Рис. 7. Прохождение заряда q через пластинку. Область среды 1 справа от границы 2 называется областью перед пластинкой, а слева от границы 1 — областью за пластинкой.

пластинку, а также, что условие излучения В.—Ч. может быть выполнено только в среде 2, т. е. (для прозрачной среды 2):

$$\epsilon_2 \mu_2 v^2 / c^2 > 1, \quad (3.32)$$

тогда как в среде 1 оно не выполняется:

$$\epsilon_1 \mu_1 v^2 / c^2 < 1. \quad (3.33)$$

При этом, в принципе, возможны два случая: первый — это случай тонкой прозрачной пластинки, когда толщина пластинки меньше длины, на которой поглощается излучение в среде 2, и второй — это случай толстой непрозрачной пластинки, когда излучение, испущенное у первой границы, успеет поглотиться в среде 2, не дойдя до второй границы. В этом случае мы будем считать, что $\text{Im } \epsilon_2 \ll \text{Re } \epsilon_2$, так что все же для толстой пластинки можно говорить о приближенном выполнении условия (3.32) (в котором ϵ_2 заменено на действительную часть ϵ_2). В случае толстой пластинки излучение, испущенное вперед (в среду 1), будет, очевидно, тем же, что и при наличии только одной (второй) границы, так как излучение от первой границы будет поглощено в среде 2, не дойдя до второй границы. Точно так же в толстой пластинке излучение назад (в среду 1) будет таким же, как и при отсутствии второй границы. Вместе с тем, при выводе формул для энергии переходного излучения в гл. 2 мы не предполагаем отсутствия поглощения в обеих средах, а проведенный вывод, как легко видеть, пригоден и при выполнении в одной из сред условия излучения В.—Ч. Точнее, результаты гл. 2 для одной границы раздела применимы в случае, если в той среде, в которой рассматривается излучение, не выполнено условие излу-

чения В.—Ч. и эта среда является прозрачной. Таким образом, для толстой пластинки излучение вперед может быть получено из (2.41) заменой индексов $1 \rightleftharpoons 2$, а излучение назад может быть описано выражением (2.44) без каких-либо замен.

Мы подчеркнули здесь это обстоятельство по той причине, что, при выполнении условия излучения В.—Ч. в толстой пластинке, на вторую границу падает и выходит в среду I излучение В.—Ч., испущенное в среде 2 на расстоянии оптической толщи (длины пробега излучения) перед второй границей. Таким образом, формулы переходного излучения гл. 2 учитывают и излучение В.—Ч., испущенное до границы раздела сред (в среде I собственное поле работы не совершает). Появление в амплитудах a_1 и a_2 резонансных знаменателей (см. (2.27), (2.28)), обращающихся в нуль при выполнении условия излучения В.—Ч., и описывает выходящее излучение В.—Ч. (см. ниже).

Рассмотрим теперь постановку задачи о тонкой пластинке (размер d меньше оптической толщи). Если бы излучение происходило в бесконечной среде, то на длине d из-за эффекта В.—Ч. была бы испущена энергия (см. (2.23))

$$W_0^{V-\text{Ch}} = Q^{V-\text{Ch}} \frac{d}{v} = \frac{q^2 d}{c^2} \int_{\varepsilon_2 \mu_2 v^2 / c^2 > 1} \omega d\omega \mu_2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon_2 \mu_2} \right). \quad (3.34)$$

Наличие границ сказывается в том, что часть излучения может оказаться благодаря полному внутреннему отражению запертым внутри пластинки, часть пройдет через вторую границу раздела, часть отразится от второй границы и достигнет первой границы. В результате возникнут многократные отражения (и прохождения) излучения от границ пластинки. Излучение В.—Ч. выйдет в среду I как вперед (по скорости заряда), так и назад.

Коэффициент отражения излучения, падающего из среды 2 на границу со средой I , определяется формулой Френеля:

$$R = \left| \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} + \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}} \right|^2, \quad (3.35)$$

а коэффициент прохождения T равен $1 - R$:

$$T = \frac{\text{Re} \left(4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} \right)}{\left| \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} \right|^2}. \quad (3.36)$$

Закон преломления (закон Снелиуса) имеет вид

$$\varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_1 = \kappa^2 c^2 / \omega^2 = \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2. \quad (3.37)$$

Условие же излучения В.—Ч. в среде 2 записывается в форме

$$\cos^2 \theta_2 = \frac{c^2}{v^2 \varepsilon_2 \mu_2}, \quad \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_2 \mu_2 - \frac{c^2}{v^2}, \quad (3.38)$$

и, следовательно, коэффициенты отражения и прохождения могут быть записаны в данном случае в виде

$$R_{V-Ch} = \left| \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sqrt{1 + (v^2/c^2)(\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2)}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sqrt{1 + (v^2/c^2)(\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2)}} \right|^2, \quad (3.39)$$

$$T_{V-Ch} = \frac{4 \operatorname{Re} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{1 + (v^2/c^2)(\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2)}}{\left| \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sqrt{1 + (v^2/c^2)(\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2)} \right|^2}.$$

В силу дисперсии проницаемостей, угол излучения В.—Ч. зависит от частоты. Углу полного внутреннего отражения соответствует частота, для которой $\sin^2 \theta_1 = 1$, т. е. в силу (3.37)

$$\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_1 \mu_1 = \varepsilon_2 \mu_2 - \frac{c^2}{v^2}, \quad 1 + \frac{v^2}{c^2} (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2) = 0. \quad (3.40)$$

При этом согласно (3.39) $R = 1$, $T = 0$. Таким образом, условия, которые должны выполняться для выходящего излучения В.—Ч., имеют вид

$$1 < \varepsilon_2 \mu_2 v^2 / c^2 < 1 + \varepsilon_1 \mu_1 v^2 / c^2. \quad (3.41)$$

Излучение В.—Ч., выходящее в среду I по движению частицы, соответствует либо однократному прохождению, либо четному числу отражений и однократному прохождению, тогда как излучение В.—Ч. в среде I за пластинкой *) соответствует нечетному числу отражений плюс одно прохождение. Обозначим через W_+^{V-Ch} энергию излучения В.—Ч., вышедшую перед пластинкой, а через W_-^{V-Ch} — соответственно за пластинкой. Тогда

$$W_+^{V-Ch} = \frac{q^2 d}{c^2} \int_{\substack{1 + \varepsilon_1 \mu_1 v^2 / c^2 > \\ > \varepsilon_2 \mu_2 v^2 / c^2 > 1}} \omega d\omega \mu_2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon_2 \mu_2} \right) (1 - R_{V-Ch}) \sum_{n=0}^{\infty} R_{V-Ch}^n =$$

$$= \frac{q^2 d}{c^2} \int_{\substack{1 + \varepsilon_1 \mu_1 v^2 / c^2 > \\ > \varepsilon_2 \mu_2 v^2 / c^2 > 1}} \omega d\omega \mu_2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon_2 \mu_2} \right) \frac{1}{(1 + R_{V-Ch})}, \quad (3.42)$$

$$W_-^{V-Ch} = \frac{q^2 d}{c^2} \int_{\substack{1 + \varepsilon_1 \mu_1 v^2 / c^2 > \\ > \varepsilon_2 \mu_2 v^2 / c^2 > 1}} \omega d\omega \mu_2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon_2 \mu_2} \right) \frac{R_{V-Ch}}{(1 + R_{V-Ch})}. \quad (3.43)$$

Вообще говоря, в задаче о пластинке нужно учитывать фазовые соотношения отраженных и преломленных волн, которые существенны, если на толщине d укладывается целое число полуволн.

*) Областью перед пластинкой (см. рис. 7) называем область среды I справа от второй границы, а областью за пластинкой — соответственно слева от первой (по ходу движения заряда) границы. Среда считается поглощающей.

Результат (3.42), (3.43) соответствует тому, что учитывается лишь усредненный по фазам эффект.

Складывая (3.42) и (3.43), получим (3.34), но, разумеется, при условии отсутствия полного внутреннего отражения, т. е. при условии $\epsilon_2 \mu_2 v^2 / c^2 < 1 + \epsilon_1 \mu_1 v^2 / c^2$.

Говоря о толстой или тонкой пластинке по отношению к поглощению волн, нужно также иметь в виду еще отношение толщины пластинки к длине зоны формирования переходного излучения, которая при выполнении условия излучения В.—Ч., вообще говоря, не сильно отличается от длины волны излучения. Мы здесь будем считать в этом отношении пластинку толстой, т. е. d намного превосходящим зону формирования. Теперь мы можем точно определить энергию переходного излучения перед пластинкой W_+^{tr} и за пластинкой W_-^{tr} как разность между полным излучением перед пластинкой W_+^{r} и величиной (3.42) и соответственно как разность между полным излучением за пластинкой W_-^{r} и величиной (3.43):

$$W_+^{\text{tr}} = W_+^{\text{r}} - W_+^{\text{V-Ch}}, \quad W_-^{\text{tr}} = W_-^{\text{r}} - W_-^{\text{V-Ch}}. \quad (3.44)$$

Расчет энергии излучения, вышедшей из толстой непрозрачной пластинки в поглощающей среде, позволит также дать ответ на упомянутую выше задачу об излучении В.—Ч., собираемом с длины пробега излучения в среде. Для этого достаточно рассмотреть предел $d \rightarrow \infty$ (или, точнее, случай, когда d намного превосходит пробег излучения В.—Ч. из-за поглощения).

2. Излучение заряда, пролетающего через пластинку. Проведем теперь расчет с учетом поглощения для пластинки произвольной толщины d . Поле во всех трех областях (см. рис. 7) перед пластинкой, за ней и в самой пластинке является суммой собственного поля (2.19) и поля излучения (2.20). За пластинкой (амплитуда $a_1^{(-)}$) нужно учесть только волну, распространяющуюся в направлении $z < 0$ (знак минус в (2.20)), перед пластинкой (амплитуда $a_1^{(+)}$) — в направлении $z > 0$ (знак плюс в (2.20)), а внутри пластинки (амплитуды $a_2^{(+)}$ и $a_2^{(-)}$) — оба типа волн. Пусть $z = 0$ соответствует первой границе пластинки, а $z = d$ — второй (см. рис. 7). Граничные условия на первой границе приводят к соотношениям, аналогичным (2.25), (2.26); необходимо лишь наряду с амплитудой $a_2^{(+)}$ (которая в (2.25), (2.26) обозначена просто a_2) учесть еще волну, распространяющуюся против v с амплитудой $a_2^{(-)}$:

$$\frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{\epsilon_1 \mu_1 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \epsilon_1 a_1^{(-)} = -\epsilon_2 (a_2^{(+)} + a_2^{(-)}) + \frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{\epsilon_2 \mu_2 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}; \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{v \varepsilon_1 (\varepsilon_1 \mu_1 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)} + \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} a_1^{(-)} = \\ & = \frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{v \varepsilon_2 (\varepsilon_2 \mu_2 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)} - \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} (a_2^{(+)} - a_2^{(-)}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Сходным образом записываются граничные условия на второй границе:

$$\begin{aligned} & \frac{(\kappa^2 c^2 / \omega^2) \exp(i \omega d / v)}{\varepsilon_2 \mu_2 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \varepsilon_2 a_2^{(+)} \exp\left(i \frac{\omega}{c} d \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right) - \\ & - \varepsilon_2 a_2^{(-)} \exp\left(-i \frac{\omega d}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right) = \\ & = \frac{(\kappa^2 c^2 / \omega^2) \exp(i \omega d / v)}{\varepsilon_1 \mu_1 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \varepsilon_1 a_1^{(+)} \exp\left(i \frac{\omega d}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\kappa^2 c^2 / \omega^2) \exp(i \omega d / v)}{v \varepsilon_2 (\varepsilon_2 \mu_2 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)} - \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \times \\ & \times \left[a_2^{(+)} \exp\left(i \frac{\omega d}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right) - a_2^{(-)} \exp\left(-i \frac{\omega d}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right) \right] = \\ & = \frac{(\kappa^2 c^2 / \omega^2) \exp(i \omega d / v)}{v \varepsilon_1 (\varepsilon_1 \mu_1 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)} - \\ & - \frac{a_1^{(+)}}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \exp\left(i \frac{\omega d}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Исключая, например, с помощью (3.45), (3.46) $a_2^{(+)}$ и $a_2^{(-)}$ из (3.47), (3.48), получаем выражение для интересующих нас амплитуд $a_1^{(+)}$ и $a_1^{(-)}$, определяющих соответственно энергию излучения перед пластинкой и за пластинкой:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1^{(+)} & \equiv a_1^{(+)} \exp(-i \omega d / v + i \omega d \tau_1 / c) = \\ & = (v/c) (\kappa^2 c^2 / \omega^2) (1 - \tau_2^2 v^2 / c^2)^{-1} (1 - \tau_1^2 v^2 / c^2)^{-1} (\varepsilon_2 \tau_1 + \varepsilon_1 \tau_2)^2 \times \\ & \times \exp(-i \omega d \tau_2 / c) - (\varepsilon_1 \tau_2 - \varepsilon_2 \tau_1)^2 \exp(i \omega d \tau_2 / c) - \{(\tau_2 \varepsilon_1 - \tau_1 \varepsilon_2)(1 - \\ & - \tau_2 v/c) [\exp(i \omega \tau_2 d / c)] [(1 + \tau_2 v/c)(1 - \varepsilon_2 / \varepsilon_1) - (v^2 / c^2)(\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)] + \\ & + (\tau_2 \varepsilon_1 + \tau_1 \varepsilon_2)(1 + \tau_2 v/c) \exp(-i \omega \tau_2 d / c) [(1 - \tau_2 v/c)(1 - \varepsilon_2 / \varepsilon_1) - \\ & - (v^2 / c^2)(\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)] + 2 \tau_2 [\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + (v^2 / c^2)(\varepsilon_1 \tau_1^2 - \varepsilon_2 \tau_2^2) + \\ & + (v^3 / c^3) \varepsilon_2 \tau_1 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)] \exp(-i \omega d / v)\}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$a_1^{(-)} = - \frac{(v/c) \kappa^2 c^2 / \omega^2}{(1 - \tau_2^2 v^2 / c^2)(1 - \tau_1^2 v^2 / c^2)} [(\varepsilon_2 \tau_1 + \varepsilon_1 \tau_2)^2 \exp(-i\omega \tau_2 d/c) - (\varepsilon_1 \tau_2 - \varepsilon_2 \tau_1)^2 \exp(i\omega \tau_2 d/c)]^{-1} \{(\tau_2 \varepsilon_1 - \tau_1 \varepsilon_2)(1 + v\tau_2/c) \exp(i\omega d\tau_2/c) \times \\ \times [(1 - v\tau_2/c)(1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1) - (v^2/c^2)(\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)] + (\tau_2 \varepsilon_1 + \tau_1 \varepsilon_2)(1 - v\tau_2/c) \exp(-i\omega \tau_2 d/c) [(1 + v\tau_2/c)(1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1) - (v^2/c^2)(\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)] + 2\tau_2 \exp(i\omega d/v) [\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + (v^2/c^2)(\varepsilon_1 \tau_1^2 - \varepsilon_2 \tau_2^2) - (v^3/c^3) \varepsilon_2 \tau_1 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)]\}, \quad (3.50)$$

где

$$\tau_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}, \quad \tau_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}. \quad (3.51)$$

Полная излученная энергия перед пластинкой (по скорости v) определяется формулой (2.38) (с заменой индексов 2 на 1)

$$W_+^r = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} \int_0^\infty \varepsilon_1 \tau_1 |\tilde{a}_1^{(+)}|^2 d\omega, \quad (3.52)$$

а за пластинкой — соответственно

$$W_-^r = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} \int_0^\infty \varepsilon_1 \tau_1 |a_1^{(-)}|^2 d\omega. \quad (3.53)$$

Здесь учтено, что $|\tilde{a}_1^{(+)}|^2 = |a_1^{(+)}|^2$. Заметим, что $W_-^r(v) = W_+^r(-v)$.

В частном случае $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$, т. е. когда диэлектрическая пластинка находится в вакууме, получим результат работы [66] (в [66] $\tilde{a}_1^{(+)}$ обозначено через $-\sin^2 \theta(v/c) B(\omega, \theta)$; $\tau_2 = x$, $\varepsilon \cos \theta = y$):

$$W_+^r = \frac{2q^2 v^2}{\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} |b|^2 \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta, \quad (3.54)$$

$$b = (\varepsilon - 1)[1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta]^{-1} (1 - \tau^2 v^2/c^2)^{-1} \times \\ \times [(\varepsilon \cos \theta + \tau)^2 \exp(-i\omega \tau d/c) - (\varepsilon \cos \theta - \tau)^2 \exp(i\omega \tau d/c)]^{-1} \times \\ \times [(\varepsilon \cos \theta - \tau)(1 + v\tau/c - v^2/c^2)(1 - v\tau/c) \exp(i\omega \tau d/c) + \\ + (\varepsilon \cos \theta + \tau)(1 - v\tau/c - v^2/c^2)(1 + v\tau/c) \exp(-i\omega \tau d/c) - \\ - 2\tau(1 - v^2/c^2 - v^2 \tau^2/c^2 - \varepsilon(v^3/c^3) \cos \theta) \exp(-i\omega d/v)], \quad (3.55)$$

где

$$\kappa^2 c^2 / \omega^2 = \sin^2 \theta, \quad \theta_1 = \theta, \quad \tau = \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}. \quad (3.56)$$

3. Случай прозрачной (тонкой) пластинки. Будем пренебрегать поглощением излучения в пластинке. Условие излучения В.—Ч. имеет вид ($\varepsilon_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$)

$$1 = \frac{v^2}{c^2} \tau^2 = \frac{v^2}{c^2} \varepsilon - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta^{V-\text{Ch}} = \frac{v^2}{c^2} \varepsilon \cos^2 \theta_2^{V-\text{Ch}}, \quad (3.57)$$

где θ_2^{V-Ch} — угол между скоростью частицы и направлением излучаемой волны внутри пластинки. Покажем, как из (3.54), (3.55) получится формула (3.42). По условию $\tau > 0$ и $v > 0$, т. е. условие В.—Ч. означает

$$\tau = c/v. \quad (3.58)$$

Далее, на конусе излучения В.—Ч. $1 - (v^2/c^2)\cos^2\theta^{V-Ch} = (v^2/c^2)(\varepsilon - 1)$ и, следовательно, в амплитуде излучения b множитель $(\varepsilon - 1)$ сокращается. Первый множитель в квадратных скобках числителя (3.55) пропорционален $(1 - \tau v/c)$, т. е. не имеет особенностей на конусе излучения В.—Ч. (он сокращается с таким же множителем в знаменателе (3.55)). Здесь мы этим членом пренебрежем, что оправдано, если $d \gg c/\omega$, т. е. если не учитывать переходного излучения (резонансные члены дают эффект, пропорциональный d , а нерезонансные — пропорциональный c/ω , т. е. относительный вклад отбрасываемого члена порядка $c/\omega d$). В оставшихся двух членах в квадратных скобках (3.55) мы в предэкспоненциальных множителях положим $\tau = c/v$.

При сделанных допущениях получаем

$$b \approx b_{V-Ch} = \frac{\exp[-i\omega d(1 - \tau v/c)/v] - 1}{(\varepsilon \cos \theta_{V-Ch} + c/v)(1 - \tau v/c)} \times \\ \times [1 - R_{V-Ch} \exp(2i\omega d/v)]^{-1}, \quad (3.59)$$

где R_{V-Ch} — коэффициент отражения, соответствующий (3.39):

$$R_{V-Ch} = \left[\frac{1 - (v/c) \varepsilon \cos \theta_{V-Ch}}{1 + (v/c) \varepsilon \cos \theta_{V-Ch}} \right]^2 = \left[\frac{1 - \varepsilon \sqrt{1 + (v^2/c^2)(1 - \varepsilon)}}{1 + \varepsilon \sqrt{1 + (v^2/c^2)(1 - \varepsilon)}} \right]^2. \quad (3.60)$$

Подставив (3.59) в (3.54), получаем

$$W_+^r = \frac{2q^2 v^2}{\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^2 \theta \frac{4 \sin^2 [\omega d(1 - \tau v/c)/2v]}{(1 - \tau v/c)^2 (\tau + \varepsilon \cos \theta_{V-Ch})^2} \times \\ \times \frac{d\theta}{1 + R_{V-Ch}^2 - 2 \cos \Psi R_{V-Ch}}; \quad \Psi = 2\omega \tau d/c. \quad (3.61)$$

Покажем, что формула (3.61) приближенно совпадает с (3.42). Подынтегральное выражение (3.61) содержит ярко выраженный максимум на конусе излучения В.—Ч., когда $\tau = c/v$. В центре максимума излучения В.—Ч. спектральная плотность излученной энергии пропорциональна d^2 , а ширина максимума обратно пропорциональна d . Поэтому полная интенсивность пропорциональна d . Действительно, при достаточно больших d ($d \gg c/\omega$ *)

*) При этом d должно еще удовлетворить условию прозрачности, т. е. быть меньше длины пробега излучения из-за поглощения.

можно воспользоваться асимптотической формулой

$$\frac{\sin xd}{x} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \pi \delta(x). \quad (3.62)$$

Получаем из (3.61)

$$W_+^r = \frac{4q^2v}{c^3} \int_0^\infty \omega d\omega \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d \sin^3 \theta \cos^2 \theta \delta(1 - \tau v/c) d\theta}{(\varepsilon \cos \theta_{V-Ch} + \tau)^2 (1 + R_{V-Ch}^2 - 2R_{V-Ch} \cos(2\omega\tau d/c))}. \quad (3.63)$$

Учитывая

$$\delta(1 - \tau v/c) = (c\tau/(v \cos \theta_{V-Ch})) \delta(\cos \theta - \cos \theta_{V-Ch}), \quad (3.64)$$

$$\sin^2 \theta_{V-Ch} = \varepsilon - c^2/v^2$$

и имея в виду, что, согласно (3.36), коэффициент прохождения T равен

$$T_{V-Ch} = \frac{4\varepsilon\tau \cos \theta_{V-Ch}}{(\tau + \varepsilon \cos \theta_{V-Ch})^2}, \quad (3.65)$$

получаем

$$W_+^r = \frac{q^2 d}{c^2} \int_{1+v^2/c^2 > \varepsilon v^2/c^2 > 1} \omega d\omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon}\right) \frac{T_{V-Ch}}{1 + R_{V-Ch}^2 - 2R_{V-Ch} \cos(2\omega d/v)}. \quad (3.66)$$

Усредняя этот результат по «фазе» $\Psi = 2\omega d/v$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{1 + R_{V-Ch}^2 - 2R_{V-Ch} \cos \psi} = \frac{1}{1 - R_{V-Ch}^2}, \quad (3.67)$$

убеждаемся в тождественности (3.66) с (3.42) (конечно, с учетом $\mu_1 = \varepsilon_1 = 1$, $\mu_2 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$).

Этот расчет мы провели для того, чтобы показать, какие приближения нужно сделать для получения формулы (3.42). Первое из них — это использование асимптотики (3.62). В реальных пластинках конечной толщины соотношение (3.62) выполняется, естественно, только приближенно. Поэтому поправки к формуле (3.42) излучения В.—Ч. возникают из-за разности между точным значением $(\sin xd)/x$ и его асимптотикой (3.62). Ясно также, что в пределах ширины резонанса В.—Ч. (см. (3.61))

$$\Delta(1 - \tau v/c) \sim 2v/\omega d \quad (3.68)$$

использовать (3.62) нельзя даже приближенно. Второе приближение состоит в усреднении (3.67). Третье ограничение связано с пренебрежением нерезонансными членами (не содержащими $1 - \tau v/c$ в знаменателе). Последние как раз и связаны с переходным излучением.

4. Переходное излучение в тонкой пластинке. Учет перерезаные члены в формуле (3.55), записав их приближенно на конусе излучения В.—Ч. в виде

$$b = b_{V-Ch} + \delta b, \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \delta b = & - \frac{(c/v) [1 - (v/c) \varepsilon \cos \theta_{V-Ch}] (1 - v^2/2c^2)}{[1 + (v/c) \varepsilon \cos \theta_{V-Ch}]^2} \times \\ & \times \frac{1 + \exp(2i\omega\tau d/c)}{1 - R_{V-Ch} \exp(2i\omega\tau d/c)} - \\ & - \frac{2(c/v) \{ \exp[-i\omega d(c/v - \tau)/c] - 1 \}}{[1 + \varepsilon(v/c) \cos \theta_{V-Ch}]^2 [1 - R_{V-Ch} \exp(2i\omega\tau d/c)]}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

При вычислении энергии переходного излучения необходимо использовать формулу (3.44)

$$W_+^{tr} = \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} W_+^{tr}(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (3.71a)$$

$$W_+^{tr}(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^2}{\pi^2 c^3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (|\delta b|^2 + 2 \operatorname{Re} b_{V-Ch} \delta b^*). \quad (3.71b)$$

Это соотношение имеет место при углах, не сильно отличающихся от угла излучения В.—Ч.

Напомним, что ширина максимума излучения В.—Ч. определяется (3.68).

Первый член (3.71b), пропорциональный $|\delta b|^2$, можно трактовать как эффект переходного излучения (от двух границ), а второй член (3.71b) — как эффект интерференции переходного излучения и излучения В.—Ч. Фактически, однако, надо иметь в виду, что имеется лишь суммарное излучение пластинки, которое состоит из части, пропорциональной d и описываемой приближенно (3.61), и части, не зависящей (в первом приближении) от d и описываемой (3.71b). Правда, в (3.71b) имеется еще зависимость от d , входящая в $\Psi = 2\omega\tau d/c$. Однако при усреднении по Ψ (которое, кстати, не обязательно) эта зависимость исчезает. Интегрирование по углам в (3.71a) затруднительно, так как формула (3.70) пригодна лишь при углах, близких к θ_{V-Ch} . Поэтому целесообразно привести общее выражение для b при произвольных углах (а не только при углах, близких к θ_{V-Ch}) в форме, в которой явно выделен резонансный член:

$$\begin{aligned} b = & \frac{2\tau [1 + (v/c) \varepsilon \cos \theta] (\varepsilon - 1) v^2/c^2}{[1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta] (\tau + \varepsilon \cos \theta)^2 (1 - \tau^2 v^2/c^2)} \times \\ & \times \frac{\exp[-i(\omega/c)(c/v - \tau)d] - 1}{1 - R \exp(2i\omega\tau d/c)} + \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon \cos \theta - \tau)}{(\varepsilon \cos \theta + \tau)^2} \times \\ & \times \frac{[1 - (v^2/c^2)(1 + \tau v/c)^{-1}] [\exp(2i\omega\tau d/c) + 1]}{[1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta] [1 - R \exp(2i\omega\tau d/c)]} - \\ & - \frac{2\tau (\varepsilon - 1) \{ \exp[-i(\omega/c)(c/v - \tau)d] - 1 \}}{[1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta] (\varepsilon \cos \theta + \tau)^2 [1 - R \exp(2i\omega\tau d/c)]}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Это выражение получено из (3.55) без каких-либо пренебрежений. Первый член (3.72) является резонансным и в пределе $\theta \rightarrow \theta_{v-ch}$ дает (3.59), а второй и третий члены (3.72) при $\theta \rightarrow \theta_{v-ch}$ дают (3.70).

5. Случай толстой (непрозрачной) пластинки. Рассмотрим теперь случай непрозрачной пластинки, когда ее толщина d много больше оптической толщи среды 2, т. е. длины, на которой поглощается излучение в среде 2. Учитывая, что $\text{Im } \varepsilon > 0$ и $\text{Im } \tau > 0$ (см. (3.56)), мы получим, что в амплитуде (3.55) останутся в числителе и знаменателе лишь члены, пропорциональные $\exp(-i\omega\tau d/c)$, т. е.

$$b = \frac{(\varepsilon - 1)(1 - v\tau/c - v^2/c^2)}{(1 - v\tau/c)(\tau + \varepsilon \cos \theta)[1 - (v^2/c^2)\cos^2 \theta]}. \quad (3.73)$$

Подставив (3.73) в (3.54), получаем

$$W_+^r = \frac{2q^2 v^2}{\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^2 \theta \frac{|\varepsilon - 1|^2}{|\varepsilon \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}|^2} \times \\ \times \frac{|1 - v^2/c^2 - (v/c) \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}|^2 d\theta}{[1 - (v^2/c^2)\cos^2 \theta]^2 |1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}|^2}, \quad (3.74)$$

что в точности соответствует формуле излучения вперед (в вакууме) при пересечении частицей одной границы раздела (см. (2.41) — в данном случае нужно положить $\varepsilon_2 = \mu_2 = \mu_1 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$).

Этот результат, как уже указывалось, естественно было ожидать, так как излучение, испущенное у первой границы, поглощено в пластинке, не дойдя до второй границы. Формула (3.74) описывает и все излучение В.—Ч., испущенное частицей в среде 2 на расстояниях от второй границы, меньших или порядка длины поглощения излучения. Это видно из того, что в (3.73), (3.74) содержится резонансный множитель $(1 - v\tau/c)^{-2} = [1 - (v/c) \times \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}]^{-2}$. Ширина соответствующего резонанса конечна в данном случае из-за наличия поглощения (мнимой части ε), а не конечности толщины пластинки d , как это было в случае прозрачной пластинки. Записав $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, где $\varepsilon'' = \text{Im } \varepsilon$, $\varepsilon' = \text{Re } \varepsilon$, получаем

$$\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \approx \sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta} + i\varepsilon''/(2\sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta}) \quad (\varepsilon'' \ll \varepsilon').$$

Распространение волны характеризуется экспоненциальным множителем (см. (2.20)):

$$\exp[(\omega z/c)(i\sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta} - \varepsilon''/(2\sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta}))],$$

т. е. длина d_* , на которой интенсивность волны (пропорциональная $|E|^2$) падает в e раз, равна $d_* = c\sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta}/\varepsilon''\omega$. Резонанс-

ный множитель, входящий в (3.74), можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta}|^2} &= \\ &= \frac{(2d_* \omega / v) [\varepsilon'' v / (2c \sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta})]}{[1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta}]^2 + [\varepsilon'' v / (2c \sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta})]^2} \approx \\ &\approx \frac{2\pi d_* \omega}{v} \delta\left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta}\right). \end{aligned} \quad (3.74a)$$

Здесь мы аппроксимировали резонансную функцию типа $\gamma/(x^2 + \gamma^2)$ при малых γ как $\pi \delta(x)$. Под знаком δ -функции в (3.74a) входит условие излучения В.—Ч. в форме $1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta}$. Далее, пренебрегая ε'' во всех членах (3.74), кроме резонансного, и используя условие излучения В.—Ч. $1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \theta} = 0$, получаем

$$W_+^r \approx \frac{q^2}{c^2} \int_0^\infty \omega d\omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon'}\right) d_* T_{V-Ch}, \quad (v^2/c^2) \varepsilon' > 1, \quad (3.74б)$$

где d_* — длина поглощения, а T — коэффициент прохождения:

$$T_{V-Ch} = \frac{4\varepsilon' \sqrt{1 + (v^2/c^2)(1 - \varepsilon')}}{[1 + \varepsilon' \sqrt{1 + (v^2/c^2)(1 - \varepsilon')}]^2}. \quad (3.74в)$$

Таким образом, можно сказать, что формула (3.74) описывает излучение В.—Ч., собранное с эффективной длины d_* . Естественно, что выделить излучение В.—Ч. из общей энергии излучения (3.74) можно только приближенно и при условии $d_* \gg c/\omega$ и $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$. Как сказано, формула (3.74) описывает и переходное излучение, а также его интерференцию с излучением В.—Ч. Фактически, однако, деление полной энергии (3.74) на часть, соответствующую излучению В.—Ч., и часть, соответствующую переходному излучению, и не нужно, так как (3.74) дает полное излучение, которое и представляет физический интерес. Об излучении заряда при прохождении пластинки, когда не выполнено условие излучения В.—Ч., см. § 3.8, п. 6.

§ 3.3. Переходное излучение в анизотропных и гиротропных средах

1. Введение. Переходное излучение в ферродиеlectricке заряда, движущегося по оси кристалла. Выясним некоторые особенности переходного излучения заряда в анизотропных и гиротропных средах и, в частности, в кристаллах. Общий случай приводит к громоздким формулам (литературу см. в [22]). Мы здесь рассмотрим лишь некоторые частные случаи, которые нам понадобятся

в дальнейшем, в частности, при рассмотрении переходного излучения в вакууме в сильных полях (см. гл. 7).

Начнем со случая, когда среда является ферродиелектриком, т. е. при соответствующем выборе системы координат недиагональные компоненты тензоров ϵ_{ij} и μ_{ij} ($D_i = \epsilon_{ij}E_j$, $B_i = \mu_{ij}H_j$) отсутствуют. Будем считать также, что кристаллическая ось перпендикулярна границе раздела, а частица движется вдоль кристаллической оси. Тогда (ось z направлена вдоль оси кристалла):

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\epsilon} \end{pmatrix}, \quad \mu_{ij} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mu} \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Выражения для собственного поля заряда E^q и поля излучения E^r получим так же, как и выше (см. (2.19), (2.20)):

$$E_{\omega, \kappa}^q(z) = - \frac{4\pi i q (\epsilon \mu - c^2/v^2) \exp(i\omega z/v)}{\tilde{\omega} \epsilon (2\pi)^3 [\epsilon \mu - c^2/v^2 - (\epsilon/\tilde{\epsilon}) \kappa^2 c^2/\omega^2]}, \quad (3.76)$$

$$E_{\omega, \kappa}^r(z) = \frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} a \exp\left(\mp i \sqrt{\epsilon \mu - \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}} \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right). \quad (3.77)$$

Из граничных условий имеем

$$a_2 = \frac{(\epsilon_1 \epsilon_2 / \tilde{\epsilon}_2) (v/c) \kappa^2 c^2 / \omega^2}{\left[\epsilon_1 \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - (\epsilon_2 / \tilde{\epsilon}_2) \kappa^2 c^2 / \omega^2} + \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - (\epsilon_1 / \tilde{\epsilon}_1) \kappa^2 c^2 / \omega^2} \right]} \times \\ \times \left\{ \frac{1 + (v/c) \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - (\epsilon_1 / \tilde{\epsilon}_1) \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\tilde{\epsilon}_1 [1 - \epsilon_1 \mu_1 v^2 / c^2 + (\epsilon_1 / \tilde{\epsilon}_1) \kappa^2 v^2 / \omega^2]} - \right. \\ \left. - \frac{1 + (v/c) (\epsilon_2 / \epsilon_1) \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - (\epsilon_1 / \tilde{\epsilon}_1) \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\tilde{\epsilon}_2 [1 - \epsilon_2 \mu_2 v^2 / c^2 + (\epsilon_2 / \tilde{\epsilon}_2) \kappa^2 v^2 / \omega^2]} \right\}. \quad (3.78a)$$

При $\tilde{\epsilon} = \epsilon$ и $\tilde{\mu} = \mu$ этот результат, естественно, переходит в (2.27).

В случае ультрарелятивистской частицы $\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$ и для высоких частот, когда $\epsilon \approx 1$, $\mu = 1$, $1 - \epsilon\mu$ и $\theta^2 = \kappa^2 c^2 / \omega^2$ порядка $(Mc^2/\mathcal{E})^2$, получим

$$a_2 \approx \theta^2 \left[\frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \epsilon_1 \mu_1)} - \frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \epsilon_2 \mu_2)} \right] = \\ = \frac{\theta^2 (\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1)}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \epsilon_1 \mu_1)] [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \epsilon_2 \mu_2)]}. \quad (3.78b)$$

Этот результат иллюстрирует тот факт, что для ультрарелятивистской частицы существенное значение имеет разность квадратов показателей преломления $\epsilon_2 \mu_2$ и $\epsilon_1 \mu_1$ для волн, распространяющихся вдоль скорости частицы.

Можно видеть, однако, что даже в случае строгого равенства указанных показателей преломления $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = 1^*)$ переходное излучение не исчезает, поскольку оно зависит не только от произведения $\varepsilon\mu$ (см. (3.78a)). Амплитуду a_2 следует, однако, записать при этом с точностью до следующих малых членов порядка $(Mc^2/\mathcal{E})^2$, $(1 - \varepsilon\mu)$ и θ^2 . Это дает (см. (3.78a))

$$a_2 \approx \theta^2 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2]^{-2} \times \\ \times [(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 2\tilde{\varepsilon}_2 - 2\tilde{\varepsilon}_1)(Mc^2/\mathcal{E})^2/2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\theta^2]. \quad (3.79)$$

Излучаемая энергия определяется значением

$$W_2^{\text{tr}} \approx \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty |a_2|^2 \frac{d\theta^2}{\theta^2}, \quad (3.80a)$$

которое, согласно (3.79), логарифмически «расходится» на больших углах. Последнее указывает только на неприменимость в данном случае приближения $\theta^2 \ll 1$. Однако выражение (3.79) можно использовать для получения результата с логарифмической точностью, если $\ln(\mathcal{E}/Mc^2) \gg 1$. Имеем ($\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2$)

$$W_2^{\text{tr}} \approx \frac{2q^2}{\pi c} \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \int_0^\infty |\varepsilon_2(\omega) - \varepsilon_1(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.80б)$$

Очевидно, что в этом случае переходное излучение вперед сильно подавлено и имеет характерные черты рассмотренного выше переходного излучения назад (в изотропной среде). Более того, переходное излучение назад будет здесь по порядку величины таким же, как излучение вперед. Правда, оно не содержит множителя $\ln(\mathcal{E}/Mc^2)$ и практически уже не зависит от энергии частицы.

2. Переходное излучение заряда, движущегося перпендикулярно оси симметрии одноосного ферродиелектрика. Пусть ось симметрии для среды направлена по оси x (рис. 8). Тогда тензоры (3.75) следует записать (в соответствии с тем, что ось z

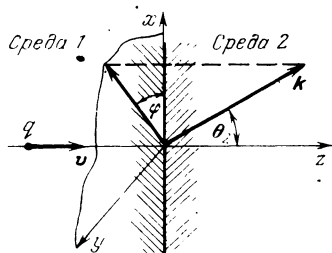


Рис. 8. Прохождение заряда через границу раздела одноосного ферродиелектрика с оптической осью, параллельной границе раздела сред (в ультррелятивистском пределе угол θ_2 обозначается через θ).

*) Именно такой случай соответствует переходному излучению в вакууме в сильном магнитном поле при движении частицы вдоль поля (см. ниже § 7.1). При этом, хотя $\varepsilon\mu = 1$, проницаемости $\varepsilon \neq 1$, $\mu \neq 1$.

у нас направлена по скорости частицы) в виде

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mu_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

В данном случае могут излучаться две волны с различной поляризацией (амплитуды a_o и a_e). Для немагнитной среды (т. е. при $\mu_{ij} = \delta_{ij}$) эти волны называются обыкновенной (индекс о) и необыкновенной (индекс е). В магнитной среде показатели преломления для обеих волн зависят от угла между $\mathbf{k}$ и осью симметрии кристалла (см., например, [66]). Поэтому термины «обыкновенная волна» и «необыкновенная волна» непоследовательны. Для простоты мы будем, тем не менее, их употреблять, имея в виду соответственно волны типов о и е.

Для поля излучения E^r получаем

$$E_{\omega, \kappa}^r(z) = \frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} \left[a_o \exp \left(\mp i \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\varepsilon} \mu - \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} \kappa_x^2 \frac{c^2}{\omega^2} - \kappa_y^2 \frac{c^2}{\omega^2}} \right) + \right. \\ \left. + a_e \exp \left(\mp i \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\varepsilon} \mu - \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \kappa_x^2 \frac{c^2}{\omega^2} - \kappa_y^2 \frac{c^2}{\omega^2}} \right) \right]. \quad (3.82)$$

У первой из них — обыкновенной волны — электрический вектор поляризации перпендикулярен плоскости, в которой лежит кристаллическая ось и вектор $\mathbf{k}$, причем $H_x = 0$; для другой — необыкновенной волны — электрический вектор поляризации лежит в плоскости, проходящей через кристаллическую ось и вектор $\mathbf{k}$; для нее $E_x = 0$. Собственное поле частицы имеет вид

$$E_{\omega, \kappa}^q(z) = - (4\pi i q / \omega) \exp(i\omega z/v) \left[(\varepsilon \tilde{\mu} - c^2/v^2) (\tilde{\varepsilon} \mu - c^2/v^2) - \right. \\ \left. - (\kappa_x^2 c^2 / \omega^2) (\tilde{\mu} / \mu) (\tilde{\varepsilon} \mu - c^2/v^2) - (\kappa_y^2 c^2 / \omega^2) (\varepsilon \tilde{\mu} - c^2/v^2) \right] \times \\ \times [\tilde{\varepsilon} \mu - c^2/v^2 - (\tilde{\varepsilon} / \varepsilon) \kappa_x^2 c^2 / \omega^2 - \kappa_y^2 c^2 / \omega^2]^{-1} \times \\ \times [\tilde{\varepsilon} \mu - c^2/v^2 - (\tilde{\mu} / \mu) \kappa_x^2 c^2 / \omega^2 - \kappa_y^2 c^2 / \omega^2]^{-1}. \quad (3.83)$$

Общие выражения для энергии излучения весьма громоздки и их нет смысла приводить. Граничные условия — условия равенства двух тангенциальных компонент электрического поля E_x и E_y и двух компонент магнитного поля H_x и H_y — дают четыре соотношения для четырех амплитуд. В силу обращения в нуль компонент H_x для обыкновенной волны, два из этих соотношений содержат только амплитуды волн одного типа (обыкновенной или необыкновенной), тогда как остальные два соотношения содержат все четыре амплитуды.

В ультрарелятивистском пределе $\theta^2 \ll 1$, $(Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll 1$, $|1 - \varepsilon \mu| \ll 1$ и последние упомянутые два соотношения разделяются, т. е. граничные условия независимо определяют компоненты обыкновенной и необыкновенной волн. Они оказываются в этом смысле развязанными. При этом для каждой пары волн (обык-

новенной — назад и вперед и необыкновенной — назад и вперед) граничные соотношения приобретают вид формул (2.56), (2.57), в которых вместо ω_{pe}^2/ω^2 фигурирует $1 - \epsilon\mu$ для обыкновенной волны и соответственно $1 - \epsilon\tilde{\mu}$ — для необыкновенной. Кроме того, возникает в числителях соответственно $\cos^2\varphi$ или $\sin^2\varphi$, где φ — полярный угол в плоскости, перпендикулярной скорости частицы. Так, для обыкновенной волны получаем

$$\frac{\theta^2 \cos^2 \varphi}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \tilde{\epsilon}_1 \mu_1)} + a_{0,1} = \frac{\theta^2 \cos^2 \varphi}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \tilde{\epsilon}_2 \mu_2)} + a_{0,2},$$

$$\frac{\theta^2 \cos^2 \varphi}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \tilde{\epsilon}_1 \mu_1)} - a_{0,1} = \frac{\theta^2 \cos^2 \varphi}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \tilde{\epsilon}_2 \mu_2)} + a_{0,2}. \quad (3.84)$$

Отсюда следует, что в указанном приближении излучение назад отсутствует, тогда как для энергии излучения вперед в случае обыкновенной волны имеем

$$W_{2,0}^{\text{tr}} = \frac{q^2}{2\pi^2 c} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi |\tilde{\epsilon}_1 \mu_1 - \tilde{\epsilon}_2 \mu_2|^2 \times$$

$$\times |(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \tilde{\epsilon}_1 \mu_1)|^{-2} |(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \tilde{\epsilon}_2 \mu_2)|^{-2}. \quad (3.85)$$

Соответственно для энергии необыкновенной волны получим

$$W_{2,e}^{\text{tr}} = \frac{q^2}{2\pi^2 c} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi |\epsilon_1 \tilde{\mu}_1 - \epsilon_2 \tilde{\mu}_2|^2 \times$$

$$\times |(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \epsilon_1 \tilde{\mu}_1)|^{-2} |(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + (1 - \epsilon_2 \tilde{\mu}_2)|^{-2}. \quad (3.86)$$

Множители $\cos^2\varphi$ и $\sin^2\varphi$ отражают поляризационные свойства переходного излучения. Заметим, что эффект переходного излучения здесь также зависит от разности показателей преломления волн, распространяющихся по скорости частицы. Формулы (3.85), (3.86) в пределе $\mu = \tilde{\mu}$, $\epsilon = \tilde{\epsilon}$ дают результат [66a] для изотропного ферродиелектрика.

Мы продолжим обсуждение относящихся сюда вопросов в § 7.1, посвященном переходному излучению в вакууме при наличии сильного магнитного поля. Постоянные электрическое или магнитное поля делают вакуум аналогичным как раз одноосному ферродиелектрику.

Полноты ради приведем также мощность излучения В.—Ч. для частицы, движущейся поперек оси ферродиелектрика (проницаемости ϵ и μ считаем вещественными). Читатель проще всего сможет получить приводимые формулы из выражения (3.83) для

собственного поля заряда тем же методом, который был использован выше для случая изотропной среды. Для мощности излучения необыкновенной волны имеем

$$Q_{e,v-ch} = \frac{q^2 v}{c^2} \int_0^\infty \omega d\omega \sqrt{\mu} \left(1 - \frac{c}{v \sqrt{\epsilon \mu}} \right) \quad (3.87)$$

и соответственно для обыкновенной волны

$$Q_{o,v-ch} = \frac{q^2}{c} \int_0^\infty \omega d\omega \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - \frac{c}{v \sqrt{\epsilon \mu}} \right). \quad (3.88)$$

Их сумма имеет вид

$$Q_{v-ch} = Q_{e,v-ch} + Q_{o,v-ch} = \frac{q^2 v}{c^2} \int_0^\infty \omega d\omega \sqrt{\mu} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \sqrt{\mu \epsilon \epsilon}} \right). \quad (3.89)$$

При $\mu = \tilde{\mu} = 1$, $\epsilon = \tilde{\epsilon}$ получим выражение Тамма и Франка [2] для излучения В.—Ч. В случае немагнитных кристаллов такие формулы были получены уже давно (см. [6, 66, 84]). Заметим, в заключение, что при распространении частицы вдоль кристаллической оси

$$Q_{v-ch} = \frac{q^2 v}{c^2} \int_0^\infty \omega d\omega \mu \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon \mu} \right). \quad (3.90)$$

Эта формула совпадает с (2.23) для изотропной среды с проницаемостями ϵ и μ . Мы используем формулу (3.90) в § 7.1.

Как мы видели, анизотропия приводит к переходному излучению волн двух поляризаций. В изотропном же случае, при нормальном падении, излучается только одна волна, поляризованная линейно в плоскости, проходящей через нормаль к границе и волновой вектор волны (вектор $\mathbf{E}_{\perp, \omega, \mathbf{x}}$ параллелен $\mathbf{x}$). При наклонном падении, когда скорость частицы направлена под некоторым углом к границе раздела сред, даже в изотропном случае, возможно излучение волн двух поляризаций. Последнее ясно из того, что при наклонном падении плоскость, образуемая скоростью частицы и нормалью к границе раздела сред, может быть повернута относительно плоскости, образуемой волновым вектором излучаемой волны и нормалью к границе раздела. При наклонном падении заряда на ферродиеlectric, ось которого перпендикулярна границе раздела сред или параллельна ей, также излучаются две волны. Для ультрарелятивистской частицы оказываются при этом существенными значениями показателей преломления вдоль направления движения заряда. Это замечание сделано в связи с результатом (3.79), показывающим, что пере-

ходное излучение мало в случае, когда частица движется вдоль кристаллической оси, для которой $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = 1$. Результат (3.79) получен в случае, когда граница раздела перпендикулярна оси. Если, однако, скорость частицы наклонена к оси под углом, большим $Mc^2/\mathcal{E}$, то существенными становятся значения показателя преломления вдоль $\mathbf{v}$, которые уже отличны от единицы.

3. Переходное излучение в магнитоактивных и гиротропных средах. Рассмотрим здесь простейший случай, когда заряженная частица движется вдоль оси магнито-изотропной среды ($\mu_{ij} = \mu\delta_{ij}$), у которой тензор ε_{ij} имеет недиагональные элементы:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\eta & 0 \\ -i\eta & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

При $\mu = 1$ этот случай соответствует движению заряда в плазме в магнитном поле, причем направление скорости заряда и направление магнитного поля совпадают. Заметим, что уравнение (2.15в) в данном случае сохраняет свой вид, но вместо ε оно будет содержать $\tilde{\varepsilon}$:

$$\left(\kappa^2 - \frac{\tilde{\varepsilon}\mu\omega^2}{c^2}\right) E_{\omega,\kappa}(z) + i \frac{\partial}{\partial z} \kappa E_{\perp,\omega,\kappa}(z) = \frac{4\pi i q \omega}{c^2 (2\pi)^3} \exp \frac{i\omega z}{v}, \quad (3.92)$$

тогда как вместо (2.16а) получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\right) \kappa E_{\perp,\omega,\kappa}(z) = i\kappa^2 \frac{\partial}{\partial z} E_{\omega,\kappa}(z) - i\eta\mu^2 \frac{\omega^3}{c^3} H_{\omega,\kappa}(z), \quad (3.93)$$

где $H_{\omega,\kappa}(z) = \mathbf{v} \mathbf{H}_{\omega,\kappa}(z)/v$. Необходимо еще использовать уравнение для $H_{\omega,\kappa}(z)$, которое легко найдется из (2.10):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2\right) H_{\omega,\kappa}(z) = i \frac{\omega}{c} \eta \kappa E_{\perp,\omega,\kappa}(z). \quad (3.94)$$

Как видно из (3.94), продольное магнитное поле $H_{\omega,\kappa}$ не возбуждается, если $\eta = 0$, т. е. в отсутствие недиагональных компонент тензора ε_{ij} . В данном случае исключение $\kappa E_{\perp,\omega,\kappa}$ и $H_{\omega,\kappa}$ из системы уравнений (3.92) — (3.94) приведет к уравнению четвертой степени для $E_{\omega,\kappa}$ (содержащему четвертые производные по z). Уравнение для свободного поля (поля излучения) при этом описывает две волны (в общем случае эллиптической поляризации; см. [67]). Поэтому желательно найти два уравнения второго порядка с тем, чтобы явно выписать источники, возбуждающие каждую из волн. Для этого нужно искать уравнения для линейных комбинаций H , E и $\kappa E_{\perp}$. Ясно, однако, из свойств векторов относительно отражений ($\mathbf{H}$ — псевдовектор, $\mathbf{E}$ — вектор), что можно составить лишь комбинации H и $\kappa E_{\perp}$. Поэтому мы

введем некую «эффективную» индукцию

$$\tilde{B}_{\omega, \kappa}(z) = \mu H_{\omega, \kappa}(z) - i \Lambda_{\omega, \kappa} \kappa E_{\perp, \omega, \kappa}(z) c / \omega, \quad (3.95)$$

где $\Lambda_{\omega, \kappa}$ — множитель, который должен быть подобран из дополнительного требования. Исключим $E_{\omega, \kappa}(z)$ из (3.93), подставив его значение из (3.92):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} - \frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} \kappa^2 \right) \kappa E_{\perp, \omega, \kappa}(z) = \\ = i \frac{\eta \mu \omega}{c \tilde{\varepsilon}} \left(\kappa^2 - \frac{\tilde{\varepsilon} \mu \omega^2}{c^2} \right) H_{\omega, \kappa}(z) + \frac{4 \pi i q \kappa^2}{v \tilde{\varepsilon} (2\pi)^3} \exp \frac{i \omega z}{v}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Теперь составим уравнение для $\tilde{B}_{\omega, \kappa}$, подействовав на (3.95) оператором $\partial^2 / \partial z^2 + \varepsilon \mu \omega^2 / c^2$ и используя уравнения (3.94), (3.96):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} \right) \tilde{B}_{\omega, \kappa}(z) = \\ = \mu H_{\omega, \kappa}(z) \left[\kappa^2 (1 + \eta \Lambda_{\omega, \kappa} / \tilde{\varepsilon}) - \eta \mu \Lambda_{\omega, \kappa} \omega^2 / c^2 \right] - \\ - i (c / \omega) \kappa E_{\perp, \omega, \kappa}(z) \Lambda_{\omega, \kappa} (\kappa^2 \tilde{\varepsilon} / \tilde{\varepsilon} - \eta \mu \omega^2 / c^2 \Lambda_{\omega, \kappa}) + \\ + \frac{4 \pi q c \kappa^2 \Lambda_{\omega, \kappa}}{\omega v \tilde{\varepsilon} (2\pi)^3} \exp \frac{i \omega z}{v}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Для того чтобы в правую часть уравнения (3.97) также входила лишь такая комбинация $\mu H_{\omega, \kappa}$ и $\kappa E_{\perp, \omega, \kappa}$, которая образует $\tilde{B}_{\omega, \kappa}$, необходимо, чтобы

$$\kappa^2 (1 + \Lambda_{\omega, \kappa} \eta / \tilde{\varepsilon}) - \eta \mu \Lambda_{\omega, \kappa} \omega^2 / c^2 = \kappa^2 \tilde{\varepsilon} / \tilde{\varepsilon} - \eta \mu \omega^2 / c^2 \Lambda_{\omega, \kappa}. \quad (3.98)$$

Квадратное уравнение (3.98) для $\Lambda_{\omega, \kappa}$ имеет два корня $\Lambda_{\omega, \kappa}^{(\pm)}$:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\omega, \kappa}^{(\pm)} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\eta (\tilde{\varepsilon} \mu \omega^2 / c^2 - \kappa^2)} \left[\frac{\kappa^2}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} \right) \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\frac{\kappa^4}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} \right)^2 + \frac{\omega^2 \eta^2 \mu}{\tilde{\varepsilon} c^2} \left(\frac{\tilde{\varepsilon} \mu \omega^2}{c^2} - \kappa^2 \right)} \right]. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Отсюда получим два уравнения для величин $\tilde{B}_{\omega, \kappa}^{(\pm)}(z)$, соответствующих значениям $\Lambda = \Lambda_{\omega, \kappa}^{(\pm)}$ в (3.95):

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\kappa^2}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} \right) \right] \tilde{B}_{\omega, \kappa}^{(\pm)}(z) = \\ = \pm \sqrt{\frac{\kappa^4}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} \right)^2 + \frac{\omega^2 \eta^2 \mu}{\tilde{\varepsilon} c^2} \left(\tilde{\varepsilon} \mu \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2 \right)} \tilde{B}_{\omega, \kappa}^{(\pm)}(z) = \\ = \frac{4 \pi q c \kappa^2 \Lambda_{\omega, \kappa}^{(\pm)}}{v \omega \tilde{\varepsilon} (2\pi)^3} \exp \frac{i \omega z}{v}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Уравнения (3.100) фактически решает задачу о нахождении источников (правая часть (3.100)) для возбуждения каждой из собственных волн (они отвечают решениям в случае равенства нулю левой части (3.100)) в магнитоактивной среде. Из (3.100) получим собственное поле заряда

$$\tilde{B}_{\omega, \kappa}^{(\pm)q}(z) = \frac{4\pi qc^3 \kappa^2 \Lambda_{\omega, \kappa}^{(\pm)}}{v\omega^3 \tilde{\epsilon} (2\pi)^3} \exp \frac{i\omega z}{v} [\epsilon\mu - c^2/v^2 - (1 + \epsilon/\tilde{\epsilon})\kappa^2 c^2/2\omega^2 \mp \\ \mp \sqrt{(1 - \epsilon/\tilde{\epsilon})^2 \kappa^4 c^4/4\omega^4 + (\epsilon\mu - \kappa^2 c^2/\omega^2) \eta^2 \mu/\tilde{\epsilon}}]^{-1} \quad (3.101)$$

и поле излучения, например, вперед (по v),

$$\tilde{B}_{\omega, \kappa}^{(\pm)r}(z) = \frac{4\pi qc^3 \kappa^2}{v\omega^3 (2\pi)^3} b^{(\pm)} \times \\ \times \exp \left[i \frac{\omega z}{c} \sqrt{\epsilon\mu - \frac{\kappa^2 c^2}{2\omega^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}\right)} \mp \sqrt{\frac{\kappa^4 c^4}{4\omega^4} \left(1 - \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}}\right)^2 + \frac{\eta^2 \mu^2}{\tilde{\epsilon}} \left(\epsilon\mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}\right)} \right]. \quad (3.102)$$

Поле излучения назад соответственно содержит знак минус в экспоненте.

Граничные условия должны определить четыре величины $b_{1,2}^{\pm}$. В качестве четырех граничных условий можно взять равенство нормальных компонент индукций ($\mu H_{\omega, \kappa}$ и $\epsilon E_{\omega, \kappa}$) и тангенциальных компонент поля ($\kappa E_{\perp, \omega, \kappa}$ и $\kappa H_{\perp, \omega, \kappa}$). Величины $\kappa H_{\perp, \omega, \kappa}$ и $\mu H_{\omega, \kappa}$ непосредственно выражаются через $\tilde{B}_{\omega, \kappa}^{(+)}$ и $\tilde{B}_{\omega, \kappa}^{(-)}$ с помощью (3.95); $\epsilon E_{\omega, \kappa}$ найдется из (3.92) подстановкой $\kappa E_{\perp, \omega, \kappa}$, а $\kappa H_{\perp, \omega, \kappa}$ в силу уравнений Максвелла равно $i(\partial/\partial z) H_{\omega, \kappa}(z)$. Общие соотношения весьма громоздки и мы их здесь приводить не будем.

Рассмотрим лишь один предельный случай, который может качественно характеризовать роль недиагональных компонент тензора ϵ_{ij} в переходном излучении ультрарелятивистских частиц. А именно, будем считать, что $\mu = 1$, $|\tilde{\epsilon} - 1| \ll 1$, $|\epsilon - 1| \ll 1$, $\theta^2 \ll 1$, $|\eta| \ll 1$, но

$$|\eta| \gg \theta^2 |\epsilon - 1|, \theta^2 |\tilde{\epsilon} - 1|. \quad (3.103)$$

Будем также рассматривать излучение под малым углом к скорости частиц $\kappa^2 c^2/\omega^2 \approx \theta^2 \ll 1$, а частицу будем считать ультрарелятивистской: $(Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll 1$. Тогда из (3.99) получаем

$$\Lambda_{\omega, \kappa}^{(\pm)} \approx \pm 1. \quad (3.104)$$

В силу того, что $\Lambda_{\omega, \kappa}^{(\pm)}$ не зависит от ϵ и μ , можно использовать просто непрерывность $\tilde{B}^{(+)}$ и $\tilde{B}^{(-)}$:

$$-\frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + |\eta_1|} + b_1^{(+)} = -\frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + |\eta_2|} + b_2^{(+)}, \quad (3.105)$$

$$\frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 - |\eta_1|} + b_1^{(-)} = \frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 - |\eta_2|} + b_2^{(-)}, \quad (3.106)$$

Другие два граничных условия сводятся к непрерывности $\frac{\partial}{\partial z} \tilde{B}_{\omega, \kappa}^{(\pm)}(z)$ и дают два соотношения, отличающиеся от (3.105), (3.106) тем, что $b_1^{(+)}$ и $b_1^{(-)}$ входят с противоположным знаком. В рассматриваемом приближении, таким образом, излучение назад отсутствует ($b_1^{(\pm)} = 0$), а для амплитуд излучения вперед получаем

$$b_2^{(\pm)} = \frac{|\eta_1| - |\eta_2|}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 \pm |\eta_1|] [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 \pm |\eta_2|]}. \quad (3.107)$$

Энергия переходного излучения найдется так же, как и раньше (см. (3.102), (2.29)), с помощью выражения (при этом $\theta^2 = \theta_2^2$)

$$W_2^{\text{tr}(\pm)} \approx \frac{q^2}{2\pi c} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty |b_2^{(\pm)}|^2 \theta^2 d\theta^2. \quad (3.108)$$

Полная энергия излучения будет равна сумме энергий двух поляризаций

$$W_2^{\text{tr}} = W_2^{\text{tr}(+)} + W_2^{\text{tr}(-)}. \quad (3.109)$$

Заметим, что в данном случае переходное излучение вновь определяется значениями показателей преломления волн в направлении распространения частицы. Однако один из них больше единицы (знак минус в (3.107)), в другой (знак плюс в (3.107)) меньше единицы. Для знака минус (т. е. $W_2^{\text{tr}(-)}$) возможно выполнение условия излучения В.—Ч., в связи с чем резонансный знаменатель (3.107) должен трактоваться так, как это было описано в § 3.2 настоящей главы. Заметим также, что η при больших ω убывает как $1/\omega^3$. При достаточно больших частотах $|\eta|$ станет меньше $\theta^2|\epsilon - 1| \sim (Mc^2/\mathcal{E})^2|\epsilon - 1|$ и сделанные при выводе (3.107) предположения нарушатся при некоторых частотах. Однако при тех частотах, для которых (3.107) справедливо (т. е. меньше тех, для которых $|\eta| \sim |\epsilon - 1|\theta^2$), свойства переходного излучения ультрарелятивистских частиц оказываются иными, чем в изотропном случае. Если $\eta = \omega_0/\omega$, где ω_0 — некая константа *),

*) Такая зависимость реализуется в плазме в сильном магнитном поле при $\omega \ll \omega_{\text{He}} = eH_0/m_e c$, когда $\omega_0 = \omega_{\text{pe}}^2/\omega_{\text{He}}$; неравенства (3.103) выполняются ($\theta^2 \sim (Mc^2/\mathcal{E})^2$), если $\omega_{\text{pe}}, \omega_{\text{He}}(Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll \omega \ll \omega_{\text{He}}$. Максимальная частота (3.110) удовлетворяет этим неравенствам, если $\mathcal{E}/Mc^2 \gg \sqrt{\omega_{\text{He}}/\omega_{\text{pe}}}$. Тогда $(\Delta N/N_0 \ll 1, \Delta H_0/H_0 = 0)$

$$W_2^{\text{tr}(+)} = \frac{q^2}{12\pi c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{|\omega_{\text{He}}|} \left(\frac{\Delta N}{N_0} \right)^2 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2.$$

то спектральная плотность энергии переходного излучения остается не зависящей от частоты (спектр плоский) только для частот, меньших $\omega_{\max}$, где

$$\omega'_{\max} \sim |\omega_0|(\mathcal{E}/Mc^2)^2. \quad (3.110)$$

При $\omega \gg \omega'_{\max}$ спектр падает как $1/\omega^2$. Таким образом, характерная частота переходного излучения оказывается зависящей от энергии по закону $\mathcal{E}^2$, а не пропорциональна $\mathcal{E}$, как в изотропном случае. Полная энергия излучения также пропорциональна $\mathcal{E}^2$.

§ 3.4. Переходное излучение в средах с пространственной дисперсией

1. Введение. Об описании волн в средах с пространственной дисперсией. Как известно, однородная (и, следовательно, безграничная) и стационарная среда с учетом пространственной дисперсии в электродинамическом отношении описывается тензором диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, зависящим не только от ω (частотная дисперсия), но и от волнового вектора $\mathbf{k}$ (см. [64, 68]). При этом

$$D_{i,\omega,\mathbf{k}} = \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_{j,\omega,\mathbf{k}}. \quad (3.111)$$

Необходимо заметить, что при наличии пространственной дисперсии для однородных сред получаются дисперсионные уравнения, могущие иметь много решений (ветвей). Это открывает возможность включать в рассмотрение не только электромагнитные, но и другие типы волн (акустические и т. п.). Физически, конечно, здесь учитывается то, что в волнах всех типов какое-то электромагнитное поле все-таки присутствует.

В изотропной среде ($k = |\mathbf{k}|$)

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon^t(\omega, k) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \epsilon^l(\omega, k) \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (3.112)$$

где ϵ^t и ϵ^l — соответственно поперечная и продольная диэлектрические проницаемости среды. При учете пространственной дисперсии можно считать, что $\mu_{ij} = \delta_{ij}$ (см. [68], в ряде предельных случаев магнитная восприимчивость может быть выражена через ϵ^t и ϵ^l). Дисперсионное уравнение для волн в однородной изотропной среде распадается на уравнение для поперечных волн

$$k^2 - \omega^2 \epsilon^t(\omega, k)/c^2 = 0 \quad (3.113)$$

и уравнение для продольных волн

$$\epsilon^l(\omega, k) = 0. \quad (3.114)$$

Многочисленные ветви решений уравнений (3.113), (3.114) описывают как известные коллективные возбуждения типа фононов, экситонов и т. п., так и электромагнитные волны.

Переходное излучение заряда в средах с пространственной дисперсией возникает, если нарушается либо однородность среды в пространстве (граница раздела), либо — во времени (скачок свойств среды во времени), либо, наконец, — и в пространстве, и во времени. При этом могут излучаться, вообще говоря, все типы волн, которые могут распространяться в средах с пространственной дисперсией. Говоря об этом, мы имеем в виду случай, когда изменения свойств среды в пространстве или (и) во времени достаточно локализованы, так что вдали от этой области изменений можно уже говорить об однородной и стационарной среде и соответствующих волнах, описываемых (3.113), (3.114) (т. е. справедливо соотношение (3.111)). Для связи между $D_i(\mathbf{r}, t)$ и $E_j(\mathbf{r}, t)$ в случае однородной и стационарной среды имеем в согласии с (3.111)

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int \hat{\epsilon}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_j(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' dt', \quad (3.115a)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \\ &= (2\pi)^{-4} \int \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \exp[-i\omega(t - t') + i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\omega d\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (3.115b)$$

т. е. $\hat{\epsilon}_{ij}$ зависит от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и разности $t - t'$. В области же изменений свойств среды в пространстве и (или) во времени $\hat{\epsilon}_{ij}$ уже зависит от каждой переменной $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, а также от t и t' , а не только от их разности:

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int \hat{\epsilon}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') E_j(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'. \quad (3.116a)$$

В случае, если свойства среды изменяются только в пространстве и граница раздела сред перпендикулярна оси z , то имеется стационарность во времени и однородность в направлениях, перпендикулярных оси z . Это значит, что $\hat{\epsilon}_{ij}$ будет зависеть от разностей $\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp$ и $t - t'$. Раскладывая в ряды Фурье по частотам ω и волновым числам $\mathbf{k}$ (см. § 2.2), можно (3.116a) записать в виде

$$D_{i,\omega,\mathbf{k}}(z) = \int \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, z, z') E_{j,\omega,\mathbf{k}}(z') dz', \quad (3.116b)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, z, z') &= \int \hat{\epsilon}_{ij}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp, z, z', t - t') \times \\ &\times \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) - i\omega(t - t')] d(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) d(t - t'). \end{aligned} \quad (3.116b)$$

Если свойства среды меняются скачком во времени, причем среда остается однородной в пространстве, то $\hat{\epsilon}_{ij}$ будет зависеть от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и от каждого из t и t' , т. е.

$$D_{i,\mathbf{k}}(t) = \int \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, t, t') E_{j,\mathbf{k}}(t') dt', \quad (3.117a)$$

где

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, t, t') = \int \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t, t') \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.1176)$$

Фактически соотношения (3.116б), (3.116в) описывают, при их соответствующей конкретизации, структуру поверхности раздела сред, т. е. знание $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{x}, z, z')$ достаточно для отыскания всех типов волн, испускаемых зарядом при пересечении границы раздела сред. В ряде случаев связь (3.116б) может быть сведена к некоторым дополнительным граничным условиям (см. [64]), использование которых упрощает отыскание переходного излучения волн новых типов (в том числе неэлектромагнитных). Соотношения (3.117а), (3.117б) описывают «структуру» скачка свойств среды во времени, и их использование также дает возможность получить полную информацию о типах и интенсивностях волн, испускаемых зарядом.

В общем случае, когда свойства среды меняются и в пространстве, и во времени, следует использовать общее соотношение (3.116а).

2. Граница раздела двух сред с пространственной дисперсией при условии зеркального отражения. Одна из наиболее обсуждаемых конкретизаций условий на границе, позволяющая в общем виде решить задачу о переходном излучении до конца, соответствует условию зеркальности отражения от границы раздела тех частиц, которые создают поляризацию среды*). Ситуация с зеркальным отражением может реально возникнуть в случае плазмы,

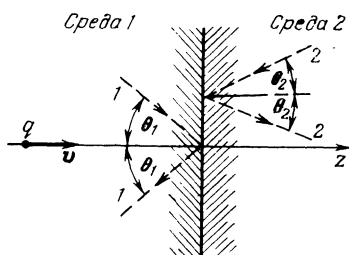


Рис. 9. Схематическое изображение зеркального отражения зарядов среды, создающих поляризацию, от границы раздела сред. 1 — пример траектории электрона в среде 1, зеркально отражающегося от границы; 2 — то же для электрона в среде 2.

граничащей со стенкой, когда плазменные электроны зеркально отражаются от границы, а также в случае металла при зеркальном отражении электронов проводимости от его границы.

Рассмотрим границу раздела сред 1 и 2 (нормаль по z) и будем считать выполненными условия зеркальности отражения в средах 1 и 2 (рис. 9). Условие зеркальности позволяет использовать метод, весьма близкий к методу изображений, а именно, про-

*) Несложным является обобщение результатов на случай, когда отражение является частично зеркальным, частично диффузным. Роль диффузного отражения при переходном излучении плазмонов в ряде частных моделей обсуждается в [212]. Мы ограничимся здесь рассмотрением простейшего случая зеркального отражения.

должить четным образом плотность поляризационного заряда и плотность поляризационного тока, параллельного границе, и нечетным образом продолжить плотность поляризационного тока, перпендикулярного границе (по оси z). Поляризационной плотностью заряда ρ^p и поляризационной плотностью тока j^p здесь называем плотность заряда и плотность тока, связанные с самой средой, т. е. без учета внешних плотностей заряда и тока ρ^q и j^q . Распределение плотности заряда ρ^p и плотности тока j^p в области среды 1, например, при зеркальном отражении частиц, такое же, каким оно было бы, если бы среда 1 занимала все пространство, а число частиц, имеющих скорость v_z , и число частиц, имеющих скорость $-v_z$, было бы одинаково (частица, отражающаяся от границы в среде 1, создает в среде 1 такие же ρ^p и j^p , как и две зеркальные частицы (т. е. частицы с противоположными v_z), падающие с двух сторон границы раздела и свободно проходящие через границу (см. рис. 9). Это и показывает, что ρ^p и $j^p_{\perp}$ должны быть продолжены четным образом, а j^p (компонента, перпендикулярная границе; индекс z , как и раньше, опускаем) — нечетным образом. Таким образом, при нахождении полей в среде 1 ($z < 0$) поляризационные заряды и токи «продолжаются» в область среды 2 ($z > 0$) указанным способом, с учетом, что среда 1 занимает все пространство. Точно так же при нахождении полей в среде 2 ($z > 0$) продолжают поляризационные заряды и токи в область среды 1 ($z < 0$), считая, что среда 2 заполняет все пространство.

В задаче о переходном излучении заряда q , нормально (по z) пересекающего границу раздела сред, помимо поляризационных зарядов и токов имеются плотность заряда ρ^q и плотность тока j^q , создаваемые самим зарядом. Их мы будем тоже продолжать таким же образом (т. е. ρ^q четно, а j^q нечетно). Продолжая по одинаковым законам j^p , ρ^p и j^q , ρ^q мы, тем самым, сможем указать на законы продолжения полей. Естественно, что при таких продолжениях мы находим для всего пространства выражения для полей, которые совпадают с искомыми полями только в той части полупространства (слева или справа от границы), в которой j^p , ρ^p и j^q , ρ^q совпадают с реальными (а не продолженными) значениями. Этот прием удобен, так как позволяет свести решение задачи с границей раздела к решению двух задач с однородными средами. Правда, это по необходимости приводит к дополнительным скачкам, т. е. к поверхностным зарядам и токам на границе.

Действительно, из уравнения Пуассона

$$i k E_{\perp, \omega, x}(z) + \frac{\partial}{\partial z} E_{\omega, x}(z) = 4\pi \rho_{\omega, x}^q(z) + 4\pi \rho_{\omega, x}^p(z), \quad (3.118)$$

где $\rho_{\omega, x}^p(z)$ — поляризационная плотность заряда среды, видно, что $E_{\perp, \omega, x}(z)$ нужно продолжить четным образом, а $E_{\omega, x}(z)$ — нечетным. Но, так как значение $E_{\omega, x}(0)$ в общем случае не равно нулю, то нечетное продолжение этой величины приводит к ее скачку на границе на величину $2 E_{\omega, x}(0)$. Производная от этого

скачка дает поверхностный заряд

$$\rho_{\omega, \kappa}^{P, s}(z) = -\frac{1}{2\pi} E_{\omega, \kappa}(0) \delta(z). \quad (3.119a)$$

Итак, поле в среде 1 можно найти, считая, что имеется однородная во всем пространстве среда (со значениями $\epsilon_1^t(\omega, k)$ и $\epsilon_1^l(\omega, k)$) и, кроме того, на границе имеется пространственный заряд

$$\rho_{\omega, \kappa}^{P, s(1)}(z) = -\frac{1}{2\pi} E_{\omega, \kappa}^{(1)}(0) \delta(z), \quad (3.119b)$$

где $E_{\omega, \kappa}^{(1)}(0)$ — нормальная к границе раздела сред компонента поля $E_{\omega, \kappa}(0)$ в среде 1. Поле же в среде 2 можно найти, решая задачу об однородной во всем пространстве среде с проницаемостями $\epsilon_2^t(\omega, k)$ и $\epsilon_2^l(\omega, k)$ и поверхностным зарядом

$$\rho_{\omega, \kappa}^{P, s(2)}(z) = \frac{1}{2\pi} E_{\omega, \kappa}^{(2)}(0) \delta(z). \quad (3.120)$$

Знак плюс в (3.120) (в (3.119b) был знак минус) связан с тем, что ось z у нас направлена из среды 1 в среду 2. Точно так же можно найти и поверхностные токи. Для этого запишем уравнения Максвелла (2.10) в проекции на направления, перпендикулярные z :

$$\begin{aligned} \kappa_y^2 E_{x, \omega, \kappa}(z) - \kappa_y \kappa_x E_{y, \omega, \kappa}(z) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{x, \omega, \kappa}(z) + \\ + i \kappa_x \frac{\partial}{\partial z} E_{\omega, \kappa}(z) = \frac{\omega^2}{c^2} E_{x, \omega, \kappa}(z) + \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{x, \omega, \kappa}^P(z), \end{aligned} \quad (3.121a)$$

$$\begin{aligned} \kappa_x^2 E_{y, \omega, \kappa}(z) - \kappa_x \kappa_y E_{x, \omega, \kappa}(z) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{y, \omega, \kappa}(z) + \\ + i \kappa_y \frac{\partial}{\partial z} E_{\omega, \kappa}(z) = \frac{\omega^2}{c^2} E_{y, \omega, \kappa}(z) + \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{y, \omega, \kappa}^P(z), \end{aligned} \quad (3.121b)$$

где $j_{x, y}^P$ — поляризационные токи среды.

В силу четности продолжения E_x и E_y и нечетности продолжения E получим, что поверхностный ток равен

$$\frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{\perp, \omega, \kappa}^{P, s(1,2)}(z) = \pm \left[\frac{\partial E_{\perp, \omega, \kappa}^{(1,2)}}{\partial z}(0) - i \kappa E_{\omega, \kappa}^{(1,2)}(0) \right] 2\delta(z). \quad (3.122)$$

Наконец, из уравнений Максвелла в проекции на ось z

$$\begin{aligned} i(\partial/\partial z) \kappa E_{\perp, \omega, \kappa}(z) + (\kappa^2 - \omega^2/c^2) E_{\omega, \kappa}(z) = \\ = (4\pi i \omega/c^2) (j_{\omega, \kappa}^Q(z) + j_{\omega, \kappa}^P(z)) \end{aligned} \quad (3.123)$$

видно, что (как уже отмечалось) продольные (по z) компоненты тока нужно продолжать нечетно. Что касается поляризационного тока по оси z , то он равен нулю на границе. Ток же заряда (см.

(2.13)) равен

$$j_{\omega, \kappa}^q(0) = q/(2\pi)^3 \quad (3.124)$$

и, следовательно, при нечетном продолжении должен испытывать скачок $2j_{\omega, \kappa}^q(0)$. Из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial z} j_{\omega, \kappa}^q(z) = i\omega \rho_{\omega, \kappa}^q(z) \quad (3.125)$$

мы заключаем, что необходимо еще учесть поверхностный заряд

$$\rho_{\omega, \kappa}^{q, s(1,2)}(z) = \mp \frac{2}{i\omega} j_{\omega, \kappa}^q(0) \delta(z). \quad (3.126)$$

Введя нечетно продолженный ток частицы $j_{\omega, \kappa}^{q(1,2)}(z)$ и четно продолженный заряд $\rho_{\omega, \kappa}^{q(1,2)}(z)^*$, мы должны уравнение (3.125) записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} j_{\omega, \kappa}^{q(1,2)}(z) = i\omega (\rho_{\omega, \kappa}^q(z) + \rho_{\omega, \kappa}^{q, s(1,2)}(z)). \quad (3.127)$$

Поверхностный заряд (3.126) также надо учесть в уравнении (3.118), т. е. в (3.118) заменить $E_{\omega, \kappa}(z)$ на $E_{\omega, \kappa}^{(1,2)}(z)$:

$$\rho_{\omega, \kappa}^q(z) \rightarrow \rho_{\omega, \kappa}^q(z) + \rho_{\omega, \kappa}^{q, s(1,2)}(z). \quad (3.128)$$

Таким образом, мы полностью свели задачу к решению двух задач в однородных средах соответственно с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1^t(\omega, k)$, $\epsilon_1^l(\omega, k)$ и $\epsilon_2^t(\omega, k)$, $\epsilon_2^l(\omega, k)$ и поверхностными зарядами и токами.

Стоит еще отметить, что поляризационные поверхностные токи (3.122) и поляризационные поверхностные заряды (3.120) должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\kappa j_{\perp, \omega, \kappa}^{P, s(1,2)}(z) = \omega \rho_{\omega, \kappa}^{P, s(1,2)}(z), \quad (3.129)$$

или

$$i\kappa \frac{\partial E_{\perp, \omega, \kappa}^{(1,2)}}{\partial z}(0) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2 \right) E_{\omega, \kappa}^{(1,2)}(0). \quad (3.130)$$

Рассмотрим теперь вопрос о граничных условиях. Так как поляризационные заряды, в частности, поверхностные, уже выделены, то такими условиями должны быть условия равенства нормальных и тангенциальных компонент, например, электрического поля. Соответствующие условия могут быть выведены. Например, приравнявая тангенциальные компоненты магнитного поля (2.156), получаем

$$\kappa^2 E_{\omega, \kappa}^{(1)}(0) + i\kappa \frac{\partial E_{\perp, \omega, \kappa}^{(1)}}{\partial z}(0) = \kappa^2 E_{\omega, \kappa}^{(2)}(0) + i\kappa \frac{\partial E_{\perp, \omega, \kappa}^{(2)}}{\partial z}(0) \quad (3.131)$$

*) При таком продолжении, естественно, плотности тока и заряда оказываются разными в средах 1 и 2, на что указывают индексы.

и в силу (3.130) получаем

$$E_{\omega, \kappa}^{(1)}(0) = E_{\omega, \kappa}^{(2)}(0) \equiv E_{\omega, \kappa}(0). \quad (3.132)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial E_{\perp, \omega, \kappa}^{(1)}}{\partial z}(0) = \frac{\partial E_{\perp, \omega, \kappa}^{(2)}}{\partial z}(0) \equiv \frac{\partial E_{\perp, \omega, \kappa}}{\partial z}(0). \quad (3.133)$$

Таким образом, во всех поверхностных зарядах (3.119), (3.120) и токах (3.122) можно не ставить индексов в правой части (поверхностные заряды в среде 1 и среде 2 отличаются только знаком). После всех этих довольно простых соображений остается лишь рассмотреть для всех величин компоненты Фурье по z , например,

$$E_{\omega, \kappa}(z) = \int E_{\omega, \mathbf{k}} \exp(ik_z z) dk_z; \quad \mathbf{k} = \{\kappa, k_z\}. \quad (3.134)$$

Тогда

$$\rho_{\omega, \mathbf{k}}^{P, s(1, 2)} = \pm \frac{1}{4\pi^2} E_{\omega, \kappa}(0), \quad (3.135)$$

$$\frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}_{\perp, \omega, \mathbf{k}}^{P, s(1, 2)} = \pm \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial E_{\perp, \omega, \kappa}}{\partial z}(0) - i\kappa E_{\omega, \kappa}(0) \right), \quad (3.136)$$

$$\rho_{\omega, \mathbf{k}}^{q, s(1, 2)} = \mp \frac{q}{i\pi\omega(2\pi)^3}, \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{q(1, 2)} &= \frac{q}{(2\pi)^4} \left[\mp \int_0^\infty \exp\left(\mp i \frac{\omega}{v} z - ik_z z\right) dz \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \int_{-\infty}^0 \exp\left(\pm i \frac{\omega}{v} z - ik_z z\right) dz \right] = \\ &= \pm \frac{qk_z}{i\pi(2\pi)^3 [(\omega \mp i\delta)^2/v^2 - k_z^2]}; \quad \delta \rightarrow +0, \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\omega, \mathbf{k}}^{q(1, 2)} &= \frac{q}{v(2\pi)^4} \left[\int_0^\infty \exp\left(\mp i \frac{\omega}{v} z - ik_z z\right) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^0 \exp\left(\pm i \frac{\omega}{v} z - ik_z z\right) dz \right] = \\ &= \pm \frac{q\omega}{i\pi(2\pi)^3 v^2 [(\omega \mp i\delta)^2/v^2 - k_z^2]}; \quad \delta \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (3.139)$$

С помощью найденных зарядов и токов уравнения Максвелла для

поперечных и продольных полей

$$E_{j,\omega,\mathbf{k}} = E_{j,\omega,\mathbf{k}}^l + E_{j,\omega,\mathbf{k}}^t, \quad (3.140)$$

$$E_{j,\omega,\mathbf{k}}^l = k_j \mathbf{k} E_{\omega,\mathbf{k}} / k^2, \quad E_{j,\omega,\mathbf{k}}^t = E_{j,\omega,\mathbf{k}} - k_j \mathbf{k} E_{\omega,\mathbf{k}} / k^2 \quad (3.140)$$

записывается в следующем виде:

$$i \mathbf{k} E_{\omega,\mathbf{k}}^{l(1,2)} \varepsilon_{1,2}^l(\omega, k) = 4\pi (\rho_{\omega,\mathbf{k}}^{q(1,2)} + \rho_{\omega,\mathbf{k}}^{p,s(1,2)} + \rho_{\omega,\mathbf{k}}^{q,s(1,2)}), \quad (3.141)$$

$$(k^2 - \omega^2 \varepsilon_{1,2}^t(\omega, k) / c^2) E_{\omega,\mathbf{k}}^{t(1,2)} = (4\pi i \omega / c^2) \times \\ \times [\mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}^{q(1,2)} + \mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}^{p,s(1,2)} - \mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}^{q(1,2)}) / k^2 - \mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}^{p,s(1,2)}) / k^2]. \quad (3.142)$$

3. Поле переходного излучения на границе раздела сред с пространственной дисперсией. Отметим, что в данном случае при решении задачи о переходном излучении нецелесообразно выделять собственные поля и поле излучения. Можно поступить значительно проще. Разрешить уравнения (3.141) и (3.142) для полного поля, а затем найти поле излучения, используя причинность (запаздывающий характер функций Грина). Для полей имеем

$$E_{\omega,\mathbf{k}}^{l(1,2)} = - \frac{4\pi i k}{k^2 \varepsilon_{1,2}^l(\omega, k)} (\rho_{\omega,\mathbf{k}}^{q(1,2)} + \rho_{\omega,\mathbf{k}}^{p,s(1,2)} + \rho_{\omega,\mathbf{k}}^{q,s(1,2)}), \quad (3.143)$$

$$E_{\omega,\mathbf{k}}^{t(1,2)} = (4\pi i \omega / c^2) [k^2 - \omega^2 \varepsilon_{1,2}^t(\omega, k) / c^2]^{-1} \times \\ \times [\mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}^{q(1,2)} - \mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}^{q(1,2)}) / k^2 + \mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}^{p,s(1,2)} - \mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}^{p,s(1,2)}) / k^2]. \quad (3.144)$$

Граничное условие (3.132) сводится к тождеству*). Для нахождения $E_{\omega,\mathbf{x}}(0)$ нам достаточно воспользоваться граничным условием

$$\kappa E_{\perp,\omega,\mathbf{x}}^{(1)}(0) = \kappa E_{\perp,\omega,\mathbf{x}}^{(2)}(0). \quad (3.145)$$

Используя (3.134), (3.130), получаем

$$E_{\omega,\mathbf{x}}(0) = \frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} \frac{\zeta_{\omega,\mathbf{x}}^q}{\zeta_{\omega,\mathbf{x}}}, \quad \kappa = |\kappa|, \quad (3.146)$$

$$\zeta_{\omega,\mathbf{x}} = \frac{\kappa}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_1^l(\omega, k)} + \frac{1}{\varepsilon_2^l(\omega, k)} - \right. \\ \left. - \frac{\omega^2}{c^2 \kappa^2} \frac{k_z^2}{k^2 - \omega^2 \varepsilon_1^t(\omega, k) / c^2} - \frac{\omega^2}{c^2 \kappa^2} \frac{k_z^2}{k^2 - \omega^2 \varepsilon_2^t(\omega, k) / c^2} \right] dk_z, \quad (3.146a)$$

*) Имеем $E_{\omega,\mathbf{x}}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \int (\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^{t(1,2)} + \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^{l(1,2)}) \exp(i \mathbf{k}_z z) d\mathbf{k}_z$. В силу нечетности по k_z компоненты Фурье $E_{\omega,\mathbf{k}}$ в правой части равенства при $z \rightarrow 0$ остается лишь член, содержащий $\rho_{\omega,\mathbf{k}}^{p,s(1,2)}$, который дает $E_{\omega,\mathbf{x}}(0)$.

$$\zeta_{\omega, \kappa}^q = -\frac{\kappa}{\pi} \int_{\substack{-\infty \\ \delta \rightarrow +0}}^{\infty} \frac{k_z^2}{k^2} \left\{ \frac{1}{(\omega - i\delta)^2/v^2 - k_z^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_1^l(\omega, k)} + \frac{\omega^2}{c^2(k^2 - \omega^2 \varepsilon_1^t(\omega, k)/c^2)} \right] + \frac{1}{(\omega + i\delta)^2/v^2 - k_z^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_2^l(\omega, k)} + \frac{\omega^2}{c^2(k^2 - \omega^2 \varepsilon_2^t(\omega, k)/c^2)} \right] \right\} dk_z. \quad (3.146b)$$

Подставив, наконец, (3.146) в правую часть (3.143), мы получаем окончательное выражение для искомых полей. Величина $\zeta_{\omega, \kappa}$ оказывается равной поверхностному импедансу.

Для того чтобы сопоставить полученные результаты с теми, которые возникали без учета пространственной дисперсии, рассмотрим компоненту поля вдоль движения заряда (по оси z) $E_{\omega, \kappa}(z)$ (см. § 2.2)

$$E_{\omega, \kappa}^{(1,2)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (E_{z, \omega, \mathbf{k}}^{l(1,2)} + E_{z, \omega, \mathbf{k}}^{t(1,2)}) \exp(ik_z z) dk_z. \quad (3.147)$$

Подставив сюда (3.143), (3.144), получаем поле в среде 1:

$$E_{\omega, \kappa}^{(1)}(z) = -\frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} \int_{\substack{-\infty \\ \delta \rightarrow +0}}^{\infty} \frac{k_z \exp(ik_z z)}{\pi i k^2 [(\omega - i\delta)^2/v^2 - k_z^2]} \times \\ \times \left[\frac{k_z^2}{\varepsilon_1^l(\omega, k)} - \frac{\kappa^2 \omega^2}{c^2(k^2 - \omega^2 \varepsilon_1^t(\omega, k)/c^2)} \right] dk_z - \frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} \frac{\zeta_{\omega, \kappa}^q}{\zeta_{\omega, \kappa}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_z \exp(ik_z z)}{i \pi k^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_1^l(\omega, k)} + \frac{\omega^2}{c^2(k^2 - \omega^2 \varepsilon_1^t(\omega, k)/c^2)} \right] dk_z, \quad (3.148)$$

и в среде 2, соответственно:

$$E_{\omega, \kappa}^{(2)}(z) = \frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} \int_{\substack{-\infty \\ \delta \rightarrow +0}}^{\infty} \frac{k_z \exp(ik_z z)}{i \pi k^2 [(\omega + i\delta)^2/v^2 - k_z^2]} \times \\ \times \left[\frac{k_z^2}{\varepsilon_2^l(\omega, k)} - \frac{\kappa^2 \omega^2}{c^2(k^2 - \omega^2 \varepsilon_2^t(\omega, k)/c^2)} \right] dk_z + \frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} \frac{\zeta_{\omega, \kappa}^q}{\zeta_{\omega, \kappa}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_z \exp(ik_z z)}{i \pi k^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_2^l(\omega, k)} + \frac{\omega^2}{c^2(k^2 - \omega^2 \varepsilon_2^t(\omega, k)/c^2)} \right] dk_z. \quad (3.149)$$

Конкретная зависимость полей от координаты z может быть найдена, если вычислить интеграл по k_z , замыкая путь интегрирования для $z < 0$ в (3.148) в нижнюю полуплоскость комплекс-

ного k_z , а для $z > 0$ в (3.149) — соответственно в верхнюю полуплоскость комплексного k_z . Легко видеть, что имеются лишь полюсы при *)

$$k_z = \omega/v \quad (3.150)$$

и полюсы при значениях k_z , являющихся решениями линейных дисперсионных соотношений (3.113) и (3.114). Полюс (3.150) возникает лишь в первых членах (3.148), (3.149) и описывает собственное поле заряда:

$$E_{\omega, \kappa}^{q(1,2)}(z) = - \frac{4\pi i q \exp(i\omega z/v)}{\omega (2\pi)^3 (\kappa^2 + \omega^2/v^2)} \left\{ \frac{\omega^2/v^2}{\epsilon_{1,2}^l(\omega, \sqrt{\kappa^2 + \omega^2/v^2})} - \frac{\kappa^2 \omega^2}{c^2 [\kappa^2 + \omega^2/v^2 - \omega^2 \epsilon_{1,2}^t(\omega, \sqrt{\kappa^2 + \omega^2/v^2})/c^2]} \right\}. \quad (3.151)$$

Если пренебречь пространственной дисперсией, т. е. положить $\epsilon^l(\omega, k) = \epsilon^t(\omega, k) = \epsilon(\omega)$, то (3.151) переходит в (2.19) с $\mu = 1^{**}$:

$$E_{\omega, \kappa}^q(z) = - \frac{4\pi i q (1 - c^2/v^2 \epsilon(\omega)) \exp(i\omega z/v)}{\omega (2\pi)^3 (\epsilon - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)}. \quad (3.152)$$

Рассмотрим теперь полюсы, соответствующие нулям линейных дисперсионных соотношений (3.113), (3.114). Они описывают поле излучения поперечных и продольных волн. Уравнения (3.113), (3.114) могут иметь ряд решений. Обозначим их соответственно

$$k_z = \mp k_{1,2}^{t(s)}(\omega, \kappa), \quad k_z = \mp k_{1,2}^{l(s)}(\omega, \kappa); \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (3.153)$$

так что выполняются тождества

$$(k_{1,2}^{t(s)}(\omega, \kappa))^2 + \kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{1,2}^t(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^{t(s)}(\omega, \kappa))^2}) = 0, \quad (3.154)$$

$$\epsilon_{1,2}^l(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^{l(s)}(\omega, \kappa))^2}) = 0; \quad k = \sqrt{\kappa^2 + k_z^2}. \quad (3.155)$$

Так, если пренебречь пространственной дисперсией, то решением (3.154) будет (ср. с выражением в экспоненте (2.20))

$$k_{1,2} = \mp (\omega/c) \sqrt{\epsilon_{1,2}(\omega) - \kappa^2 c^2/\omega^2}. \quad (3.156)$$

По определению считаем значения корней $k_{1,2}$ положительными. Знак плюс или минус в (3.153) выбирается с учетом того, что ϵ^l и ϵ^t имеют положительные мнимые части при $\omega > 0$ (т. е. фактически из принципа излучения или принципа причинности). Тогда получим в среде 1 знак минус, а в среде 2 — знак плюс, т. е. волны распространяются от границы раздела. Поле излучения

*) Полюс $k_z = -\omega/v$ никогда не попадает внутрь контура интегрирования.

**) Магнитную проницаемость легко учесть. Как известно [68], она определяется через ϵ^t и ϵ^l с помощью соотношения $1 - 1/\mu(\omega, k) = [\epsilon^t(\omega, k) - \epsilon^l(\omega, k)]\omega^2/c^2 k^2$ и $\mu \neq 1$, если $[\epsilon^t(\omega, k) - \epsilon^l(\omega, k)]/k^2 \neq 0$ при $k \rightarrow 0$.

можно выразить через амплитуды a (см. (2.20)):

$$E_{\omega, \kappa}^{r, t(1, 2)}(z) = \frac{4\pi i q a_{1, 2}^t \exp(\mp i k_{1, 2}^t z)}{\omega (2\pi)^3 \left[\frac{1}{2k_z} \frac{\partial}{\partial k_z} \left(k_z^2 - \omega^2 \varepsilon_{1, 2}^t(\omega, \sqrt{\kappa^2 + k_z^2}) / c^2 \right) \right]_{k_z = k_{1, 2}^t}}, \quad (3.157)$$

$$E_{\omega, \kappa}^{r, l(1, 2)}(z) = \frac{4\pi i q a_{1, 2}^l \exp(\mp i k_{1, 2}^l z)}{\omega (2\pi)^3 (\kappa^2 + (k_{1, 2}^l)^2) \left[\frac{1}{2k_z} \frac{\partial}{\partial k_z} \varepsilon_{1, 2}^l(\omega, \sqrt{\kappa^2 + k_z^2}) \right]_{k = k_{1, 2}^l}}, \quad (3.158)$$

где

$$a_{1, 2}^t = - \frac{1}{\varepsilon_{1, 2}^t(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1, 2}^t)^2})} \left[\frac{\kappa^2}{\omega^2/v^2 - (k_{1, 2}^t)^2} - \frac{\zeta_{\omega, \kappa}^q}{\zeta_{\omega, \kappa}} \right], \quad (3.159)$$

$$a_{1, 2}^l = \frac{(k_{1, 2}^l)^2}{\omega^2/v^2 - (k_{1, 2}^l)^2} + \frac{\zeta_{\omega, \kappa}^q}{\zeta_{\omega, \kappa}}. \quad (3.160)$$

Рассмотрим амплитуды излучения поперечных и электромагнитных волн, пренебрегая пространственной дисперсией, $\varepsilon'(\omega, k) = \varepsilon^t(\omega, k) = \varepsilon(\omega)$. Поверхностные импедансы $\zeta_{\omega, \kappa}$ и $\zeta_{\omega, \kappa}^q$ вычисляются элементарно:

$$\zeta_{\omega, \kappa} = - \frac{i\omega}{\kappa c} \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1(\omega) - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_1(\omega)} + \frac{\sqrt{\varepsilon_2(\omega) - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_2(\omega)} \right], \quad (3.161)$$

$$\zeta_{\omega, \kappa}^q = i \frac{\kappa c}{\omega} \left[\frac{c/v + \sqrt{\varepsilon_1(\omega) - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_1(\omega) (\varepsilon_1(\omega) - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)} - \frac{c/v - \sqrt{\varepsilon_2(\omega) - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_2(\omega) (\varepsilon_2(\omega) - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)} \right]. \quad (3.162)$$

Подставив их в (3.159), получаем

$$a_1^t = \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \left[\varepsilon_1(\omega) \sqrt{\varepsilon_2(\omega) - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} + \varepsilon_2(\omega) \sqrt{\varepsilon_1(\omega) - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right]^{-1} \times \\ \times \left[\frac{c/v - \sqrt{\varepsilon_2(\omega) - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_2(\omega) - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \frac{\varepsilon_2(\omega) c / (\varepsilon_1(\omega) v) - \sqrt{\varepsilon_2(\omega) - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_1(\omega) - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} \right], \quad (3.163)$$

$$a_2^t = - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \left[\varepsilon_1(\omega) \sqrt{\varepsilon_2(\omega) - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} + \varepsilon_2(\omega) \sqrt{\varepsilon_1(\omega) - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\frac{c/v + \sqrt{\varepsilon_1(\omega) - \kappa^2 c^2/\omega^2}}{\varepsilon_1(\omega) - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} - \frac{\varepsilon_1(\omega) c/(\varepsilon_2(\omega) v) + \sqrt{\varepsilon_1(\omega) - \kappa^2 c^2/\omega^2}}{\varepsilon_2(\omega) - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} \right], \quad (3.164)$$

что совпадает со значениями (2.27), (2.28) при $\mu = 1$ (об учете $\mu \neq 1$ см. сноску на с. 139).

Таким образом, в частном случае отсутствия пространственной дисперсии мы получаем прежние результаты. Новым является не только учет пространственной дисперсии в излучении поперечных волн, но и излучение продольных волн (амплитуда (3.160)), отсутствующих или, во всяком случае, игнорируемых при пренебрежении пространственной дисперсией. Ясно также, что амплитуды a^l и a^t в общем случае описывают также поверхностные волны ($\xi_{\omega, \kappa} = 0$) с учетом пространственной дисперсии (см. § 3.1).

4. Переходное излучение поперечных волн. Формулы (3.159) справедливы для каждой из ветвей ($s = 1, 2, 3, \dots$) решений дисперсионного уравнения (3.154) для поперечных волн. Волна, принадлежащая каждой из ветвей, вообще говоря, излучается при прохождении частицы через границы раздела сред. При расчете энергии излучения необходимо учесть частотную дисперсию. Мы покажем, однако, что даже в случае пространственной дисперсии множители $\frac{1}{2\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^t(\omega, k)$ фактически сокращаются. Вместо (2.32), (2.29) нужно записать

$$W_{1,2}^{r,t} = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\omega^2 \varepsilon_{1,2}^t(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^t)^2}) \right) \times \\ \times \exp[-i(\omega - \omega')t] [E_{\omega, \kappa}^{r,t(1,2)}(z) E_{-\omega', -\kappa}^{r,t(1,2)}(z) + \\ + E_{\perp, \omega, \kappa}^{r,t(1,2)}(z) E_{\perp, -\omega', -\kappa}^{r,t(1,2)}(z)] d\omega d\omega' d\kappa. \quad (3.165)$$

Поскольку энергия (3.165) вычисляется вдали от заряда и поверхности раздела и $E_{\perp, \omega, \kappa}$ пропорционально κ , то из $\text{div } \mathbf{E} = 0$ получим вместо (2.24)

$$E_{\perp, \omega, \kappa}^{r,t(1,2)}(z) = \pm \frac{\kappa}{\kappa^2} k_{1,2}^t E_{\omega, \kappa}^{r,t(1,2)}. \quad (3.166)$$

Учтя, что $k_{1,2}^t$ нечетно по ω (см., например, (3.156)), а также

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[iz(k_{1,2}^t(\omega, \kappa) - k_{1,2}^t(\omega', \kappa))] dz = \\ = 2\pi \delta(k_{1,2}^t(\omega, \kappa) - k_{1,2}^t(\omega', \kappa)) = 2\pi \delta(\omega - \omega') \left| \frac{\partial k_{1,2}^t(\omega, \kappa)}{\partial \omega} \right|^{-1}, \quad (3.167)$$

получаем

$$\begin{aligned}
 W_{1,2}^{r,t} &= 2\pi^2 \int_0^\infty d\omega \int \frac{d\kappa}{\kappa^2} \frac{\kappa^2 + (k_{1,2}^t)^2}{\left| \frac{\partial}{\partial \omega} k_{1,2}^t \right|} \times \\
 &\times \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\omega^2 \varepsilon_{1,2}^t \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^t)^2} \right) \right) |E_{\omega, \kappa}^{r,t(1,2)}|^2 = \\
 &= \frac{q^2}{2\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} \frac{|a_{1,2}^t|^2 \varepsilon_{1,2}^t \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^t)^2} \right)}{\left| \frac{\partial}{\partial \omega} k_{1,2}^t \right|} \times \\
 &\times \frac{\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_{1,2}^t \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^t)^2} \right)}{\left[1 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial (k_{1,2}^t)^2} \varepsilon_{1,2}^t \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^t)^2} \right) \right]^2}. \quad (3.168)
 \end{aligned}$$

Дифференцируя (3.154) по частоте, получим

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial k_z} \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2}^t \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + k_z^2} \right) \right) \right]_{k_z=k_{1,2}^t} \frac{\partial}{\partial \omega} k_{1,2}^t &= \\
 = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2}^t \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^t)^2} \right) \quad (3.169)
 \end{aligned}$$

и, следовательно, окончательно

$$W_{1,2}^{r,t} = \frac{q^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \int_0^\infty \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} \frac{\varepsilon_{1,2}^t \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^t)^2} \right) |k_{1,2}^t| |a_{1,2}^t|^2}{\left| 1 - \frac{\partial}{\partial (k_{1,2}^t)^2} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2}^t \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^t)^2} \right) \right|}. \quad (3.170)$$

Приведенный вывод справедлив для тех решений (3.154), энергия которых положительна (т. е. $\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_{1,2}^t \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^t)^2} \right) > 0$).

При пренебрежении пространственной дисперсией (3.170) переходит в (2.38), (2.43).

5. Переходное излучение продольных волн. В изотропных средах с пространственной дисперсией возникает, как упоминалось, новый эффект — переходное излучение продольных волн. Продольные волны являются электростатическими (магнитное поле отсутствует). В энергии же электрического поля (которая, естественно, при наличии среды учитывает энергию движения частиц среды в поле электростатических колебаний) учет дисперсии приводит к множителю

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon^l \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2} \right) = \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon^l \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2} \right). \quad (3.171a)$$

Таким образом (ср. с (3.165)),

$$W_{1,2}^{r,l} = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_{1,2}^l \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2} \right) \times \\ \times [E_{\omega, \kappa}^{r, l(1,2)}(z) E_{-\omega', -\kappa}^{r, l(1,2)}(z) + E_{\omega, \kappa}^{r, l(1,2)}(z) E_{\omega', -\kappa}^{r, l(1,2)}(z)] d\omega d\omega' d\kappa. \quad (3.171)$$

В результате преобразований, аналогичным тем, которые были сделаны для поперечных волн, получаем

$$W_{1,2}^{r,l} = 2\pi^2 \int_0^{\infty} d\omega \int \frac{\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2}{\kappa^2 \left| \frac{\partial}{\partial \omega} k_{1,2}^l \right|} \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_{1,2}^l \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2} \right) \times \\ \times |E_{\omega, \kappa}^{r, l(1,2)}|^2 d\kappa = \frac{q^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} \frac{|a_{1,2}^l|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_{1,2}^l \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2} \right)}{(\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2) \left| \frac{\partial}{\partial \omega} k_{1,2}^l \right|} \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial (k_{1,2}^l)^2} \varepsilon_{1,2}^l \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2} \right) \right]^{-1}. \quad (3.172)$$

Дифференцируя (3.155) по частоте, имеем

$$\frac{\partial k_{1,2}^l}{\partial \omega} \left[\frac{\partial}{\partial k_z} \varepsilon_{1,2}^l \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + k_z^2} \right) \right]_{k_z=k_{1,2}^l} = \\ = - \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_{1,2}^l \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2} \right). \quad (3.173)$$

Считая энергию продольной моды положительной, $\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_{1,2}^l \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2} \right) > 0$, окончательно получаем

$$W_{1,2}^{r,l} = \frac{2q^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} \frac{(k_{1,2}^l)^2 |a_{1,2}^l|^2}{(\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2) \frac{\partial}{\partial k_{1,2}^l} \varepsilon_{1,2}^l \left(\omega, \sqrt{\kappa^2 + (k_{1,2}^l)^2} \right)}. \quad (3.174)$$

Тем самым завершается построение общей теории переходного излучения в средах с пространственной дисперсией при условии зеркального отражения. Отметим, впрочем, что настоящий расчет касается лишь слабо затухающих объемных волн. Переходное излучение поверхностных волн должно рассчитываться отдельно (см. § 3.1). Необходимо при этом учитывать, что поверхностный импеданс $\xi_{\omega, \kappa}$ входит как в поперечные, так и в продольные поля (см. (3.159), (3.160)). Учету пространственной дисперсии в процессах переходного излучения посвящены многочисленные исследования (см. [22, 29, 70, 71]).

6. Учет частотной и пространственной дисперсии при переходном излучении в нестационарной среде. Если свойства изотропной среды меняются скачком во времени и среда однородна в пространстве до и после скачка, то можно считать справедливой связь (3.116)*). Продольные волны, в силу непрерывности индукции, излучаться в данном случае не могут. Поэтому учет пространственной дисперсии сводится к тому, что во всех формулах § 2.3 нужно ϵ заменить на $\epsilon^t(\mathbf{k})$. Более сложно обстоит дело с учетом частотной дисперсии в среде, свойства которой меняются во времени, так как связь $D_k^t(t)$ и $E_k^t(t')$ становится интегральной**):

$$D_k^t(t) = \int_{-\infty}^t \epsilon^t(\mathbf{k}, t, t-t') E_k^t(t') dt'. \quad (3.175)$$

Таким образом, учет пространственной дисперсии сводится к учету ее эффектов в нелокальной связи (3.175), причем зависимость ϵ^t от $t-t'$ характеризует «память» предшествующих состояний, т. е. частотную дисперсию, а зависимость от t — нестационарность среды. Соотношение (3.175) имеет место и в случае, когда пространственной дисперсией пренебрегается (тогда ϵ^t в (3.175) не зависит от $\mathbf{k}$). Поэтому учет только частотной дисперсии при наличии скачка ϵ во времени также приводит к интегральной связи (3.175). Вместе с тем, в § 2.3 гл. 2, в случае ультрарелятивистских частиц, мы считали в каждой из сред связь D и E локальной во времени и учитывали частотную дисперсию. Это оказывается оправданным только для ультрарелятивистских частиц, так как при $\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$ время формирования излучения много больше характерного времени, связанного с частотной дисперсией (см. оценку (2.111)). Для нерелятивистских частиц эти характерные времена сравнимы между собой и при учете дисперсии связь D и E становится в общем случае интегральной.

Рассмотрим, например, модель, когда плотность, а потому и ϵ^t , среды испытывает резкий скачок. Тогда [34]

$$\epsilon^t(k, t, t-t') = \begin{cases} \epsilon_1^t(k, t-t'), & t < 0, \quad t' < t; \\ \epsilon_2^t(k, t-t'), & t > 0, \quad t' < t. \end{cases} \quad (3.176)$$

Граничное условие (см. (2.76); $D_k^t(t) = v_k^t D_k(t)/v$)

$$D_k^{(1)}(0) = D_k^{(2)}(0) \quad (3.177)$$

приводит к соотношению

$$E_k^{(1)}(0) - E_k^{(2)}(0) = \int_{-\infty}^0 (\epsilon_2^t(k, -t') - \epsilon_1^t(k, -t')) E_k(t') dt'. \quad (3.178)$$

*) Для тензора $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, t, t')$ справедливы соотношения типа (3.112); $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, t, t') = \epsilon^t(k, t, t')(\delta_{ij} - k_i k_j/k^2) + \epsilon^t(k, t, t') k_i k_j/k^2$.

**) В качестве второго аргумента ϵ^t удобно выбрать не t' , а $t-t'$.

Существенно, что в правую часть (3.178) входит лишь поле при $t < 0$, т. е. $E_k^{(1)}(t')$. Используя

$$\varepsilon_{1,2}^t(k, -t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{1,2}^t(\omega, k) \exp(i\omega t') d\omega \quad (3.179)$$

и

$$E_k^{(1)}(t) = E_k^{(1)}(0) \exp(-ikvt), \quad (3.180)$$

получим *)

$$E_k^{(1)}(0) - E_k^{(2)}(0) = \int_{\delta \rightarrow +0}^{\infty} E_k^{(1)}(0) \frac{\varepsilon_2^t(\omega, k) - \varepsilon_1^t(\omega, k)}{2\pi i (\omega - kv - i\delta)} d\omega. \quad (3.181)$$

Будем считать, что $\varepsilon_{1,2}^t(\omega, k)$ не имеют полюсов в верхней полуплоскости комплексного ω (см. [61]). Замыкая контур по ω в верхнюю полуплоскость, имеем

$$E_k^{(1)}(0) - E_k^{(2)}(0) = [\varepsilon_2^t(kv, k) - \varepsilon_1^t(kv, k)] E_k^{(1)}(0). \quad (3.182)$$

Это граничное условие отличается от того, которое использовалось в § 2.3.

Приведем решение задачи о переходном излучении заряда в нестационарной среде при выполнении граничного условия (3.182). При $t < 0$ излучения нет:

$$E_k^{t(1)}(t) = \frac{4\pi i q (kv) (v - k(kv)/k^2) \exp(-ikvt)}{c^2 (2\pi)^3 [k^2 - (kv)^2 \varepsilon_1^t(kv, k)/c^2]}. \quad (3.183)$$

При $t > 0$ появляется излучение:

$$E_k^{t(2)}(t) = \frac{4\pi q}{c(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} (v - k(kv)) \left[b_k^{(+)} \exp(-i\omega^t(k)t) + b_k^{(-)} \exp(i\omega^t(k)t) + \frac{i(kv/c) \exp(-ikvt)}{k^2 - (kv)^2 \varepsilon_2^t(kv, k)/c^2} \right], \quad (3.184)$$

где $\omega^t(k) > 0$ есть решение дисперсионного уравнения для поперечных волн

$$k^2 - (\omega^t(k))^2 \varepsilon_2^t(\omega^t(k), k)/c^2 = 0. \quad (3.185)$$

*) Интеграл по t' в (3.178) сводится к следующему:

$$\int_{-\infty}^0 \exp[i(\omega - kv)t] dt = \frac{1}{i(\omega - kv - i\delta)} \quad \delta \rightarrow +0$$

Здесь знак δ выбирается, как обычно, из условия сходимости интеграла при $t \rightarrow -\infty$.

Получаем

$$b_k^{(\pm)} = \frac{i}{2k} \left\{ \frac{[1 + \varepsilon_1^t(\mathbf{k}\mathbf{v}, k) - \varepsilon_2^t(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)] \mathbf{k}\mathbf{v}/kc \pm \omega^t(k)/kc}{1 - (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \varepsilon_1^t(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)/k^2 c^2} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}/kc \pm \omega^t(k)/kc}{1 - (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \varepsilon_2^t(\mathbf{k}\mathbf{v}, k)/k^2 c^2} \right\}. \quad (3.186)$$

Интенсивность излучения подсчитывается по формуле

$$W^r = \int_0^\infty dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} W^r(k, \theta, \varphi) d\varphi; \quad (3.187)$$

$$W^r(k, \theta, \varphi) = \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta}{2\pi^2 c^2 \omega^t(k)} \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon_2^t(\omega, k) \right]_{\omega=\omega^t(k)} |kb_k^{(+)}|^2. \quad (3.188)$$

Легко видеть, что для ультрарелятивистских частиц видоизменение граничного условия практически не сказывается на результате. Интенсивность излучения ультрарелятивистских частиц, подсчитанная по формуле (3.188), совпадает со значением, приводимым в § 2.3. Однако излучение назад и излучение нерелятивистских частиц, если учитывать эффекты дисперсии, существенно видоизменяются. Поэтому результаты § 2.3 справедливы либо в недиспергирующей среде (без учета частотной дисперсии), либо для ультрарелятивистских частиц.

§ 3.5. Переходное излучение в нелинейных средах

1. Введение. Нелинейная восприимчивость. До сих пор обсуждалось переходное излучение в линейной электродинамике, т. е. в средах, характеризующихся линейной проницаемостью (проницаемостью, не зависящей от напряженности поля). Фактически, однако, проницаемости сред в какой-то мере зависят от поля. Здесь уместно различать два случая. В первом из них проницаемость можно считать зависящей лишь от внешнего поля, в котором находится среда. Напряженности такого внешнего поля $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ входят при этом в ε_{ij} в качестве параметров. Обычно внешние поля можно считать постоянными и однородными или, во всяком случае, медленно меняющимися во времени и (или) в пространстве. Во втором случае среда является, можно сказать, существенно нелинейной — индукция $\mathbf{D}$ зависит при этом нелинейным образом от самого рассматриваемого поля $\mathbf{E}$. Вакуум в достаточной степени является также нелинейным, причем соответствующее характерное (критическое) значение поля (индукции) $B_c = E_c$ очень велико — равно $1,4 \cdot 10^{13}$ Гс (см. гл. 7 и [72]). В полях $B \gtrsim B_c$ нелинейность вакуума сильна, в слабых же полях $B \ll B_c$ нелинейность является слабой. В средах, особенно в плазме, нелинейность проявляется в значительно более слабых полях, чем в вакууме. В плазме нелинейность обусловлена влиянием поля на движение электронов. Можно упомянуть и о нелинейности, свя-

занной с зависимостью заселенности уровней от напряженности поля, со стрикционными эффектами и с нелинейной поляризацией электронно-дырочного «вакуума» (основного состояния) в полупроводниках. В последнем случае роль «щели» $2m_e c^2 \approx 10^6$ эВ в вакууме играет, грубо говоря, ширина запрещенной зоны в полупроводниках $\mathcal{E}_g \sim 1$ эВ. Естественно, что и критическое поле B_c в полупроводниках на много порядков слабее вакуумного критического поля $B_c = 4,4 \cdot 10^{13}$ Гс (о весьма своеобразном поведении полупроводников в сильном магнитном поле см., в частности, в [104]).

Полная плотность тока поляризации $\mathbf{j}^P$ в нелинейной среде в общем случае состоит из линейной $\mathbf{j}^{P(0)}$ и нелинейной $\mathbf{j}^{P, n1}$ частей:

$$\mathbf{j}^P = \mathbf{j}^{P(0)} + \mathbf{j}^{P, n1} = \int \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^P \exp(-i\omega t + i \mathbf{k} \mathbf{r}) d\omega d\mathbf{k}, \quad (3.189)$$

причем

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{P(0)} = -\frac{i\omega}{4\pi} (\epsilon_{ij}^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) - 1) \mathbf{E}_{j, \omega, \mathbf{k}}, \quad (3.190)$$

где $\epsilon_{ij}^{(0)}(\omega, \mathbf{k})$ — тензор линейной диэлектрической проницаемости, учитывающий частотную и пространственную дисперсию. Выше мы не выделяли линейной части тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}^{(0)}$ из общего ϵ_{ij} . Так целесообразно поступать в случае, когда сильные поля можно учитывать точно (примером может служить внешнее магнитное поле в плазме), так что ϵ_{ij} описывает линейную связь между током и слабым полем. В нелинейных средах, однако, часто удобно выделять нелинейные токи, раскладывая ток среды по напряженности поля, т. е. считать поля слабыми. При этом поля должны быть малыми по сравнению с некоторыми характерными критическими полями среды. Можно, однако, считать, что полное поле в этом случае состоит из достаточно сильного внешнего поля (заданного поля) и слабого поля (например, поля заряда q , как в интересующей нас здесь задаче о переходном излучении). В этом случае нелинейные токи дают дополнительные члены в выражение, связывающее ток со слабым полем. В нелинейных откликах (поляризуемостях), как правило, пространственная дисперсия играет большую роль.

С учетом квадратичных и кубических нелинейностей компоненты Фурье $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{P, n1}$ нелинейной плотности тока $\mathbf{j}^{P, n1}(\mathbf{r}, t)$ в однородной и стационарной среде могут быть записаны в общем случае в виде

$$\begin{aligned} j_{i, \omega, \mathbf{k}}^{P, n1} = & \int S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) E_{l, \omega_1, \mathbf{k}_1} E_{j, \omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1} d\omega_1 d\mathbf{k}_1 + \\ & + \int \Sigma_{ijls}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) E_{l, \omega_1, \mathbf{k}_1} E_{s, \omega_2, \mathbf{k}_2} \times \\ & \times E_{j, \omega - \omega_1 - \omega_2, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} d\omega_1 d\omega_2 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \end{aligned} \quad (3.191)$$

где $S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1)$ и $\Sigma_{ijls}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$ — матричные элементы, характеризующие нелинейный отклик среды на поле (для

плазмы см. [73] и гл. 6, а в оптике конденсированных сред см. [74]).

Связь (3.191) при учете пространственной дисперсии в однородной среде является наиболее общей, поскольку магнитные поля $\mathbf{B}_{\omega, \mathbf{k}} = [\mathbf{k} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}] c / \omega$ с помощью уравнения Максвелла (2.10) могут быть выражены через электрические. Однако в некоторых случаях, например при наличии постоянного магнитного поля, можно использовать также разложение по $\mathbf{B}_{\omega, \mathbf{k}}$. В (3.191) удобно считать матричные элементы S_{ijl} и Σ_{ijls} симметричными при перестановке полей:

$$\begin{aligned} S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) &= S_{ilj}(\omega, \mathbf{k}; \omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1), \\ \Sigma_{ijls}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= \Sigma_{ijsl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1) = \\ &= \Sigma_{iljs}(\omega, \mathbf{k}; \omega - \omega_1 - \omega_2, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \\ &= \Sigma_{islj}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega - \omega_1 - \omega_2, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (3.192)$$

Если, например, полное поле $\mathbf{E}$ является суммой сильного неоднородного (или переменного во времени) поля $\mathbf{E}_0$ и слабого поля $\mathbf{E}_1$ (т. е. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$, где $E_1 \ll E_0$), то получаем

$$\begin{aligned} j_{i, \omega, \mathbf{k}}^{\text{P, nl}} &= 2 \int S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) E_{0, l, \omega_1, \mathbf{k}_1} E_{1, j, \omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1} d\omega_1 d\mathbf{k}_1 + \\ &+ 3 \int \Sigma_{ijls}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) E_{0, l, \omega_1, \mathbf{k}_1} E_{0, s, \omega_2, \mathbf{k}_2} \times \\ &\times E_{1, j, \omega - \omega_1 - \omega_2, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} d\omega_1 d\omega_2 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \end{aligned} \quad (3.193)$$

где выписаны лишь члены, линейные относительно E_1 и, в частности, опущен самый большой член, зависящий только от E_0 *).

В общем случае неоднородного и переменного поля E_0 (или $\mathbf{B}_0$) в координатном представлении

$$j_i^{\text{P, nl}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\omega}{4\pi} \int \delta \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{nl}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') E_{1, j}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'. \quad (3.194)$$

Ядро $\delta \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{nl}}$ можно найти из (3.193) при переходе от фурье-компонент к самим токам и полям. Если сильное поле однородно в пространстве и постоянно во времени, то

$$\mathbf{E}_{0, \omega, \mathbf{k}} = \mathbf{E}_0 \delta(\omega) \delta(\mathbf{k}) \quad (3.195)$$

и связь (3.193) принимает вид

$$\begin{aligned} j_{i, \omega, \mathbf{k}}^{\text{P, nl}} &= -\frac{i\omega}{4\pi} \delta \epsilon_{ij}^{\text{nl}}(\omega, \mathbf{k}) E_{1, j, \omega, \mathbf{k}} = (2S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; 0, 0) E_{0, l} + \\ &+ 3\Sigma_{ijls}(\omega, \mathbf{k}; 0, 0; 0, 0) E_{0, l} E_{0, s}) E_{1, j, \omega, \mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Тем самым оказывается определенной нелинейная добавка к ди-

*) Впрочем, последний может быть строго равным нулю, как это имеет место для компонент тока с $\mathbf{k} \neq 0$, $\omega \neq 0$ при выполнении соотношения (3.195).

электрической проницаемости

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) + \delta\varepsilon_{ij}^{nl}(\omega, \mathbf{k}), \quad (3.197)$$

где $\varepsilon_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}^{(0)}$ — линейная часть тензора диэлектрической проницаемости. По самому смыслу использования разложения по полям (3.191) необходимо соблюдение условия $|\delta\varepsilon^{nl}| \ll |\delta\varepsilon^{(0)}|$.

Родственным методом можно рассмотреть диэлектрическую проницаемость в слабонеоднородной среде (см. также [102]). Для этой цели будем считать известным аналогичное (3.193) разложение плотности тока $\mathbf{j}^{P, nl}$ по неоднородностям концентрации δN (предполагая, конечно, что $|\delta N| = |N - N_0| \ll N_0$, $\delta N_{\omega, \mathbf{k}}$ — компонента Фурье для δN):

$$\begin{aligned} j_{i, \omega, \mathbf{k}}^P = & \int S'_{ij}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) \delta N_{\omega_1, \mathbf{k}_1} E_{j, \omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1} d\omega_1 d\mathbf{k}_1 + \\ & + \int \Sigma'_{ij}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \delta N_{\omega_1, \mathbf{k}_1} \delta N_{\omega_2, \mathbf{k}_2} \times \\ & \times E_{j, \omega - \omega_1 - \omega_2, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} d\omega_1 d\omega_2 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \end{aligned} \quad (3.198)$$

где S'_{ij} и Σ'_{ij} — матричные элементы, описывающие изменение плотности тока под влиянием неоднородностей δN . В некоторых случаях (например, в плазменных волнах) величины δN и $\mathbf{E}_0$ связаны между собой и тогда разложения (3.193) и (3.198) по сути дела эквивалентны. Однако неоднородности концентрации могут оказаться и не связанными с полем $\mathbf{E}_0$.

Следует заметить, что особый интерес могут представить неустойчивые среды, в которых сильные поля $\mathbf{E}_0$ и сильные неоднородности δN могут возникать из-за развития неустойчивостей. При этом неустойчивости могут приводить как к возбуждению почти монохроматических волн (некоторых собственно мод), так и волн широкого спектра. В случае волн с широким спектром довольно часто оказывается оправданным приближение случайных фаз. Усреднение плотности тока (3.193) по фазам полей $\mathbf{E}_{0, \omega, \mathbf{k}}$ приводит к формулам для $\delta\varepsilon_{ij}^{nl}(\omega, \mathbf{k})$ вида

$$\delta\varepsilon_{ij}^{nl}(\omega, \mathbf{k}) = \int \delta\varepsilon_{ij}^{nl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) |E_0|_{\omega_1, \mathbf{k}_1}^2 d\omega_1 d\mathbf{k}_1, \quad (3.199)$$

$$\langle (E_0)^2 \rangle = \int |E_0|_{\omega_1, \mathbf{k}_1}^2 d\omega_1 d\mathbf{k}_1,$$

где $\delta\varepsilon_{ij}^{nl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1)$ выражаются через введенные выше матричные элементы S_{ij} и Σ_{ij} , а знак $\langle \rangle$ означает усреднение по фазам полей; наконец, $|E_0|_{\omega_1, \mathbf{k}_1}^2$, как видно из (3.199), — величина, связанная с энергией k -й гармоники поля.

Мы не будем здесь подробно останавливаться на вопросе об описании таких случайных полей, отсылая читателя за подробностями к [73]. Отметим лишь, что поскольку матричные элементы S_{ij} и Σ_{ij} сейчас хорошо известны для различных сред не только теоретически, но и экспериментально, нелинейная диэлектрическая проницаемость может быть в ряде случаев определена

достаточно хорошо. В качестве примера приведем результат расчета $\delta\epsilon_{ij}^{nl}$ для случайных изотропно распределенных ленгмюровских продольных полей, используя матричные элементы S_{ijl} и Σ_{ijls} , приведенные в [73] (см. также гл. 6):

$$\delta\epsilon_{ij}^{nl}(\omega, \mathbf{k}) = \delta\epsilon_{ij}^{nl,t}(\omega, \mathbf{k})(\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) + \delta\epsilon_{ij}^{nl,1}(\omega, \mathbf{k}) k_i k_j / k^2, \quad (3.200)$$

$$\delta\epsilon_{ij}^{nl,t}(\omega, \mathbf{k}) \approx - \frac{\omega_{pe}^2}{3\omega^2} \int \frac{|E_0|^2_{\omega_1, \mathbf{k}_1} d\omega_1 d\mathbf{k}_1}{4\pi N_0 m_e c^2}. \quad (3.201)$$

Сходным путем может быть рассмотрена среда со случайными неоднородностями концентрации δN , причем вместо (3.199) может быть получено соотношение [75]

$$\delta\epsilon_{ij}^{nl}(\omega, \mathbf{k}) = \int \delta\epsilon_{ij}^{nl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) |\delta N|^2_{\omega_1, \mathbf{k}_1} d\omega_1 d\mathbf{k}_1, \quad (3.202)$$

$$\langle (\delta N) \rangle = \int |\delta N|^2_{\omega_1, \mathbf{k}_1} d\omega_1 d\mathbf{k}_1, \quad (3.203)$$

где $\delta\epsilon_{ij}^{nl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1)$ выражается через матричные элементы S'_{ij} и Σ'_{ij} , входящие в (3.198). Очевидно, что переходное излучение в нелинейной среде, определяемое величиной $\delta\epsilon_{ij}^{nl}$, может отличаться от переходного излучения в обычной среде (в этом случае существенна величина $\delta\epsilon_{ij}^{(0)}$) за счет разных частотных зависимостей $\delta\epsilon_{ij}^{nl}$ и $\delta\epsilon_{ij}^{(0)}$.

2. Нелинейное переходное излучение. Переходное излучение в нелинейной среде может возникнуть и из-за того, что скачком изменяется только нелинейная часть тензора диэлектрической проницаемости $\delta\epsilon_{ij}^{nl}$, тогда как линейная часть остается неизменной. Такой тип переходного излучения можно назвать нелинейным переходным излучением.

В силу используемого нами условия $|\delta\epsilon^{nl}| \ll |\delta\epsilon^{(0)}|$ нелинейное переходное излучение в определенном смысле аналогично рассмотренному выше случаю переходного излучения при $\Delta N/N_0 \ll 1$. Однако скачок $\delta\epsilon^{nl}$ легче создать и им легче управлять (путем изменения поля $|E_0|^2_{\omega_1, \mathbf{k}_1}$ или поля E_0) по сравнению со скачком концентрации ΔN . По-видимому, таков один из реальных путей экспериментальной проверки рассмотренного в § 2.3 переходного излучения в нестационарной среде. Выражение (3.193) удобно для анализа переходного излучения на нерезкой границе раздела в пространстве или во времени (предполагается, что «граница» возникла под влиянием полей E_0 или B_0 , фурье-компоненты которых и нужно подставить в (3.193)). Для нелинейного переходного излучения, когда скачок претерпевает только величина $\delta\epsilon^{nl,t}$, вместо (2.60) получаем (при $(\mathcal{E}/Mc^2) \gg 1$)

$$W_2^{tr}(\omega) = \frac{q^2 |\delta\epsilon_1^{nl,t}(\omega) - \delta\epsilon_2^{nl,t}(\omega)|^2}{6\pi c [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^2}. \quad (3.204)$$

Если $\delta\epsilon_1^{n1,t}$ быстро падает с ростом частоты (точнее, падает быстрее $1/\omega^{5/2}$), то интегральная интенсивность будет определяться частотами, существенно меньшими $\omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$, и, следовательно, не будет зависеть от энергии частиц. Именно такая ситуация возникает в случае, когда $\delta\epsilon_1^{n1,t}$ создается случайными неоднородностями плотности и, согласно (3.203), оказывается $\delta\epsilon_1^{n1,t} \sim 1/\omega^4$. Если же $\delta\epsilon_1^{n1,t}(\omega)$ падает с частотой медленнее $1/\omega^{5/2}$ (это имеет место для приведенно выше примера плазмы с интенсивными ленгмюровскими колебаниями, см. (3.201)), то $\omega W^{tr}(\omega)$ имеет максимум при $\omega \sim \omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$ (так же, как и в линейных средах), но полная интенсивность излучения определяется величиной скачка в нелинейной проницаемости. Например, если релятивистская частица переходит в плазме из области, в которой имеется интенсивное случайное ленгмюровское поле, в область, в которой плотности плазмы та же, но ленгмюровские поля отсутствуют, то частица излучает нелинейное переходное излучение. Интегральная интенсивность этого излучения равна ($\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$):

$$W^{tr} \approx \int_0^\infty W_2^{tr}(\omega) d\omega = \frac{q^2 \omega_{pe}}{216c} \left(\int \frac{|E_0|_{\omega_1, k_1}^2 d\omega_1 dk_1}{4\pi N_0 m_e c^2} \right)^2 \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (3.205)$$

Нелинейное переходное излучение в среде, вообще говоря, достаточно быстро падает с ростом частоты (во всяком случае, при $\omega \gg \omega_{pe}$ или при $\omega \gg \omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$), а частотная зависимость нелинейных проницаемостей вакуума существенна только на весьма высоких частотах. Поэтому, как оказывается, вакуумное переходное излучение в сильных полях может доминировать над переходным излучением, обусловленным нелинейностью среды, даже в весьма плотных средах (см. § 7.1).

Сделаем здесь также одно замечание общего характера, касающееся использования переходного излучения. Дело в том, что обычно внимание сосредотачивается на применении переходного излучения для определения энергии частиц («переходные счетчики»). Между тем, используя частицы с известной энергией, по переходному излучению можно диагностировать среду (здесь существен тот факт, что излучаемые частоты, вообще говоря, достаточно велики, чтобы выходить из среды). Конкретно, таким образом, представляется возможным определять уровень турбулентности в плазме и оценивать степень неоднородности среды. При этом среда может быть нестационарной, подвержена быстрым изменениям во времени и в пространстве. Сказанное относится как к линейному, так и нелинейному переходному излучению.

3. Нелинейное излучение Вавилова — Черенкова. Нелинейное изменение диэлектрической проницаемости может привести к ситуации, при которой критерий излучения В.—Ч. может быть в линейном приближении нарушен, но выполнен с учетом нелинейных

проницаемостей. Мы имеем в виду поправки $\delta\epsilon^{nl}$, возникающие, например, в случайных полях. Однако в нелинейной среде и при выполнении критерия излучения В.—Ч. в линейном приближении в отсутствие внешних полей также возникает дополнительное излучение В.—Ч. Действительно (см. [76]), в нелинейной среде мы должны описывать поле, создаваемое зарядом, учитывая нелинейные отклики. Учтем лишь член, квадратичный по полям. Тогда

$$\left(k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \epsilon_{ij}^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_{j,\omega,\mathbf{k}} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{i,\omega,\mathbf{k}}^q + \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{p,nl}, \quad (3.206)$$

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{p,nl} = \int S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) E_{l,\omega_1,\mathbf{k}_1} E_{j,\omega-\omega_1,\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} d\omega_1 d\mathbf{k}_1, \quad (3.207)$$

где S_{ijl} — матричные элементы нелинейного тока, квадратичного по полям, а $j_{i,\omega,\mathbf{k}}^q$ — плотность тока равномерно движущегося заряда:

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^q = \frac{qv_i}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (3.208)$$

В первом приближении, пренебрегая $j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{p,nl}$, можно из (3.206) найти поле заряда:

$$E_{i,\omega,\mathbf{k}}^q = G_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{4\pi i v_j q \omega}{c^2 (2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (3.209)$$

где для изотропной среды функция Грина $G_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ равна

$$G_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = G_{ij}^l(\omega, \mathbf{k}) + G_{ij}^t(\omega, \mathbf{k}), \quad (3.210)$$

$$G_{ij}^l(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi i k_i k_j}{k^2 \omega \epsilon^l(\omega, \mathbf{k})}, \quad (3.211)$$

$$G_{ij}^t(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 - \omega^2 \epsilon^t(\omega, \mathbf{k})/c^2},$$

$$\epsilon_{ij}^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon^l(\omega, \mathbf{k}) k_i k_j / k^2 + \epsilon^t(\omega, \mathbf{k}) (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2). \quad (3.212)$$

Найденное поле (3.209) подставим в (3.207). Это даст дополнительный ток, который приведет к излучению. Можно сказать, что поляризация, окружающая заряд, состоит из гармоник, которые, благодаря нелинейности, могут рассеиваться друг на друге, давая электромагнитное излучение. Легко видеть, что это возможно только при выполнении условия излучения В.—Ч. в линейном приближении, т. е. возникает новый тип излучения В.—Ч. — нелинейное излучение В.—Ч. Действительно, поле заряда E^q пропорционально $\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$ (см. (3.209)) и поэтому нелинейный ток (3.207) содержит множитель $\delta(\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v}) \delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v}) = \delta(\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$, т. е. он пропорционален $\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$, где ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор излучаемой волны. Следова-

тельно, для существования этого излучения необходимо выполнение условия излучения В.—Ч. $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$. Записав

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{\text{P,nl}} = \frac{q\delta v_{i,\omega,\mathbf{k}}^{\text{nl}}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (3.213)$$

где

$$\delta v_{i,\omega,\mathbf{k}}^{\text{nl}} = -\frac{2q}{\pi c^4} \int S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) \delta(\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v}) \times \\ \times u_i v_r \omega_1 (\omega - \omega_1) G_{js}(\omega_1, \mathbf{k}_1) G_{lr}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \quad (3.214)$$

(величина $\delta v_{i,\omega,\mathbf{k}}^{\text{nl}}$ играет роль эффективной нелинейной поправки к скорости частицы), получим для мощности дополнительного (нелинейного) излучения В.—Ч: выражение (интегрирование ведется по области частот, для которых $\varepsilon^t(\omega)v^2/c^2 > 1$)

$$Q_{\text{V-Ch}}^{\text{nl}} = \frac{q^2}{vc^2} \int_0^\infty \omega d\omega \left. \frac{[\mathbf{k} \delta v_{\omega,\mathbf{k}}^{\text{nl}}]^2}{k^2} \right|_{\substack{\mathbf{k}\mathbf{v}=\omega, \\ k^2=\omega^2 \varepsilon^t(\omega)/c^2}}. \quad (3.215)$$

Эффект пропорционален q^4 (см. (3.214)) и замечен только для больших зарядов (о когерентном излучении см. § 3.7). Оценка величины (3.215) для случая, когда для нелинейного отклика S_{ijl} использовалось плазменное приближение, приведена в [47]. Для элементарных зарядов (например, электронов) нелинейное излучение В.—Ч. является лишь малой добавкой к обычному линейному излучению В.—Ч. (о черенковском возбуждении нелинейной волны в плазме, когда нелинейное излучение В.—Ч. не является малой поправкой, см. [77]).

4. Переходное излучение световых импульсов. Излучение может создаваться нелинейным током и в случае, когда заряд отсутствует. Допустим, что в прозрачной среде движется некий хорошо локализованный пакет (импульс) электромагнитных волн (или любых других волн), имеющий набор волновых векторов $\mathbf{k}_0$ и частот $\omega(\mathbf{k}_0)$. В известном приближении такой пакет не расплывается и его скорость равна групповой скорости $\mathbf{v}_g = d\omega(\mathbf{k}_0)/d\mathbf{k}_0$. Очевидно, что с кинематической точки зрения этот пакет эквивалентен любому другому источнику и мог бы давать излучение В.—Ч. при условии

$$\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{v}_g. \quad (3.216)$$

Однако в линейной теории при соблюдении принципа суперпозиции интенсивность излучения В.—Ч., естественно, равна нулю. В нелинейной теории может возникнуть заметное излучение (см. [64], § 16.1, а также [219]. Решение задачи сведется к тому, что в нелинейный ток (3.207) надо подставить поле пакета волн и вычислить соответствующую мощность излучения так же, как мы делали это выше, подставляя в нелинейный ток поле заряда.

Теперь в нулевом приближении излучения нет и нелинейный эффект является основным. Но тогда видно, что задача сведется к расчету так называемого распадного процесса (см. [73]) в нелинейной теории. Из (3.206) следует, что частота ω и волновое число $\mathbf{k}$ должны совпадать с частотой и волновым вектором излучаемой волны $\omega'(\mathbf{k})$. Пусть спектр волн пакета описывается $\omega(\mathbf{k}_0)$. Из (3.207) получим

$$\omega(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0) - \omega'(\mathbf{k}), \quad (3.217)$$

что представляет собой хорошо известное распадное условие [73]. Считая, что $k \ll k_0$, из (3.217) получаем соотношение

$$\omega'(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \frac{d}{d\mathbf{k}_0} \omega(\mathbf{k}_0), \quad (3.218)$$

совпадающее с (3.216).

Заметим, что в нелинейных средах пакеты волн могут вообще не расплываться, так как линейная дисперсия может быть скомпенсирована нелинейностями. Такие пакеты называют солитонами. Солитоны для электромагнитных волн подробно исследованы в нелинейной оптике (см. [78]). В плазме большую роль играют солитоны электростатических продольных волн [79, 80].

Задачу о переходном излучении световых пакетов (а также пакетов других волн) следует поставить следующим образом. Пусть пакет волн переходит из одной среды (с одним значением $\epsilon_{ij}^{(0)}$) в другую среду (с другим значением $\epsilon_{ij}^{(0)}$). В рамках линейной теории на границе раздела произойдет лишь отражение и преломление тех волн, из которых составлен пакет. В нелинейной среде пакеты волн создают нелинейный ток $\mathbf{j}^{P, n1}$ (см. (3.207)), «прохождение» которого через границу может создать дополнительное излучение, даже если условие излучения В.—Ч. (3.218) для пакета волн не выполнено. Пакеты волн (и, в частности, солитоны) могут быть образованы регулярными волнами, но возможны и нелинейные пакеты волн, образованные случайными волнами (фотонами, плазмонами и т. п. (см. [81])). Нелинейные пакеты случайных волн могут не расплываться, т. е. представлять собой фотонные или плазмонные солитоны. При прохождении таких пакетов через границу раздела сред можно говорить о переходном излучении фотонов (плазмонов и т. п.). В известном смысле, говоря о переходном излучении фотонов или импульсов электромагнитных волн, мы вводим, казалось бы, лишь новый термин, так как речь идет об известной задаче нелинейной оптики (нелинейной физики плазмы и др. сред) о прохождении пакета через границу раздела сред с учетом нелинейных процессов. Однако, с одной стороны, такая задача для самосогласованных нелинейных пакетов (солитонов) подробно не обсуждалась (см. [78]), а с другой — приведенная аналогия важна, как нам кажется, в том отношении, что иллюстрирует возможность возникновения переходного излучения от зарядов и токов, вне зависимости от способа их создания (внешние источники или токи и

заряды среды). Стоит отметить, что солитоны часто имеют высокую несущую частоту (частоту заполнения) и низкую частоту — огибающую [80]. В сильных солитонах на ширине огибающей помещается только половина длины волны несущей частоты, т. е. солитон подобен «конденсатору», знак заряда на обкладках которого меняется на противоположный за половину периода несущей частоты. Хорошо исследованы сейчас одномерные солитоны такого типа. Известны и трехмерные солитоны (см. [79]), представляющие собой как бы ограниченные с торцов «конденсаторы». Такие солитоны могут рассматриваться в первом приближении как переменные электрические диполи.

Упомянув здесь задачу о переходном излучении солитонов, мы совершенно не касались вопроса о том, как солитон будет проходить через границу раздела сред и каково будет воздействие границы на структуру солитона. Для нас было существенно лишь подчеркнуть, что процесс излучения обязан распространяющимся в среде токам и зарядам, которые не обязательно должны создаваться каким-то движущимся в среде внешним зарядом и т. п.

§ 3.6. Переходное излучение электрических и магнитных дипольных моментов

1. Введение. Переходное излучение электрических диполей. Переходное излучение, как и излучение В.—Ч., может создаваться не только зарядами, но и другими источниками, не обладающими собственной частотой. Это обстоятельство уже неоднократно подчеркивалось и пояснялось, и здесь вряд ли нужно что-либо добавлять в отношении самой постановки вопроса.

Вслед за зарядами, простейшими излучателями являются электрические и магнитные диполи. Начнем со случая постоянно-го электрического диполя ($\mathbf{p}$ — дипольный момент в собственной системе отсчета), падающего со скоростью $\mathbf{v}$ по нормали к границе раздела двух сред. Пусть $\mathbf{p}$ наклонен под углом θ_0 к скорости $\mathbf{v}$ (θ_0 — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$ в собственной системе отсчета, в которой диполь покоится).

Плотность заряда, создаваемого диполем в собственной системе отсчета, равна *)

$$\rho_0^p = -\operatorname{div}_0 \mathbf{p} \delta(\mathbf{r}_0) = -\left(\frac{\partial}{\partial z_0} p_z + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{\perp,0}} \mathbf{p}_{\perp} \right) \delta(z_0) \delta(\mathbf{r}_{\perp,0}); \quad (3.219)$$

$$p_{\perp} = p \sin \theta_0, \quad p_z = p \cos \theta_0.$$

С помощью преобразования Лоренца имеем в лабораторной системе

$$j_{\omega,\mathbf{x}}^p = v \rho_{\omega,\mathbf{x}}^p; \quad (3.220)$$

$$\rho_{\omega,\mathbf{x}}^p = \frac{-i}{v(2\pi)^3} (\mathbf{x} \mathbf{p}_{\perp} + p_z \omega \sqrt{1 - v^2/c^2} / v) \exp \frac{i\omega z}{v}.$$

*) Здесь мы считаем электрический диполь «точечным».

Тот же результат получится, если рассмотреть два заряда противоположного знака (q и $-q$), находящихся на расстоянии $r_{\perp}^{(0)}$ и $z^{(0)}$ *) друг от друга и движущихся со скоростью v :

$$\rho_{\omega, \kappa}^p = \frac{1}{v(2\pi)^3} \left\{ q \exp \frac{i\omega z}{v} - q \exp \left[-i\kappa r_{\perp}^{(0)} + \frac{i\omega(z - z^{(0)})}{v} \right] \right\}, \quad (3.221)$$

причем считать выполненными условия

$$\kappa r_{\perp}^{(0)} \ll 1, \quad \omega z^{(0)}/v \ll 1, \quad (3.222)$$

а также учесть лоренцевское сокращение размеров вдоль z ($r_{\perp}^{(0)}$ и $z^{(0)}$ — компоненты радиус-вектора между зарядами в лабораторной системе отсчета):

$$p_{\perp} = -q r_{\perp}^{(0)}, \quad p_z = -q z^{(0)} (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \quad (3.223)$$

Тогда из (3.221) следует (3.220).

Итак, для получения интенсивности переходного излучения электрического диполя во всех формулах гл. 2 нужно q заменить на $i\kappa p_{\perp} + i\omega p_z \sqrt{1 - v^2/c^2}/v$ (см. в особенности (2.13) и (3.220)). Учитывая далее, что в окончательные формулы входит квадрат модуля этой величины, а также независимость результирующих выражений от направлений κ , можно получить, что

$$\begin{aligned} (\kappa p_{\perp})^2 + \frac{\omega^2}{v^2} p_z^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \\ = p^2 \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\kappa^2 c^2}{2\omega^2} \sin^2 \theta_0 + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{c^2}{v^2} \cos^2 \theta_0 \right] \equiv q_{\text{eff}}^2. \end{aligned} \quad (3.224a)$$

Следовательно, формулы для переходного излучения электрических диполей могут быть получены из формул для переходного излучения зарядов заменой

$$q^2 \rightarrow q_{\text{eff}, 1, 2}^2 = \frac{p^2 \omega^2}{c^2} \left[\frac{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}}{2} \sin^2 \theta_{1,2} \sin^2 \theta_0 + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{c^2}{v^2} \cos^2 \theta_0 \right]. \quad (3.224b)$$

Мощность излучения В.—Ч. может быть получена из выражения (2.23) при помощи той же замены (3.224b). Имеем

$$\begin{aligned} Q_{V-\text{Ch}}^p = \frac{p^2}{2c^2 v} \int_{c^2 \varepsilon \mu / v^2 < 1} \omega^3 \mu \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon \mu} \right) \times \\ \times [2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \cos^2 \theta_0 + \frac{\varepsilon \mu v^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon \mu} \right) \sin^2 \theta_0] d\omega. \end{aligned} \quad (3.225).$$

Этот результат соответствует (при $\mu = 1$) тому, который был

*) Во избежание недоразумений подчеркнем, что индекс 0 внизу соответствует текущей координате в собственной системе отсчета, тогда как индекс (0) вверху — расстояние между зарядами в лабораторной системе отсчета.

получен еще в [82] (при сравнении надо иметь в виду, что в [82] фигурирует дипольный момент в лабораторной системе отсчета, тогда как в (3.225) — это дипольный момент в собственной системе отсчета; из-за этого появляется дополнительный множитель $(1 - v^2/c^2)$ перед $\cos^2 \theta_0$ в (3.225)).

Разумеется, если в собственной системе отсчета имеется, например, только электрический диполь, то в лабораторной системе имеется (движется) уже не только электрический, но и магнитный диполь.

Результат (3.2246) справедлив для сред без пространственной дисперсии. В средах с пространственной дисперсией нужно использовать выражение (3.224а) (для продольных волн, например, связь κ^2 с $\theta_{1,2}$, использованная в (3.225), не имеет места, см. (3.158)). Для диполей, движущихся медленно, когда $v \ll c/\sqrt{\epsilon\mu}$, при не слишком малых $\cos \theta_0$ имеем

$$q_{\text{eff}}^2 = (\mathbf{p}^2 \omega^2 \cos^2 \theta_0)/v^2. \quad (3.226)$$

Поэтому переходное излучение при влете и вылете диполя из среды с $\mu = 1$ вместо (2.47) описывается формулой

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta) = \frac{\mathbf{p}^2 \omega^2 |\epsilon - 1|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \theta_0}{\pi^2 c^3 |\epsilon \cos \theta + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta}|^2}. \quad (3.227)$$

Спектральная плотность переходного излучения диполей качественно отличается от спектральной плотности переходного излучения заряда: при малых частотах ($\omega \ll \omega_{\text{pe}}$) спектр не плоский, а пропорционален ω^2 , а при больших частотах (при $\omega \gg \omega_{\text{pe}}$) спектр падает не как $1/\omega^4$, а как $1/\omega^2$. Интегральная интенсивность излучения диполя оценивается значением (ср. (2.51))

$$W^{\text{tr}} \sim \frac{\mathbf{p}^2 \omega_{\text{pe}}^2}{c^3} \omega_{\text{pe}}; \quad v \ll c. \quad (3.228)$$

Для ультрарелятивистских диполей ($(Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll 1$) при $\theta^2 \ll 1$, $|\epsilon - 1| \ll 1$ имеем

$$q_{\text{eff}}^2 \approx \mathbf{p}^2 \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\theta^2 \sin^2 \theta_0}{2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \cos^2 \theta_0 \right]. \quad (3.229)$$

Для $\Delta N \ll N$, т. е. когда относительное изменение диэлектрической проницаемости мало, вместо (2.59) получаем

$$W_2^{\text{tr}}(\omega) = \frac{\mathbf{p}^2}{\pi c^3} \int_0^\infty \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \frac{\omega_{\text{pe}}^4}{\omega^2} \theta^2 d\theta^2 \frac{1/2 \theta^2 \sin^2 \theta_0 + (Mc^2/\mathcal{E})^2 \cos^2 \theta_0}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]^4}, \quad (3.230a)$$

или

$$W_2^{\text{tr}}(\omega) = \frac{\mathbf{p}^2}{6\pi c^3} \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \frac{\omega_{\text{pe}}^4}{\omega^2} \frac{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + (\omega_{\text{pe}}^2/\omega^2) \sin^2 \theta_0}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]^2}. \quad (3.230b)$$

Полная излученная (вперед) энергия равна

$$W_2^{\text{tr}} = \int_0^\infty W_2^{\text{tr}}(\omega) d\omega = \frac{p^2 \omega_{\text{pe}}^2}{24c^3} \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \omega_{\text{pe}} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} (1 + \sin^2 \theta_0). \quad (3.231)$$

Для $\Delta N/N = 1$ вместо (2.65) получаем (см. [101])

$$W^{\text{tr}} = \frac{p^2 \omega_{\text{pe}}^2}{15c^3} \omega_{\text{pe}} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} (1 + \sin^2 \theta_0). \quad (3.232)$$

Для ультрарелятивистских диполей характерная излучаемая частота равна $\omega_{\text{pe}} \mathcal{E}/Mc^2$, так же как и для ультрарелятивистских зарядов. Однако, при $\omega \ll \omega_{\text{pe}} \mathcal{E}/Mc^2$, в отличие от случая зарядов, когда спектр переходного излучения является плоским, спектральная плотность излучения диполей может быть пропорциональна ω^2 *). При $\omega \gg \omega_{\text{pe}} \mathcal{E}/Mc^2$ она падает как $1/\omega^2$ (рис. 10),

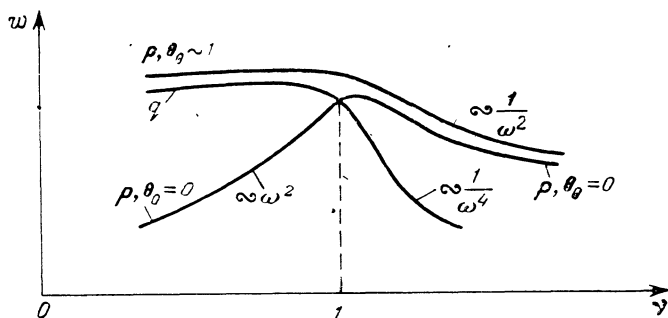


Рис. 10. Качественное сравнение спектров переходного излучения ультрарелятивистского заряда q и ультрарелятивистского диполя p (случаи $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 \sim 1$, $\gamma = \omega/\omega_{\text{pe}} \mathcal{E}/Mc^2$, $w \propto W^{\text{tr}}$).

т. е. излучение представляет собой не плоский спектр, «обрывающийся» на характерной частоте $\omega_{\text{pe}} \mathcal{E}/Mc^2$, а, скорее, широкую «линию» около этой частоты. Стоит еще раз подчеркнуть, что $p_\perp$ и p_z в нашем расчете — компоненты вектора дипольного момента в собственной системе.

2. Переходное излучение магнитных полюсов (монополей).

Существование магнитных полюсов не доказано. Однако исследование последних лет в области теории элементарных частиц возродило к ним интерес. Переходное излучение монополей было исследовано в работе [83] (см. также [83a]). Выражения для соответствующих спектральных плотностей излучения можно получить, используя хорошо известное положение (см., например, [1], гл. 7) о том, что уравнения для магнитных полюсов (плот-

*) Такой спектр следует из (3.230б) для $\sin^2 \theta_0 = 0$. Если $\sin^2 \theta_0 \neq 0$, то спектр (3.230б) становится плоским при $\omega \ll \omega_{\text{pe}} |\sin \theta_0| \mathcal{E}/Mc^2$.

ность магнитного заряда ρ_m) могут быть получены из уравнений для электрических зарядов (плотность заряда ρ) путем замен $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$ и $\rho \rightarrow \rho_m$, $\mu \rightleftharpoons \varepsilon$ (произведение $\varepsilon\mu$ при этом, естественно, не меняется). Для получения излучения В.—Ч. магнитного полюса, имеющего магнитный заряд

$$g = \int \rho_m dr, \quad (3.233)$$

можно из (2.23) с помощью указанной замены получить результат [82] (в [82] считалось, что $\mu = 1$)

$$Q^{V-Ch} = \frac{vg^2}{c^2} \int_{c^2/(v^2\varepsilon\mu) < 1}^{\infty} \varepsilon\omega d\omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2\varepsilon\mu}\right). \quad (3.234)$$

Для спектральной плотности энергии переходного излучения магнитного заряда вперед из (2.41) получаем ($c^2/(v^2\varepsilon_2\mu_2) > 1$):

$$W_2^r(\omega, \theta_2) = \frac{g^2 v^2 \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} |\mu_2 - \mu_1|^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2}{\pi^2 c^3 \left| \mu_1 \cos \theta_2 + \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2} \right|^2} \times \\ \times \frac{\left| 1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2} - (v^2/c^2) \mu_2 \frac{(\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1)}{(\mu_2 - \mu_1)} \right|^2}{\left| [1 - (v^2/c^2) \varepsilon_2 \mu_2 \cos^2 \theta_2] [1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2}] \right|^2}. \quad (3.235)$$

Для нерелятивистских монополей, если $\mu_1 = \mu_2 = 1$ и изменяется только ε , плотность энергии переходного излучения пропорциональна v^6 [83]:

$$W_2^{tr}(\omega, \theta_2) = W_2^r(\omega, \theta_2) = \frac{g^2 v^6 \varepsilon^{5/2} |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2}{\pi^2 c^7 \left| \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_2 + \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \theta_2} \right|^2}. \quad (3.236)$$

Последнее не удивительно, так как плотность энергии переходного излучения заряда также пропорциональна v^6 , если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Если меняется только магнитная проницаемость, а $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, плотность энергии переходного излучения нерелятивистских монополей оказывается пропорциональной v^2 (при $v \ll c$):

$$W_2^{tr}(\omega, \theta_2) = \frac{g^2 v^2 \sqrt{\mu_2} |\mu_2 - \mu_1|^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2}{\pi^2 c^3 \left| \mu_1 + \sqrt{\mu_2} (\mu_1 - \mu_2 \sin^2 \theta_2) \right|^2}. \quad (3.237)$$

Переходное излучение монополей при изменении свойств среды во времени можно найти из (2.95) путем описанной выше замены:

$$W^r(\omega, \theta) = \frac{g^2 v^2 \sqrt{\varepsilon_2} \sin^2 \theta}{4\pi^2 c^3 \sqrt{\mu_2} \left| 1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta \right|^2} \times \\ \times \frac{\left| \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} (\varepsilon_1/\varepsilon_2 - 1) + \varepsilon_1 (\mu_1 - \mu_2) (v/c) \cos \theta \right|^2}{\left| 1 - \varepsilon_1 \mu_1 (v^2/c^2) \cos^2 \theta \right|^2}. \quad (3.238)$$

В этом случае для нерелятивистских монополей при изменении только ε ($\mu_1 = \mu_2 = 1$) плотность энергии переходного излучения пропорциональна v^2 :

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta) = W^{\text{r}}(\omega, \theta) = \frac{g^2 v^2 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \sin^2 \theta}{4\pi^2 c^3 \sqrt{\varepsilon_2}}; \quad v \ll c, \quad (3.239)$$

а при изменении только μ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$) — пропорциональна v^4 :

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta) = \frac{g^2 v^4 |\mu_1 - \mu_2|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{4\pi^2 c^5 \sqrt{\mu_2}}; \quad v \ll c. \quad (3.240)$$

Эти соотношения «дополнительны» аналогичным соотношениям для зарядов (ср. (2.98) и (3.239), (2.96) и (3.240), а также (2.99) и (3.236), (2.97) и (3.237)).

Для ультрарелятивистских монополей (когда $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $Mc^2/\mathcal{E} \ll 1$, $1 - \varepsilon_{1,2} \approx \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2$) полная энергия переходного излучения для обоих его типов (переходного излучения на границе раздела сред и при резком изменении свойств среды во времени) одинакова и при $\Delta N/N = 1$ равна [83]

$$W^{\text{tr}} = \frac{g^2 \omega_{\text{pe}}}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (3.241)$$

3. Переходное излучение магнитных диполей. Если бы существовали магнитные полюса, то магнитный диполь можно было бы рассматривать как тесно расположенную пару двух противоположных магнитных полюсов. Для таких диполей в собственной системе (т. е. для покоящегося магнитного диполя $\mathbf{m}'$) имеем

$$\rho_{\mathbf{m},0}^{\mathbf{m}'} = -\text{div}_0 \mathbf{m}' \delta(\mathbf{r}_0) = -\left(\frac{\partial}{\partial z_0} m'_z + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{\perp,0}} \mathbf{m}'_{\perp} \right) \delta(z_0) \delta(\mathbf{r}_{\perp,0}). \quad (3.242)$$

В этом случае плотность энергии переходного излучения движущегося со скоростью v магнитного диполя можно было бы получить из (3.238) путем замены, аналогичной (3.224б), $g^2 \rightarrow g_{\text{eff}}^2$:

$$g_{\text{eff},1,2}^2 = \frac{m'^2 \omega^2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{c^2}{v^2} \cos^2 \theta_0 \right], \quad (3.243)$$

где θ_0 — угол между $\mathbf{m}'$ и $\mathbf{v}$ в собственной системе, а $\mathbf{m}'$ — магнитный момент диполя, составленного из двух магнитных полюсов (зарядов).

В отсутствие магнитных зарядов, когда магнитные моменты создаются только токами заряженных частиц, плотность тока покоящегося магнитного момента $\mathbf{m}$ определяется соотношением

$$\mathbf{j}_0^{\mathbf{m}} = c \text{rot}_0 \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}_0). \quad (3.244)$$

Магнитные поля, получаемые из (3.242) и (3.244), различны. Так, из (3.242) имеем (при любом μ)

$$\mathbf{B}^{\mathbf{m}'}(\mathbf{r}_0) = \frac{3\mathbf{r}_0 (\mathbf{m}' \mathbf{r}_0) - \mathbf{m}' r_0^2}{r_0^5}, \quad (3.245)$$

а из (3.244) (при $\mu = 1$)

$$\mathbf{B}^m(\mathbf{r}_0) = \frac{3\mathbf{r}_0(m\mathbf{r}_0) - m\mathbf{r}_0^2}{r_0^5} + 4\pi m \delta(\mathbf{r}_0). \quad (3.246)$$

Член с $\delta(\mathbf{r}_0)$ в (3.246) отражает тот факт, что в отсутствие магнитных зарядов любая магнитная силовая линия должна быть замкнутой*). Выражение (3.246) непосредственно получается из соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^m &= \text{rot}_0 \mathbf{A}^m, \quad \Delta_0 \mathbf{A}^m = -4\pi \mathbf{j}_0^m / c = -4\pi \text{rot}_0 m \delta(\mathbf{r}_0), \\ \mathbf{B}_{k_0}^m &= i [\mathbf{k}_0 \mathbf{A}_{k_0}^m], \quad \mathbf{A}_{k_0}^m = i [\mathbf{k}_0 m] / 2\pi^2 k_0^2, \\ \mathbf{B}_{k_0}^m &= -[\mathbf{k}_0 [\mathbf{k}_0 m]] / 2\pi^2 k_0^2 = -\mathbf{k}_0 (\mathbf{k}_0 m) / 2\pi^2 k_0^2 + m / 2\pi^2. \end{aligned} \quad (3.247)$$

Последний член (3.246), пропорциональный $\delta(\mathbf{r}_0)$, естественно, можно отбросить, если $\mathbf{r}_0 \neq 0$. Однако он существует для интеграла $\int \mathbf{B}^m(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$.

Переходное излучение магнитного момента, описываемое (3.242) и (3.244), оказывается различным. Мы поэтому здесь рассмотрим также переходное излучение магнитного момента, описываемого (3.244). Будем считать, что магнитный момент движется вдоль оси z нормально к границе раздела сред со скоростью v . Из преобразований Лоренца получаем ток магнитного момента в лабораторной системе отсчета (индекс z опускаем)

$$j_z^m \equiv j^m = c \left(m_y \frac{\partial}{\partial x} - m_x \frac{\partial}{\partial y} \right) \delta(\mathbf{r}_\perp) \delta(z - vt), \quad (3.248a)$$

$$j_x^m = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(m_z \frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} m_y \frac{\partial}{\partial z} \right) \delta(\mathbf{r}_\perp) \delta(z - vt), \quad (3.248б)$$

$$j_y^m = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(m_x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial}{\partial z} - m_z \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(\mathbf{r}_\perp) \delta(z - vt). \quad (3.248в)$$

Здесь $\mathbf{m}$ — вектор магнитного момента в собственной системе отсчета. В отличие от заряда, создающего ток только по z (а также электрического диполя, ток которого направлен тоже по z), магнитный диполь имеет все компоненты тока. Для компонент Фурье по $\mathbf{r}_\perp$ и t получим вместо (2.13)

$$j_{\omega, \mathbf{x}}^m(z) = \frac{ic}{v(2\pi)^3} (\kappa_x m_y - \kappa_y m_x) \exp \frac{i\omega z}{v}, \quad (3.249)$$

$$j_{x, \omega, \mathbf{x}}^m(z) = \frac{ic}{v(2\pi)^3} \frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \left(\kappa_y m_z - \frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \frac{\omega}{v} m_y \right) \exp \frac{i\omega z}{v}, \quad (3.250)$$

$$j_{y, \omega, \mathbf{x}}^m(z) = \frac{ic}{v(2\pi)^3} \frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \frac{\omega}{v} m_x - \kappa_x m_z \right) \exp \frac{i\omega z}{v}. \quad (3.251)$$

*) В ряде учебников можно встретить выражение для $\mathbf{B}^m(\mathbf{r}_0)$, не содержащее члена с $\delta(\mathbf{r}_0)$. Оно пригодно лишь вдали от магнитного диполя (или если диполь составлен из двух магнитных зарядов).

Уже из приведенных выражений для токов (3.249)–(3.251) можно заключить, что имеется качественное отличие в излучении магнитного момента, состоящего из двух магнитных полюсов (3.242), и магнитного момента, описываемого (3.244) (при $\mathbf{v} = 0$). Действительно, поле переходного излучения диполя (3.242) (при $\mathbf{v} \neq 0$) линейно поляризовано, так что вектор магнитного поля лежит в плоскости, образуемой вектором $\mathbf{k}$ излучаемой волны и $\mathbf{v}$, тогда как токи (3.249)–(3.251), имея компоненты по всем осям, возбуждают обе поляризации (с вектором магнитного поля в плоскости $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ и перпендикулярно этой плоскости). Заключение о том, что для (3.242) вектор магнитного поля волны лежит в плоскости $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ получается с помощью следующих рассуждений. Электрическое поле излучения электрического заряда лежит в плоскости $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ в силу того, что заряд создает только ток вдоль $\mathbf{v}$ (вдоль z). То же верно для электрического диполя. Наконец, для получения поля магнитного диполя (3.242) нужно заменить $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{H}$, что и дает отмеченную поляризацию. Волну, магнитное поле которой лежит в плоскости излучения (плоскости $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$), назовем H -поляризованной волной, а волну, у которой электрическое поле лежит в плоскости излучения, — E -поляризованной волной. Таким образом, магнитный диполь, описываемый (3.242), излучает только H -волну, а магнитный диполь, описываемый (3.244), излучает как H -волну, так и E -волну.

Мы рассмотрим вначале излучение H -волны магнитным диполем, имеющим в системе покоя ток (3.244). Обозначим продольную компоненту (по z) магнитного поля через $H_{\omega, \kappa}(z)$. Из уравнений Максвелла (2.10) (с заменой $\mathbf{j}^a$ на $\mathbf{j}^m$) путем проектирования их на направления, перпендикулярные z , получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\epsilon \mu \omega^2}{c^2} - \kappa^2 \right) H_{\omega, \kappa}(z) = \\ = - \frac{4\pi i}{c} (j_{y, \omega, \kappa}^m(z) \kappa_x - j_{x, \omega, \kappa}^m(z) \kappa_y) = \\ = - \frac{4\pi}{v(2\pi)^3} \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \left[\kappa^2 m_z - \frac{\omega}{v} \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \kappa m \right] \exp \frac{i\omega z}{v}. \end{aligned} \quad (3.252)$$

Это уравнение аналогично уравнению (2.17) для заряда. Решение (3.252) так же, как и в случае заряда, представляет собой сумму собственного поля

$$H_{\omega, \kappa}^m(z) = - \frac{4\pi c^2 (Mc^2/\mathcal{E}) [\kappa^2 m_z - \kappa m (Mc^2/\mathcal{E}) \omega/v]}{\omega^2 v (2\pi)^3 (\epsilon \mu - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)} \exp \frac{i\omega z}{v} \quad (3.253)$$

и поля излучения

$$\begin{aligned} H_{\omega, \kappa}^r(z) = \frac{4\pi c^2 Mc^2/\mathcal{E}}{v \omega^2 (2\pi)^3} \left[\kappa^2 m_z - \kappa m \frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \frac{\omega}{v} \right] \times \\ \times b \exp \left(\mp \frac{i\omega z}{c} \sqrt{\epsilon \mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right), \end{aligned} \quad (3.254)$$

где b — амплитуда поля излучения. Тангенциальные компоненты собственного магнитного поля и поля излучения можно найти из $\text{div } \mathbf{B} = 0$:

$$\kappa \mathbf{H}_{\perp, \omega, \kappa}^m(z) = -(\omega/v) H_{\omega, \kappa}^m(z), \quad (3.255)$$

$$\kappa \mathbf{H}_{\perp, \omega, \kappa}^r(z) = \pm (\omega/c) \sqrt{\varepsilon \mu - \kappa^2 c^2 / \omega^2} H_{\omega, \kappa}^r(z). \quad (3.256)$$

Уравнений непрерывности нормальных компонент магнитной индукции $B_{\omega, \kappa}(z) = \mu H_{\omega, \kappa}(z)$ и тангенциальных компонент магнитного поля $\kappa \mathbf{H}_{\perp, \omega, \kappa}(z)$ достаточно для нахождения поля излучения H -поляризации:

$$\frac{\mu_1}{\varepsilon_1 \mu_1 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \mu_1 b_1 = -\mu_2 b_2 + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}, \quad (3.257)$$

$$(c/v) (\varepsilon_1 \mu_1 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)^{-1} + b_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} = \\ = (c/v) (\varepsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)^{-1} - b_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}. \quad (3.258)$$

Отсюда

$$b_2 = -(\mu_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} + \mu_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2})^{-1} \times \\ \times \left[\frac{\mu_1 (c/v + \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2})}{\varepsilon_1 \mu_1 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \frac{\mu_1 c/v + \mu_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} \right], \quad (3.259)$$

$$b_1 = -(\mu_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} + \mu_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2})^{-1} \times \\ \times \left[\frac{\mu_2 c/v - \mu_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2}}{\varepsilon_1 \mu_1 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \frac{\mu_2 (c/v - \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2})}{\varepsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} \right]. \quad (3.260)$$

Рассмотрим теперь излучение E -поляризованной волны, т. е. волны, электрический вектор которой лежит в плоскости $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$. Вместо (2.15в) получаем

$$(\kappa^2 - \varepsilon \mu \omega^2 / c^2) E_{\omega, \kappa}(z) + i(\partial/\partial z) \kappa \mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa}(z) = 4\pi i \omega \mu j_{\omega, \kappa}^m(z)/c^2, \quad (3.261)$$

а вместо (2.16) — соответственно

$$(\partial^2/\partial z^2 + \varepsilon \mu \omega^2 / c^2) \kappa \mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa}(z) = \\ = i\kappa^2 (\partial/\partial z) E_{\omega, \kappa}(z) + 4\pi i \omega \mu (\omega/v) (Mc^2/\mathcal{E})^2 j_{\omega, \kappa}^m(z)/c^2. \quad (3.262)$$

Здесь мы использовали соотношение

$$\kappa j_{\omega, \kappa}^m(z) = -(\omega/v) (Mc^2/\mathcal{E})^2 j_{\omega, \kappa}^m(z), \quad (3.263)$$

непосредственно следующее из (3.249) — (3.251) (а также из $\text{div}_0 \mathbf{j}_0^m = 0$ в собственной системе отсчета). Учитывая, что собственные поля пропорциональны $\exp(i\omega z/v)$, получим из (3.261),

(3.262)

$$E_{\omega, \kappa}^m(z) = \frac{4\pi c (\varepsilon\mu - 1) (\kappa_x m_y - \kappa_y m_x) \exp(i\omega z/v)}{v\omega\varepsilon(2\pi)^3 (\varepsilon\mu - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)}, \quad (3.264)$$

$$\kappa E_{\perp, \omega, \kappa}^m(z) = - \frac{\omega [\varepsilon\mu (1 - v^2/c^2) + \kappa^2 v^2/\omega^2]}{v(\varepsilon\mu - 1)} E_{\omega, \kappa}^m(z). \quad (3.265)$$

Для поля излучения запишем

$$E_{\omega, \kappa}^r(z) = \frac{4\pi c (\kappa_x m_y - \kappa_y m_x)}{v\omega(2\pi)^3} a \exp\left(\mp \frac{i\omega z}{c} \sqrt{\varepsilon\mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right) \quad (3.266)$$

и

$$\kappa E_{\perp, \omega, \kappa}^r(z) = \pm (\omega/c) \sqrt{\varepsilon\mu - \kappa^2 c^2/\omega^2} E_{\omega, \kappa}^r(z). \quad (3.267)$$

Уравнение для амплитуд $a_{1,2}$ поля излучения E -поляризации получим из условия равенства на границе раздела нормальных компонент электрической индукции $D_{\omega, \kappa}(z) = \varepsilon E_{\omega, \kappa}(z)$ и тангенциальных компонент электрического поля $\kappa E_{\perp, \omega, \kappa}(z)$:

$$\frac{\varepsilon_1 \mu_1 - 1}{\varepsilon_1 \mu_1 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} + \varepsilon_1 a_1 = \frac{\varepsilon_2 \mu_2 - 1}{\varepsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} + \varepsilon_2 a_2, \quad (3.268)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(c/v\varepsilon_1) [\varepsilon_1 \mu_1 (1 - v^2/c^2) + \kappa^2 v^2/\omega^2]}{\varepsilon_1 \mu_1 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} - a_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} = \\ & = a_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} + \frac{(c/v\varepsilon_2) [\varepsilon_2 \mu_2 (1 - v^2/c^2) + \kappa^2 v^2/\omega^2]}{\varepsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2}. \end{aligned} \quad (3.269)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} a_2 = & (\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2} + \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2/\omega^2})^{-1} \times \\ & \times \{ [(c/v) (\varepsilon_1 \mu_1 (1 - v^2/c^2) + \kappa^2 v^2/\omega^2) + (\varepsilon_1 \mu_1 - 1) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2}] \times \\ & \times (\varepsilon_1 \mu_1 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)^{-1} - [(c/v) (\varepsilon_1/\varepsilon_2) (\varepsilon_2 \mu_2 (1 - v^2/c^2) + \kappa^2 v^2/\omega^2) + \\ & + (\varepsilon_2 \mu_2 - 1) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2}] (\varepsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)^{-1} \}, \end{aligned} \quad (3.270)$$

$$\begin{aligned} a_1 = & [\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2}]^{-1} \times \\ & \times \{ [(c/v) (\varepsilon_2/\varepsilon_1) (\varepsilon_1 \mu_1 (1 - v^2/c^2) + \kappa^2 v^2/\omega^2) - \\ & - (\varepsilon_1 \mu_1 - 1) \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2/\omega^2}] (\varepsilon_1 \mu_1 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)^{-1} - \\ & - [(c/v) (\varepsilon_2 \mu_2 (1 - v^2/c^2) + \kappa^2 v^2/\omega^2) - (\varepsilon_2 \mu_2 - 1) \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \kappa^2 c^2/\omega^2}] \times \\ & \times (\varepsilon_2 \mu_2 - c^2/v^2 - \kappa^2 c^2/\omega^2)^{-1} \}. \end{aligned} \quad (3.271)$$

Рассмотрим энергию излучения, например, вперед в среду 2. Вместо (2.38), учитывая наличие двух поляризаций, получаем

$$W_2^r = 4\pi^2 \int_0^\infty d\omega \int \frac{\omega^2}{\kappa^2 c^2} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} (\varepsilon_2 |E_{\omega, \kappa}^r|^2 + \mu_2 |H_{\omega, \kappa}^r|^2) d\kappa. \quad (3.272)$$

Первый член (3.272), пропорциональный $|E_{\omega, \kappa}^r|^2$, дает энергию переходного излучения E -поляризации, а второй — соответственно — H -поляризации. Подставив в (3.272) соотношения (3.254) и (3.266) и учитывая, что амплитуды поля излучения a_2 и b_2 зависят лишь от κ^2 , получаем

$$W_2^r = \frac{m^2 c}{2\pi v^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \{ \epsilon_2 \sin^2 \theta_0 |a_2|^2 + \\ + \mu_2 (Mc^2/\mathcal{E})^2 (\kappa^2 c^2/\omega^2) [2\cos^2 \theta_0 + (\omega^2/\kappa^2 v^2) (Mc^2/\mathcal{E})^2 \sin^2 \theta_0] |b_2|^2 \} d\kappa^2. \quad (3.273)$$

Аналогичным будет выражение для W_1^r — энергии переходного излучения назад.

Рассмотрим случай ультрарелятивистских энергий $\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$, полагая $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $1 - \epsilon_{1,2} \approx \omega_{pe,1,2}^2/\omega^2 \ll 1$. Основная энергия приходится на излучение вперед (по движению магнитного момента). Из (3.259), (3.270) получаем

$$b_2 \approx \frac{(\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2)/\omega^2}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2] [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2]}, \quad (3.274)$$

$$a_2 \approx -b_2 [\theta^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2]. \quad (3.275)$$

Для энергии переходного излучения H -поляризации получаем

$$W_H^{\text{tr}} \approx W_{2,H}^{\text{tr}} = W_{2,H}^r = \frac{m^2}{2\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{(\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2)^2 (Mc^2/\mathcal{E})^2}{\omega^2} d\theta^2 \times \\ \times \frac{(Mc^2/\mathcal{E})^2 \sin^2 \theta_0 + 2\theta^2 \cos^2 \theta_0}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2]^2 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2]^2}, \quad (3.276)$$

а для E -поляризации:

$$W_E^{\text{tr}} \approx W_{2,E}^{\text{tr}} = W_{2,E}^r = \frac{m^2}{2\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{(\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2)^2 \sin^2 \theta_0}{\omega^2} d\theta^2 \times \\ \times \frac{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2]^2}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2]^2 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2]^2}. \quad (3.277)$$

В случае $\Delta N \ll N_0$

$$W_H^{\text{tr}} \approx \frac{m^2 \omega_{pe}^2}{24c^3} \omega_{pe} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \left(\frac{\Delta N}{N_0} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta_0 \right), \quad (3.278a)$$

$$W_E^{\text{tr}} \approx \frac{15m^2 \omega_{pe}^2}{96c^3} \omega_{pe} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \left(\frac{\Delta N}{N_0} \right)^2 \sin^2 \theta_0. \quad (3.278b)$$

Отношение W_E^{tr} к W_H^{tr} дает представление о характере поляри-

зации излучения. Полная энергия переходного излучения равна

$$W^{\text{tr}} = W_{\text{H}}^{\text{tr}} + W_{\text{E}}^{\text{tr}} = \frac{m^2 \omega_{\text{pe}}^2}{24c^3} \omega_{\text{pe}} \left(\frac{\Delta N}{N_0} \right)^2 \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \left(1 + \frac{7}{2} \sin^2 \theta_0 \right). \quad (3.279)$$

Сравнивая (3.279) с соответствующим выражением для переходного излучения электрического дипольного момента (3.231), убеждаемся в том, что они не могут быть получены один из другого заменой $\mathbf{m}^2 \rightleftharpoons \mathbf{p}^2$.

Для $\Delta N/N = 1$ получаем из (3.276), (3.277)

$$W_{\text{H}}^{\text{tr}} = \frac{m^2 \omega_{\text{pe}}^2}{15c^3} \omega_{\text{pe}} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta_0 \right), \quad (3.280a)$$

$$W_{\text{E}}^{\text{tr}} = \frac{m^2 \omega_{\text{pe}}^2}{4c^3} \omega_{\text{pe}} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \sin^2 \theta_0. \quad (3.280b)$$

Полная энергия переходного излучения равна

$$W^{\text{tr}} = W_{\text{H}}^{\text{tr}} + W_{\text{E}}^{\text{tr}} = \frac{m^2 \omega_{\text{pe}}^2}{15c^3} \omega_{\text{pe}} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \left(1 + \frac{7}{2} \sin^2 \theta_0 \right). \quad (3.281)$$

Это выражение совпадает с энергией излучения электрического диполя (с заменой $\mathbf{m}^2 \rightleftharpoons \mathbf{p}^2$) только при $\theta_0 = 0^*$). В дальнейшем (гл. 4 и 7) мы убедимся также в том, что процессы переходного рассеяния различаются для магнитных моментов, составленных из двух магнитных полюсов, и магнитных моментов, образуемых токами (т. е. в собственной системе отсчета описываемых (3.242) и (3.244)).

Здесь же отметим также имеющиеся различия в мощности излучения В.—Ч. Так, для магнитного момента $\mathbf{m}'$, составленного из двух магнитных полюсов, с помощью соотношений (3.243), (3.234) получаем

$$Q_{\text{V-Ch}}^{\mathbf{m}'} = \frac{(\mathbf{m}')^2}{2c^2 v} \int_{c^2 \varepsilon \mu / v^2 < 1} \omega^3 \varepsilon \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon \mu} \right) \times \\ \times \left[2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \cos^2 \theta_0 + \frac{v^2 \varepsilon \mu}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon \mu} \right) \sin^2 \theta_0 \right] d\omega, \quad (3.282)$$

что соответствует при $\mu = 1$ результату, полученному в [82] (следует учесть, что здесь $\mathbf{m}'$ — магнитный момент в собственной системе отсчета; из-за этого появляется множитель $(1 - v^2/c^2)$ перед $\cos^2 \theta_0$).

В то же время для мощности излучения В.—Ч. диполя, создаваемого токами заряженных частиц (т. е. в собственной системе

*) С помощью соотношений (3.243), (3.235) можно найти, что переходное излучение магнитного момента, составленного из двух магнитных полюсов, при сделанных допущениях $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $Mc^2/\mathcal{E} \ll 1$, $1 - \varepsilon_{1,2} = \omega_{\text{pe},1,2}^2/\omega^2$ совпадает (при замене $\mathbf{m}^2$ на $\mathbf{p}^2$) с переходным излучением электрического момента (см. формулы (3.230) — (3.232)).

отсчета, описываемого (3.244)), получаем

$$\begin{aligned}
 Q_{V-Ch}^m &= - \int \mathbf{j}^m(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = - (2\pi)^3 v \int \mathbf{j}_{\omega, \kappa}^m \mathbf{E}_{\omega, -\kappa}^m d\omega d\kappa = \\
 &= - (2\pi)^3 v \int \left[j_{-\omega, -\kappa}^m E_{\omega, \kappa}^m + \frac{1}{\kappa^2} (\kappa \mathbf{j}_{-\omega, -\kappa}^m) (\kappa \mathbf{E}_{\omega, \kappa}^m) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\omega \mu}{c \kappa^2} H_{\omega, \kappa}^m (\kappa j_{\omega, -\omega, -\kappa}^m - \kappa j_{\omega, -\omega, \kappa}^m) \right] d\omega d\kappa. \quad (3.283a)
 \end{aligned}$$

Подставив сюда выражения для полей (3.253), (3.264), (3.265) и выражения для токов (3.249)–(3.251), получаем окончательно:

$$\begin{aligned}
 Q_{V-Ch}^m &= \frac{m^2}{2c^2 v} \int_{\epsilon \mu c^2 / v^2 < 1} \omega^3 \epsilon \mu^2 \left\{ \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon \mu} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) 2 \cos^2 \theta_0 + \right. \\
 &\quad \left. + \sin^2 \theta_0 \left[2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon \mu} \right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2 \epsilon \mu} \right) \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon \mu} \right) \right] \right\} d\omega, \quad (3.283б)
 \end{aligned}$$

что соответствует при $\mu = 1$ результату [82а, б] (см. [82] и [1], гл. 7; в (3.283б) $\mathbf{m}$ — опять-таки магнитный момент в собственной системе отсчета). Мощности излучения (3.282) и (3.283б) совпадают только для диполей, направленных по $\mathbf{v}$ ($\theta_0 = 0$) и одновременно при $\mu = 1$.

Таким образом, оба результата, а именно (3.282) и (3.283б), являются правильными. Просто они соответствуют разным источникам — магнитному диполью, составленному из двух магнитных полюсов (см. (3.242)), и токовому магнитному диполью (магнитному моменту), которому отвечает плотность тока (3.244). В то же время уравнения электродинамики при наличии магнитных полюсов (плотность магнитного заряда ρ_m) переходят в обычные уравнения поля для электрических зарядов с плотностью ρ только при уже упоминавшейся замене $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$, $\mu \rightleftharpoons \epsilon$ (см. [1], гл. 7). Но это означает, что при $\mu = 1$ магнитный момент, составленный из двух магнитных полюсов, эквивалентен токовому моменту только в вакууме, когда $\epsilon = 1$ (кроме того, мы не касаемся члена с $\delta(\mathbf{r}_0)$ в (3.246)). В среде с $\epsilon \neq 1$ и $\mu = 1$, «заполняющей» движущийся токовый магнитный момент $\mathbf{m}$, этот момент обладает электрическим моментом, равным $\epsilon[\mathbf{vm}]/c$, а не $[\mathbf{vm}]/c$ (см. [82, 84]). Такая замена эквивалентна учету электрической поляризации среды, увлекаемой самим диполем. Иначе говоря, при $\mu = 1$ магнитный диполь из магнитных полюсов эквивалентен токовому диполью, «сделанному» из среды с проницаемостью ϵ и поэтому поляризующейся [84]. Для точечных токовых диполей, когда о «заполнении» их средой говорить не приходится, справедлива формула (3.283б) (см. также [1], гл. 7).

В силу сказанного различие результатов, получающихся для магнитных моментов указанных типов закономерно.

4. Переходное излучение квадрупольных моментов. Рассмотрим переходное излучение высших моментов производится сходно с тем, как было рассмотрено излучение диполей. Покажем, что начиная с квадрупольных моментов возникает уже весьма существенное качественное отличие в переходном излучении. Мы уже видели, что для дипольных моментов появляется дополнительный множитель $\propto \omega^2$ (грубо говоря, отношение размеров диполя к длине волны). Это меняет спектральную плотность излучения, которая при $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$ может быть пропорциональной ω^2 , а при $\omega \gg \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$ пропорциональна $1/\omega^2$. Полная энергия излучения (интеграл по всем частотам) при этом еще сходится. Для квадрупольных моментов, как электрических, так и магнитных, в плотности энергии переходного излучения должен появиться дополнительный множитель $\propto \omega^4$. Это означает, что при $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$ спектральная плотность энергии излучения может быть пропорциональной ω^4 , а при $\omega \gg \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$ — она постоянна, т. е. полная энергия излучения (интеграл по всем частотам) расходится. Эта «расходимость» в действительности, конечно, отсутствует. Ее появление связано с использованием неравенств типа (3.222). Однако появление «расходимости» отражает возникающую новую ситуацию и имеет интересные физические следствия.

Действительно, рассмотрим простейший пример, когда квадрупольный электрический момент образован двумя близко расположенными противоположно направленными электрическими диполями. Пусть диполи ориентированы по направлению их движения, а расстояние между ними равно $\mathbf{r}_\perp^{(0)}$. Тогда в выражении для плотности тока величину $q \exp(i\omega z/v)$ нужно заменить на

$$q \exp(i\omega z/v) - q \exp[i\omega(z - z^{(0)})/v] - q \exp(i\omega z/v - i\mathbf{x} \mathbf{r}_\perp^{(0)}) + \\ + q \exp[i\omega(z - z^{(0)})/v - i\mathbf{x} \mathbf{r}_\perp^{(0)}] \approx -d\mathbf{x}(\omega/v)(Mc^2/\mathcal{E}) \exp(i\omega z/v), \quad (3.284)$$

где

$$d = qz^{(0)} \mathbf{r}_\perp^{(0)} \mathcal{E} / Mc^2. \quad (3.285)$$

Это значит, что q^2 необходимо заменить на

$$q_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}(\omega^2 \kappa^2 / v^2)(Mc^2/\mathcal{E})^2 d^2. \quad (3.286)$$

Для ультрарелятивистских частиц получим из (2.59)

$$W^{\text{tr}}(\omega) = \frac{d^2}{2\pi c^5} \int_0^\infty \theta^4 \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 (\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2)^2 d\theta^2 \times \\ \times [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2][(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2]^{-2}. \quad (3.287)$$

Для $\Delta N/N_0 \ll 1$, например, получаем

$$W^{\text{tr}}(\omega) = \frac{\dot{\omega}_{\text{pe}}^4}{6\pi c^5} \left(\frac{\Delta N}{N_0} \right)^2 \frac{(Mc^2/\mathcal{E})^2}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2}. \quad (3.288)$$

В данном случае из-за специфической ориентации квадруполь $W^{\text{tr}}(\omega)$ при $\omega \ll \omega_{\text{pe}}\mathcal{E}/Mc^2$ пропорционально лишь ω^2 , но при $\omega \gg \omega_{\text{pe}}\mathcal{E}/Mc^2$ имеем $W^{\text{tr}}(\omega) = \text{const}$, т. е. полная энергия расходуется. Это значит, что излучаться будут частоты вплоть до тех, для которых допустимо разложение, возможности которого связаны с выполнением неравенства (3.222). Это, естественно, происходит лишь в том случае, если границу раздела сред еще можно считать резкой. При $\omega \gg \omega_{\text{pe}}\mathcal{E}/Mc^2$ длина зоны формирования при $\theta \sim Mc^2/\mathcal{E}$ составит (см. (2.108)):

$$L_f \approx \frac{2\pi c}{\omega} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2, \quad (3.289)$$

т. е. она падает с ростом частоты. Для возникновения излучения необходимо условие $\Delta z \ll L_f$ (где Δz , напомним,— ширина переходного слоя изменения ϵ), т. е.

$$\frac{\omega}{c} \Delta z \ll \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2. \quad (3.290)$$

Это условие является менее жестким, чем (3.222), т. е. неравенство $\omega z^{(0)}/c \ll 1$, если

$$z^{(0)} > \Delta z \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2. \quad (3.291)$$

Подчеркнем, что энергия излучения диполей и квадрупольей, естественно, меньше, чем отдельных зарядов, из которых они составлены. Однако, если заряд и дипольный момент отсутствуют, то квадрупольные моменты излучают очень высокие частоты. Атом или молекула, не имеющие дипольного момента, но имеющие квадрупольные моменты, будут излучать волны вплоть до длин порядка межатомных расстояний, т. е. $\sim 10^{-8} - 10^{-7}$ см (частота $2\pi c/\lambda \sim 10^{19}$ с $^{-1}$, т. е. это γ -кванты). Однако условие (3.291) достаточно жесткое. Если (в идеале) Δz порядка межатомных расстояний, то во всяком случае необходимо $\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$. Хотя излучение отдельного квадрупольного момента и не велико, но при наличии пучка можно было бы получить значительную интенсивность в жесткой области спектра. Если условие (3.291) не выполняется, то максимальная излучаемая частота определяется из неравенства (3.290)

$$\omega_{\text{max}} \sim \frac{c}{\Delta z} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2. \quad (3.292)$$

Обсудим теперь кратко, что будет в случае нерелятивистских квадрупольных моментов. Легко видеть, что качественно картина остается прежней, если положить $\mathcal{E}/Mc^2 = 1$, т. е. начиная с $\omega \sim \omega_{\text{pe}}$ спектр излучения будет плоским, а излучаться будут

частоты вплоть до $c/\Delta z$ (если $\Delta z > z^{(0)}$), т. е. максимальная частота определяется степенью гладкости поверхности.

Отметим, что $z^{(0)}$ может быть чрезвычайно малым, если речь идет об элементарных частицах. Если, например, $z^{(0)} \sim 10^{-13}$ см, а $\Delta z \sim 10^{-7}$ см, то для излучения длин порядка $z^{(0)}$ необходимо $\mathcal{E}/Mc^2 \sim 10^3$. Возможны также эффекты, связанные с прохождением границы ядерного вещества, когда $\Delta z \sim 10^{-13}$ см [85].

Если речь идет об излучении атомов или молекул, имеющих дипольные или квадрупольные моменты, то для исключения возможности их разрушения при столкновении с границей (веществом) можно было бы рассматривать их излучение в каналах с размером, меньшим длины волны (о проблемах каналирования частиц в кристаллах см. [86]).

§ 3.7. Когерентное переходное излучение сгустков зарядов и токов

1. Введение. Переходное излучение сгустка зарядов. Энергия переходного излучения может быть увеличена во много раз, если частицы излучают когерентно, т. е. в процессе излучения находятся на расстоянии, меньшем длины излучаемой волны. Если имеются частицы одного знака, то происходит сложение амплитуд и излучение оказывается существенно большим, чем сумма излучений отдельных зарядов [87].

Рассмотрим переходное излучение сгустка зарядов. Распределение плотности заряда и тока в сгустке зададим соотношениями

$$j_{\omega, \kappa}^q(z) = q f_{\omega, \kappa} \frac{\exp(i\omega z/v)}{(2\pi)^3}, \quad \rho_{\omega, \kappa}^q = \frac{1}{v} j_{\omega, \kappa}^q, \quad (3.293)$$

где q — полный заряд сгустка, а $f_{\omega, \kappa}|_{\omega=0, \kappa=0} = 1$:

$$\int \rho^q(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = q \int \frac{f_{\omega, \kappa}}{(2\pi)^3} \exp\left[i\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r}_\perp + i \frac{\omega}{v} (z - vt)\right] d\mathbf{r}_\perp dz d\frac{\omega}{v} d\boldsymbol{\kappa} = q. \quad (3.294)$$

Для точечного заряда $f_{\omega, \kappa} = 1$ для любых значений ω и $\boldsymbol{\kappa}$.

В последние годы с развитием физики сильноточных релятивистских пучков было установлено, что релятивистские пучки действительно могут нести значительный некомпенсированный электрический заряд. Такие пучки могут давать когерентное переходное излучение. Пучки часто имеют форму конечного цилиндра (полого или заполненного). Если распределение заряда цилиндрически симметрично и зависит лишь от $|\mathbf{r}_\perp| = r_\perp$, то используя формулу

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r}_\perp) d\varphi = J_0(\kappa r_\perp), \quad (3.295)$$

где J_0 — функция Бесселя, можно записать

$$\rho(r_{\perp}, z) = \frac{q}{4\pi^2 v} \int_0^{\infty} \kappa d\kappa \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega, \kappa} J_0(\kappa r_{\perp}) \exp\left[i \frac{\omega}{v} (z - vt)\right] d\omega. \quad (3.296)$$

Например, для однородного цилиндра радиуса a и длины l

$$f_{\omega, \kappa} = (2/\kappa a) J_1(\kappa a) (\omega_l/\omega) \sin(\omega/\omega_l), \quad (3.297)$$

а для тонкого кольца радиуса a (полого цилиндра)

$$f_{\omega, \kappa} = J_0(\kappa a) (\omega_l/\omega) \sin(\omega/\omega_l), \quad (3.298)$$

где

$$\omega_l = (2v/l) \mathcal{E}/Mc^2 \quad (3.299)$$

(учтено релятивистское сокращение размеров). В пределе $ak \rightarrow 0$ и $\omega_l \rightarrow \infty$ величины $f_{\omega, \kappa}$ (3.297) и (3.298) стремятся к единице, т. е. соответствуют точечным зарядам. Подчеркнем, что здесь мы не раскладываем по мультипольным моментам, т. е. фактически учитываем все мультипольные моменты.

Легко видеть, что энергию переходного излучения сгустков можно получить из энергии переходного излучения отдельного заряда, заменив q^2 на q_{eff}^2 :

$$q_{\text{eff}}^2 = q^2 |f_{\omega, \kappa}|^2. \quad (3.300)$$

Если e — элементарный заряд частицы сгустка, то $q = eN_q$, где N_q — полное число частиц в сгустке. Тогда $q_{\text{eff}}^2 \sim e^2 N_q^2$ при $f \sim 1$. Излучение когерентно для всех частиц сгустков, если $f_{\omega, \kappa} \approx 1$. Для ультрарелятивистских частиц характерная частота излучения порядка $\omega_{pe} \mathcal{E}/Mc^2$, а $\kappa \sim \theta \omega/c \sim (Mc^2/\mathcal{E})(\omega_{pe}/c) \times (\mathcal{E}/Mc^2) = \omega_{pe}/c$, т. е. условия когерентности приобретают вид

$$l \ll c/\omega_{pe}, \quad a \ll c/\omega_{pe}. \quad (3.301)$$

Эти критерии не зависят от $\mathcal{E}$ и сохраняются для нерелятивистских сгустков. В плотных средах (твердых телах при обычных плотностях) для существующих релятивистских пучков они практически трудно выполняются. Однако для неплотной среды (плазмы) выполнение условий (3.301) вполне реально.

Рассмотрим, каково будет излучение, если критерии (3.301) не выполняются. Из (2.59), учитывая (3.300), получаем при $\mathcal{E} \gg Mc^2$

$$W^{\text{tr}}(\omega) \approx \frac{q^2 c^3}{\pi \omega^8} (\omega_{pe,2}^2 - \omega_{pe,1}^2)^2 \left(\frac{\omega_l}{\omega}\right)^2 \sin^2 \frac{\omega}{\omega_l} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{\kappa^2 J_0^2(\kappa a) d\kappa^2}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \kappa^2 c^2/\omega^2 + \omega_{pe,1}^2/\omega^2]^2 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \kappa^2 c^2/\omega^2 + \omega_{pe,2}^2/\omega^2]^2}. \quad (3.302)$$

Здесь использована формула (3.298). Для случая, когда справедлива формула (3.297), нужно $J_0^2(\kappa a)$ в (3.302) заменить на

$(2/\kappa a)^2 J_1^2(\kappa a)$. В силу нарушения второго из условий (3.301) можно использовать асимптотические выражения для функций Бесселя, отбрасывая быстро осциллирующие части:

$$J_0^2(\kappa a) \approx \frac{1}{\pi \kappa a}, \quad \left(\frac{2}{\kappa a}\right)^2 J_1^2(\kappa a) \approx \frac{4}{\pi (\kappa a)^3}. \quad (3.303)$$

В результате для случая $\Delta N \ll N_0$ получаем для полого цилиндра (кольца)

$$W^{\text{tr}}(\omega) = \frac{q^2 \omega_{\text{pe}}^4 (\Delta N)^2}{16 \pi a \omega^5 N_0^2} \frac{(\omega_l/\omega)^2 \sin^2(\omega/\omega_l)}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]^{5/2}} \quad (3.304)$$

и для сплошного цилиндра

$$W^{\text{tr}}(\omega) = \frac{5q^2 \omega_{\text{pe}}^4 (\Delta N)^2}{4 \pi a \omega^5 N_0^2} \left(\frac{c}{\omega a}\right)^2 \frac{(\omega_l/\omega)^2 \sin^2(\omega/\omega_l)}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]^{7/2}}. \quad (3.305)$$

Если сгусток когерентен по длине (т. е. первое из условий (3.301) выполнено), то формулы (3.304), (3.305) дают плоский спектр до $\omega \sim \omega_{\text{pe}} \mathcal{E}/Mc^2$, падающий при $\omega \gg \omega_{\text{pe}} \mathcal{E}/Mc^2$, причем это падение более крутое, чем в случае, когда условие когерентности в поперечном направлении (второе из условий (3.301)) выполнено, а именно, спектр падает как $1/\omega^5$ для полого цилиндра и как $1/\omega^7$ — для сплошного. Если же сгусток некогерентен и по длине (т. е. первое условие (3.301) тоже не выполнено), то в соответствующих выражениях величину $\sin^2(\omega/\omega_l)$ можно заменить ее средним значением $1/2$. Спектр будет падающим уже при $\omega \gg \omega_l$ и $\omega \ll \omega_{\text{pe}} \mathcal{E}/Mc^2$ (как $1/\omega^2$) и будет еще более круто падающим при $\omega \gg \omega_{\text{pe}} \mathcal{E}/Mc^2$. Это показывает, что интегральная энергия излучения определяется характерной частотой ω_l , а не $\omega_{\text{pe}} \mathcal{E}/Mc^2$, т. е.

$$\omega_{\text{max}} \sim (2c/l) \mathcal{E}/Mc^2. \quad (3.306)$$

Плазменной формулой для этих частот можно пользоваться только при $\omega \gg \omega_{\text{pe}}$, т. е.

$$\mathcal{E}/Mc^2 \gg \omega_{\text{pe}} l/c. \quad (3.307)$$

В этих условиях можно в (3.304), (3.305) пренебречь в знаменателе слагаемым $(Mc^2/\mathcal{E})^2$ и получить для полого цилиндра

$$W^{\text{tr}} = \int_0^\infty W^{\text{tr}}(\omega) d\omega = \frac{q^2 c (\Delta N)^2}{16 \omega_{\text{pe}} a l N_0^2} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}, \quad (3.308)$$

и для сплошного цилиндра

$$W^{\text{tr}} = \int_0^\infty W^{\text{tr}}(\omega) d\omega = \frac{5q^2 c^3 (\Delta N)^2}{4 \omega_{\text{pe}}^2 a^3 l N_0^2} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (3.309)$$

Как видно из результата, пропорциональность полной излученной энергии $\mathcal{E}$ сохраняется и в случае, когда условие когерентности не выполняется.

2. Переходное излучение токов. Рассмотрим переходное излучение кольцевого тока [54], считая его круговым в плоскости, перпендикулярной скорости его поступательного движения $\mathbf{v}$, которая, в свою очередь, перпендикулярна границе раздела сред. Считаем, что плотность тока в сопутствующей системе отсчета имеет только азимутальную составляющую j_φ (φ — азимутальный угол в плоскости тока) и зависит только от $r_\perp$ и z . Обозначим ток в собственной (сопутствующей) системе отсчета через j_0 . Имеем

$$j_0(r_{\perp 0}, z_0) = i \int j_{0,\kappa,k_z} \sin \psi \exp(i\kappa r_{\perp 0} \sin \psi + ik_z z_0) d\psi \kappa d\kappa dk_z = \\ = 2\pi \int_0^\infty \kappa d\kappa \int_{-\infty}^\infty J_1(\kappa r_{\perp 0}) j_{0,\kappa,k_z} \exp(ik_z z_0) dk_z, \quad (3.310)$$

где

$$j_{0,\kappa,k_z} = \frac{1}{i(2\pi)^3} \int \sin \psi d\psi r_{\perp 0} \exp(-i\kappa r_{\perp 0} \sin \psi - ik_z z_0) dr_{\perp 0} dz_0 = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty J_1(\kappa r_{\perp 0}) r_{\perp 0} dr_{\perp 0} \int_{-\infty}^\infty \exp(-ik_z z_0) j_0(r_{\perp 0}, z_0) dz_0. \quad (3.311)$$

Так, например, для тонкого кольцевого цилиндра радиуса a и длины l

$$j_0(r_{\perp 0}, z_0) = (I/l) \delta(r_{\perp 0} - a); \quad -l/2 < z_0 < l/2, \quad (3.312)$$

где I — величина полного тока в сопутствующей системе, следовательно,

$$j_{0,\kappa,k_z} = \frac{Ia J_1(\kappa a)}{(2\pi)^2} \frac{2}{k_z l} \sin \frac{k_z l}{2}. \quad (3.313)$$

Обозначим ток в лабораторной системе, в которой он движется поступательно со скоростью $\mathbf{v}$, перпендикулярной плоскости тока, через j . Имеем

$$j(r_\perp, z, t) = j_0(r_\perp, (z - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}) \quad (3.314)$$

и, следовательно,

$$j_{\omega,\kappa}(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty J_1(\kappa r_\perp) r_\perp dr_\perp \int_{-\infty}^\infty j(r_\perp, z, t) \exp(i\omega t) dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \kappa' d\kappa' \int_0^\infty J_1(\kappa r_\perp) J_1(\kappa' r_\perp) r_\perp dr_\perp \int_{-\infty}^\infty j_{0,\kappa',k_z} \times \\ \times \exp[ik_z(z - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2} + i\omega t] dt = \\ = j_{0,\kappa,\omega} \sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2} (1/v) \exp(i\omega z/v). \quad (3.315)$$

Здесь использовано

$$\int_0^{\infty} J_1(\kappa r_{\perp}) J_1(\kappa' r_{\perp}) \kappa' r_{\perp} dr_{\perp} = \delta(\kappa - \kappa'),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[it \left(\omega - \frac{k_z v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \right] dt = \\ = \frac{1}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \delta \left(k_z - \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \end{aligned}$$

Уравнение, описывающее движение тока, совпадает в данном случае с (3.252) — уравнением для магнитного момента. В принятых условиях ток создает только магнитный момент вдоль z , т. е. излучается только H -поляризованная волна. Выражение для энергии переходного излучения совпадает с (3.276) при замене магнитного момента m_z ($m_{\perp} = 0$) на $m_{z, \text{eff}}$. Для распределения, описываемого (3.313), имеем

$$m_{z, \text{eff}} = \frac{2\pi a I J_1(\kappa a)}{\kappa c} \frac{\omega_l}{\omega} \sin \frac{\omega}{\omega_l}, \quad (3.316)$$

$$\omega_l = (2v/l) \mathcal{E} / Mc^2, \quad (3.317)$$

а в общем случае

$$m_{z, \text{eff}} = \frac{(2\pi)^3}{c\kappa} j_{0, \kappa, \omega} \sqrt{1 - v^2/c^2} / v. \quad (3.318)$$

В пределе $\kappa a \ll 1$ из (3.316), естественно, получаем

$$m_{z, \text{eff}} = \pi a^2 / c, \quad (3.319)$$

что соответствует магнитному моменту тока I (напомним, что m — это магнитный момент в сопутствующей системе, а I — ток в сопутствующей системе). В пределе $\kappa a \gg 1$ из (3.316) имеем

$$m_{z, \text{eff}}^2 \approx \frac{I^2 2\pi a}{\kappa^3 c^2} \left(\frac{\omega_l}{\omega} \right)^2 \sin^2 \frac{\omega}{\omega_l}. \quad (3.320)$$

Используя (3.320) и (3.276), получаем

$$\begin{aligned} W_{\text{H}}^{\text{tr}} = \frac{4I^2 a}{c^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\omega_l}{\omega} \right)^2 \sin^2 \frac{\omega}{\omega_l} \frac{d\omega}{\omega^5} \int_0^{\infty} \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 (\omega_{\text{pe}, 2}^2 - \omega_{\text{pe}, 1}^2)^2 \times \\ \times [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe}, 1}^2/\omega^2]^{-2} [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe}, 2}^2/\omega^2]^{-2}. \end{aligned} \quad (3.321)$$

При $\Delta N/N_0 \ll 1$ имеем

$$\begin{aligned} W_{\text{H}}^{\text{tr}} = \frac{5\pi I^2 a \omega_{\text{pe}}^4 (\Delta N)^2}{8c^2 N_0^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\omega_l}{\omega} \right)^2 \sin^2 \frac{\omega}{\omega_l} \frac{d\omega}{\omega^5} \times \\ \times (Mc^2/\mathcal{E})^2 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]^{-7/2}. \end{aligned} \quad (3.322)$$

Для тонких колец, когда $l \ll c/\omega_{pe}$, имеем $(\omega_l/\omega) \sin(\omega/\omega_l) \approx 1$,

$$W_H^{tr} \approx \frac{I^2 a \pi (\Delta N)^2}{12 c^2 N_0^2} \frac{\mathcal{E}}{M c^2}. \quad (3.323)$$

В другом предельном случае $l \gg c/\omega_{pe}$ (в отличие от случая заряженных ступок) максимальная излучаемая частота остается равной $\omega_{pe} \mathcal{E}/M c^2$ (не происходит ее понижения до значения (3.306)). Это связано с тем, что, как уже подчеркивалось, для магнитных моментов возникает дополнительный множитель ω^2 , и поэтому даже при $l \gg c/\omega_{pe}$ излучаются в основном частоты $\omega_{pe} \mathcal{E}/M c^2$ (спектр является плоским до этой частоты, а затем падает как $1/\omega^7$). Заменяя $\sin^2(\omega/\omega_l)$ его средним значением $1/2$, получаем для $l \gg c/\omega_{pe}$

$$W_H^{tr} = \frac{16 \pi I^2 a}{3 c^2} \left(\frac{c}{\omega_{pe} l} \right)^2 \left(\frac{\Delta N}{N_0} \right)^2 \frac{\mathcal{E}}{M c^2}. \quad (3.324)$$

§ 3.8. Интерференционные эффекты в переходном излучении. Индукированное переходное излучение

1. Введение. Когерентность и неустойчивость. При выполнении условий когерентности излученная энергия в расчете на одну частицу оказывается значительно большей, чем при независимом излучении каждой из частиц, поскольку общая излученная энергия в условиях когерентности (скажем, для ступки) пропорциональна квадрату числа частиц. Однако часто создание ступок (в особенности достаточно малых размеров) представляет собой не легкую задачу, а само излучение может приводить к нарушению условий когерентности [5а]. Поэтому представляет интерес случай, когда когерентность (пусть хотя бы частичная) образуется самопроизвольно и затем усиливается самим процессом излучения. Для этого необходимо, чтобы поток частиц (пересекающих, например, границу раздела сред) становился частично модулированным по плотности и чтобы (из-за наличия обратной связи) воздействие на пучок излученных им электромагнитных волн приводило к увеличению модуляции пучка. Такая ситуация соответствует неустойчивости. Неустойчивость, связанная с переходным излучением, представляет интерес в особенности для ультрарелятивистских частиц, так как в этом случае длина излучаемой волны может попадать в рентгеновский диапазон длин волн, а создание ступок столь малых размеров (меньше длины волны) без неустойчивости практически нереально. Создание даже усилителя, не говоря уже о генераторе, в области коротких длин волн представляет собой важную, но трудную задачу. Поэтому обсудим здесь некоторые аспекты проблемы, связанной с неустойчивостью электромагнитных волн, возникающей из-за переходного излучения.

Заметим, что для возникновения неустойчивости необходимо выполнение целого ряда требований. Во-первых, это наличие

большого числа излучателей, или, конкретнее, потока частиц. Тогда волна, излученная, например, одной частицей, является, в известном смысле, внешней для другой группы частиц. Это значит, что эти частицы излучают в поле внешней волны и могут ею группироваться в сгустки, так что излучение, рассчитанное на одну частицу, будет уже большим, чем в отсутствие внешней волны. Так как каждая из частиц этой группы излучает больше, то и амплитуда волны, действующая на последующие группы частиц, будет большей, что приведет к еще большему излучению и т. д. Во-вторых, необходимо, чтобы, действительно, воздействие внешней волны на излучающие частицы приводило хотя бы к частичной когерентности (образованию сгустков). В-третьих, необходимо существование обратной связи, т. е. «возвращение» усиленной волны для последующего взаимодействия с частицами и, наконец, в-четвертых, необходимо доминирование усиления волн частицами потока над их затуханием из-за различных каналов диссипации (такое затухание приводит к появлению порога неустойчивости).

Будем предполагать, что рассматриваемый поток частиц является однородным и в целом квазинейтральным. Природу нейтрализации заряда мы здесь конкретизировать не будем. Будем также считать, что однородный поток частиц в отсутствие неустойчивости не только не создает электрических полей (квазинейтрален), но и не создает магнитных полей (компенсирован по току). Отметим, что создаваемые экспериментально мощные электронные релятивистские пучки обычно нейтрализованы по заряду и компенсированы по току. Если такой поток распространяется в однородной среде и выполнено условие излучения В.—Ч., то каждая из частиц может спонтанно излучать, так же как и в отсутствие потока, т. е. независимо от других частиц и в соответствии с величиной своего заряда q . Это происходит в том случае, когда флуктуации плотности заряда в пучке происходят так же, как в идеальном газе ($\langle \Delta N^2 \rangle \propto N$). Точно так же, если поток падает на границу раздела сред, то в тех же условиях ($\langle \Delta N^2 \rangle \propto N$) возникает независимое спонтанное переходное излучение каждого из зарядов q пучка.

Весь комплекс проблем усиления излучения пучком из-за процессов переходного излучения может быть связан с проблемой индуцированного переходного излучения (об этом см. п. 5 и 188—921). Из всех перечисленных требований, необходимых для возникновения неустойчивости, сложнее всего реализация обратной связи. Обычно частицы потока и излучение проходят через границу только один раз и, провзаимодействовав с ней, на нее не возвращаются. Для преодоления этой трудности имеется, по крайней мере, две возможности: создать либо систему «зеркал», возвращающих излучение на границу раздела сред, либо последовательность границ раздела или многих рассеивателей (гл. 4).

В первом случае, хотя каждая из частиц проходит только однажды через границу раздела, но излучение многократно воз-

вращается на границу раздела и, будучи, например, усилено частицами пучка при первом проходе границы, будет действовать на другие частицы при следующем проходе границы уже в соответствии со значением своей возросшей амплитуды. Во втором случае волны, излученные на первой границе, могут в дальнейшем усиливаться при прохождении последующих границ теми же частицами пучка, если выполняется условие синхронизма (см. гл. 4). В обоих случаях система, с которой взаимодействует поток частиц, «усложняется»; при этом существенной становится интерференция ранее испущенного излучения с тем, которое вновь возникает на границе раздела сред. Эта интерференция в случае большого числа границ существенно видоизменяет характер спонтанного излучения, которое, как оказывается, соответствует уже переходному рассеянию и будет освещено в гл. 4. Однако и для одной границы наличие «зеркал» также приводит к интерференционным явлениям, которые видоизменяют как спонтанное излучение, так и эффекты усиления, связанные с индуцированным излучением. В общем случае, естественно, возможно спонтанное излучение и неустойчивость не только электромагнитных волн, но и продольных электростатических волн. Известно, например, что при инжекции пучка в эквипотенциальный разрядный промежуток может возникнуть электростатическая неустойчивость [88]. Условия равенства потенциала на концах этого промежутка соответствуют в этом случае, в определенном смысле, условиям зеркальности отражения «излучения», а механизм излучения — это переходное излучение при инжекции пучка в промежуток. Многие аспекты теории индуцированного переходного излучения, как нам кажется, сейчас еще недостаточно выяснены. Имеется, однако, ряд работ [89—92], в которых рассматриваются некоторые вопросы, связанные с этой проблемой. Конкретный анализ проблем индуцированного переходного излучения требует рассмотрения большого комплекса вопросов, связанных с анализом роли конкретной геометрии различных структур (в частности, волноводных и т. п.) и с анализом дисперсионных уравнений, описывающих неустойчивость [88]. Здесь мы остановимся лишь на некоторых примерах, иллюстрирующих принципиальные аспекты проблемы, и на роли различных интерференционных эффектов в переходном излучении, которые играют важную роль в возникновении индуцированного переходного излучения.

Когда говорят о мазерных процессах усиления излучения в квантовых генераторах, обычно имеют в виду следующую наглядную картину. В двухуровневой системе, например, имеется инверсная заселенность — больше частиц на верхнем уровне, нежели на нижнем. Падающая волна (пусть, для определенности, один квант) вызывает индуцированный переход с верхнего уровня на нижний — возникают два кванта, которые, падая на следующий атом, дают четыре кванта и т. д., т. е. возникает лавина квантов. В данном случае важно, что вероятность индуцирован-

ного излучения пропорциональна интенсивности (квадрату амплитуды) падающего излучения. Для переходного излучения индуцированный эффект возникает либо из-за частичной группировки пучка при воздействии волны, падающей на границу одновременно с пучком, либо из-за того, что, нелинейно воздействуя на среды, волна меняет их поляризуемости. В обоих случаях возникающая дополнительно энергия переходного излучения пропорциональна квадрату амплитуды падающей волны.

Мы рассмотрим здесь более подробно лишь первую возможность, связанную с появлением частичной когерентности переходного излучения из-за группировки частиц пучка падающей волной.

2. Ток, создаваемый смещениями частиц в поле волны. Сгущения зарядов в потоке частиц возникают из-за того, что волна по-разному воздействует на различные частицы потока. Воздействие волны зависит от положения заданной частицы и ее скорости. Смещение частиц в поле волны зависит и от их массы. Поэтому если спонтанное переходное излучение и спонтанное излучение В.—Ч. не зависят от массы частиц и определяются только их скоростями, то индуцированное переходное излучение и индуцированное излучение В.—Ч. зависят от массы частиц*).

Пусть выделенная частица потока имеет скорость $\mathbf{v}$ и координату $\mathbf{r}_0$ (при $t=0$) до воздействия на нее рассматриваемой волны. В общем случае воздействия на частицу произвольного поля уравнение движения частицы можно записать в виде**)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \frac{q}{M} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \int \left(\mathbf{F}_{\omega_1, \mathbf{k}_1}(t) - \frac{\mathbf{v}(t)}{c^2} \mathbf{v}(t) \mathbf{F}_{\omega_1, \mathbf{k}_1}(t) \right) \times \\ \times \exp(-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}(t)) d\omega_1 d\mathbf{k}_1, \quad (3.325)$$

*) Точнее, индуцированное излучение зависит от энергии частиц и от распределения частиц по энергиям (см. ниже формулу (3.3346); как подчеркивалось, индуцированное излучение связано с группировкой частиц, а следовательно, с наличием большого числа частиц). Таким образом, наряду со скоростью v , которая может быть выражена через соотношение $\mathcal{E}/Mc^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, индуцированные процессы зависят еще от $\mathcal{E} = Mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ и в этом смысле зависят от M (конечно, для заданных v и $\mathcal{E}$ индуцированные эффекты от массы не зависят). Стоит обратить внимание на то, что индуцированные процессы выражаются через вероятность только спонтанного процесса (для излучения В.—Ч. см., например, (3.347)), которая зависит только от скорости частиц v , но помимо вероятности индуцированное излучение определяется также производной от функции распределения частиц по импульсам.

**) Это уравнение является непосредственным следствием релятивистского уравнения движения частицы с учетом силы Лоренца

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{M\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}} = \\ = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}(t) \mathbf{H}(\mathbf{r}(t), t)]) = q\mathbf{F}(t), \\ = q \int \mathbf{F}_{\omega_1, \mathbf{k}_1}(t) \exp(-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}(t)) d\omega_1 d\mathbf{k}_1. \quad (3.326a)$$

где

$$\mathbf{F}_{\omega_1, \mathbf{k}_1}(t) = \mathbf{E}_{\omega_1, \mathbf{k}_1} + [\mathbf{v}(t) \mathbf{H}_{\omega_1, \mathbf{k}_1}]/c. \quad (3.326)$$

В правой части уравнения (3.325) положим в первом приближении, что скорость $\mathbf{v}$ постоянна, а $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$. Тогда, действительно, мы можем решить уравнение (3.325) и найти добавочные $\delta\mathbf{v}(t)$ и $\delta\mathbf{r}(t)$, т. е. скорости и смещения частиц в волне. Имеем

$$\delta\mathbf{v}(t) = \frac{qc^2}{\mathcal{E}} \int \left(\mathbf{F}_{\omega_1, \mathbf{k}_1} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \mathbf{v} \mathbf{F}_{\omega_1, \mathbf{k}_1} \right) \times \\ \times \frac{t}{\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v}} \exp[-i(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v})t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_0] d\omega_1 d\mathbf{k}_1, \quad (3.327a)$$

$$\delta\mathbf{r}(t) = \frac{qc^2}{\mathcal{E}} \int \left(\mathbf{F}_{\omega_1, \mathbf{k}_1} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \mathbf{v} \mathbf{F}_{\omega_1, \mathbf{k}_1} \right) \times \\ \times \frac{1}{-(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v})^2} \exp[-i(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v})t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_0] d\omega_1 d\mathbf{k}_1; \quad (3.327b)$$

$$\mathcal{E} = Mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad v = v(0).$$

Зная $\delta\mathbf{v}(t)$ и $\delta\mathbf{r}(t)$, можно найти ток, создаваемый этими возмущениями. Излучение этого тока и опишет эффект индуцированного излучения. Ток, создаваемый произвольно движущимся зарядом, равен

$$\mathbf{j}^q(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad (3.328)$$

а его компонента Фурье имеет вид

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^q = \frac{q}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)) dt. \quad (3.329)$$

Невозмущенные заряд частиц пучка и ток по используемому здесь предположению скомпенсированы. Поэтому, подставив в (3.329) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t + \delta\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}(t)$, мы учтем лишь члены, линейные по $\delta\mathbf{r}(t)$ и $\delta\mathbf{v}(t)$:

$$\delta\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^q = \frac{q}{(2\pi)^4} \int [\delta\mathbf{v}(t) - i\mathbf{v}(\mathbf{k} \delta\mathbf{r}(t))] \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{v}t - i\mathbf{k}\mathbf{r}_0) dt. \quad (3.330)$$

Подставив сюда $\delta\mathbf{v}(t)$ и $\delta\mathbf{r}(t)$ из (3.327a), (3.327b) и интегрируя по всем положениям зарядов:

$$\int \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{r}_0] d\mathbf{r}_0 = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1), \quad (3.331)$$

мы убеждаемся в том, что остающийся интеграл по времени дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\omega - \omega_1)t] dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_1). \quad (3.332)$$

Далее, усредним результат по распределению частиц пучка по импульсам (скоростям), считая, что такое распределение описывается функцией распределения f_p , нормированной так, что концентрация пучка равна

$$N_b = \int \frac{f_p}{(2\pi)^3} d\mathbf{p}. \quad (3.333)$$

В результате получаем

$$\delta j_{\omega, \mathbf{k}} = \int \delta j_{\omega, \mathbf{k}}^q d\mathbf{r}_0 \frac{f_p d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = -\frac{q^2 c^2}{i} \int \frac{f_p}{(2\pi)^3} d\mathbf{p} \left\{ \frac{\mathbf{F}_{\omega, \mathbf{k}} - (\mathbf{v}/c) (\mathbf{v} \mathbf{F}_{\omega, \mathbf{k}})/c}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} + \right. \\ \left. + [\mathbf{v}/(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})^2] [\mathbf{k} \mathbf{F}_{\omega, \mathbf{k}} - (\mathbf{k} \mathbf{v}) (\mathbf{v} \mathbf{F}_{\omega, \mathbf{k}})/c^2] \right\} d\mathbf{p}. \quad (3.334a)$$

Отсюда

$$\delta j_{\omega, \mathbf{k}} = iq^2 \int \frac{f_p d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{F}_{\omega, \mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \frac{\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} = -iq^2 \int \frac{\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} \mathbf{F}_{\omega, \mathbf{k}} \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (3.334b)$$

Здесь мы использовали соотношение

$$\frac{dv_i}{dp_j} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \left(\delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{c^2} \right); \quad \mathcal{E} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.335)$$

Таким образом, мы знаем, какой ток вызывают смещения частиц в волне (дающие сгущение зарядов). Тот же результат может быть получен и при помощи кинетического бесстолкновительного уравнения. Соотношение (3.334) может быть использовано как для иллюстрации эффекта индуцированного переходного излучения, так и для иллюстрации эффекта индуцированного излучения В.—Ч. В последнем случае речь идет о хорошо известной пучковой неустойчивости [88, 68, 73].

3. Индуцированное излучение. Вавилова — Черенкова. Рассмотрим вначале отдельную продольную электростатическую волну ω_0 , $\mathbf{k}_0$, распространяющуюся в однородной среде. Ее воздействие на заряд q определяется уравнением*)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}(t) + \varphi_0). \quad (3.336)$$

Пусть в отсутствие волны скорость частицы есть $\mathbf{v}$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ и выполнено условие излучения В.—Ч.

$$\omega_0 = \mathbf{k}_0 \mathbf{v}. \quad (3.337)$$

Тогда, интересуясь эффектами, линейными по $\mathbf{E}_0$, можно в пра-

*) Электростатическую волну мы взяли для простоты с тем, чтобы в правой части (3.336) не писать силу Лоренца. Уравнение (3.336) справедливо в общем случае релятивистского заряда $\mathbf{p} = M\mathbf{v}(t)/\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}$.

вую часть уравнения (3.336) подставить $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$, т. е.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E}_0 \cos(\varphi_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{r}_0) = q\mathbf{E}_0 \cos \varphi, \quad (3.338)$$

где

$$\varphi = \varphi_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{r}_0. \quad (3.339)$$

Если имеется поток частиц, то разные частицы имеют разные $\mathbf{r}_0$, т. е. разные фазы φ по отношению к волне. Те из них, для которых $\cos \varphi > 0$, ускоряются, а те, для которых $\cos \varphi < 0$, — тормозятся. Так как изменение фазы φ на 2π происходит в пределах одной длины волны, то, как видно, возникает (в пределах этой длины) тенденция к образованию сгустков частиц, а следовательно, возникает и неустойчивость.

В общем случае*) инкремент неустойчивости (индуцированного излучения В.—Ч.) можно найти, представив ток, создаваемый сгущениями частиц в поле волн (3.334), в уравнение Максвелла. Если нас интересует излучение поперечных электромагнитных волн, то соответствующее уравнение будет иметь вид

$$\left(k^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^t = \frac{4\pi i\omega\mu}{c^2} \left(\delta\mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}} - \frac{\mathbf{k}}{k^2} \mathbf{k} \delta\mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}\right) \quad (3.340)$$

или, после подстановки (3.334):

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^t &= \frac{4\pi\omega q^2\mu}{c^2} \int \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^t}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \times \\ &\times \left[\frac{\mathbf{k}}{\omega} \mathbf{v} \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^t + \frac{\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^t}{\omega} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right] \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (3.341)$$

Здесь использовано соотношение

$$\mathbf{F}_{\omega,\mathbf{k}}^t = \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^t + [\mathbf{v} [\mathbf{k} \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^t]] \frac{1}{\omega} = \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^t \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega}\right) + \frac{\mathbf{k}}{\omega} \mathbf{v} \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^t. \quad (3.342)$$

Будем считать концентрацию частиц пучка малой и при решении уравнения (3.341) используем теорию возмущений. В первом приближении пренебрежем правой частью (3.341) и получим

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) = kc / \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (3.343)$$

Учтем в следующем приближении в правой части (3.341) мнимую часть, положив

$$\text{Im} \frac{1}{\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}} \approx -\pi \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (3.344)$$

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) + i\gamma_{\mathbf{k}}, \quad \gamma_{\mathbf{k}} \ll \omega(\mathbf{k}), \quad (3.345)$$

*) Приведенный пример с воздействием отдельной волны (продольной) служил только иллюстрацией эффекта фазировки, который имеет место, естественно, для любого типа волн. Ток, связанный с группировкой и опisyваемый (3.334), может быть использован для любых и, в частности, поперечных волн.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^t \gamma_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \Big|_{\omega=\omega(\mathbf{k})} = \\ = \frac{4\pi^2 q^2 \mu}{c^2} \int \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^t \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}) (\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^t \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^t) \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{f_{\mathbf{p}} d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (3.346)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{\mathbf{k}}^{\text{V-Ch}} = \frac{4\pi^2 q^2}{c^2} \int \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{k^2} \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{f_{\mathbf{p}} d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} / \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon \Big|_{\omega=\omega(\mathbf{k})} = \\ = \frac{1}{2} \int w_{\mathbf{p}}^{\text{V-Ch}}(\mathbf{k}) \hbar \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{f_{\mathbf{p}} d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (3.347)$$

где $w_{\mathbf{p}}^{\text{V-Ch}}(\mathbf{k})$ — введенная выше вероятность излучения В.—Ч. (см. (2.276)).

Соотношение (3.347) можно получить и методом коэффициентов Эйнштейна [1]. Пусть $N_{\mathbf{k}}$ — число квантов (фотонов) излучения В.—Ч. Точное определение $N_{\mathbf{k}}$ (см. ниже) для нас сейчас не существенно; важно лишь, что $N_{\mathbf{k}}$ пропорционально интенсивности, т. е. квадрату амплитуды поля. Вероятности индуцированного излучения и поглощения пропорциональны $N_{\mathbf{k}} w_{\mathbf{p}}^{\text{V-Ch}}(\mathbf{k})$, однако излучение определяется числом частиц с импульсом $\mathbf{p}$ (на верхнем уровне), а поглощение — соответственно — числом частиц с импульсом $\mathbf{p} - \hbar \mathbf{k}$ (на нижнем уровне). Поэтому уравнение баланса числа квантов имеет вид

$$\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt} = 2\gamma_{\mathbf{k}}^{\text{V-Ch}} N_{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}} \int w_{\mathbf{p}}^{\text{V-Ch}}(\mathbf{k}) (f_{\mathbf{p}} - f_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (3.348)$$

Отсюда приходим к (3.347), если учтем, что в рамках квазиклассического приближения нужно принимать во внимание лишь первый член разложения по $\hbar \mathbf{k} \ll \mathbf{p}$.

Стоит подчеркнуть, что в полную энергию спонтанного излучения входит вероятность $w_{\mathbf{p}}^{\text{V-Ch}}(\mathbf{k})$, проинтегрированная по всем значениям $\mathbf{k}$. Вместе с тем, индуцированное усиление (инкремент (3.347)) определяется только значением вероятности излучения $w_{\mathbf{p}}^{\text{V-Ch}}(\mathbf{k})$ в направлении усиливаемой волны.

4. Интерференция между переходным излучением заряда и волной, падающей на границу раздела сред. Рассмотрим вновь отдельный заряд, падающий нормально на границу. Пусть наряду с ним на границу падает еще электромагнитная волна. Ясно (см., например, [91]), что воздействие этой волны на заряд, так же как и в случае излучения В.—Ч., зависит от фазовых соотношений между волной и частицей и приводит либо к ускорению, либо к торможению частиц. Последнее (при наличии уже многих зарядов) приводит к образованию сгущений и разрежений, т. е. к частичной когерентности. Обозначим безразмерную амплитуду падающей волны через a_0 (см. (2.20)). Действовать на заряд, естественно, будет не только падающая волна a_0 , но

также и отраженная и преломленная волны. Сравнивая воздействие волны на заряд в отсутствие и при наличии границы мы должны заключить, что совокупное действие падающей, отраженной и преломленной волн должно содержать дополнительный эффект, обращающийся в нуль при отсутствии границы (т. е. при $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$). Именно им мы здесь и будем интересоваться. Как мы видели, в случае однородной среды (см. (3.347)) воздействие внешней волны на заряд приводит к раскачке или затуханию электромагнитных волн (т. е. к индуцированному эффекту), только если выполнено условие излучения В.—Ч. $\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{v}$. При наличии границы мы будем считать условие излучения В.—Ч. невыполненным. Поэтому существенным будет лишь та дополнительная фазировка частиц, которая связана с наличием границы (и обращающаяся в нуль при $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$).

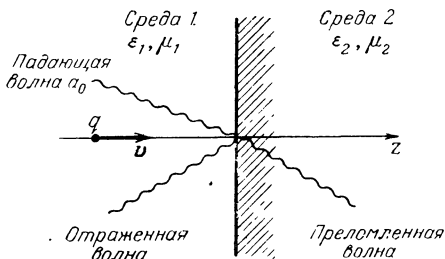


Рис. 11. Взаимодействие заряда и электромагнитной волны, падающих на границу раздела сред.

Рассмотрим вопрос о том, происходит ли изменение переходного излучения частицы при наличии волны, падающей на границу раздела сред. Эта волна может падать как со стороны среды 1, так и со стороны среды 2. Конкретности ради ограничимся случаем падения со стороны среды 1 (рис. 11). Тогда в среде 1 наряду с полем излучения назад, пропорциональным $\exp[-i(\omega z/c)\sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2}]$, которое в данном случае включает как переходное излучение частиц назад, так и отраженную от границы волну, будет присутствовать и поле падающей волны, пропорциональное $a_0 \exp[i(\omega z/c)\sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2}]$. Легко найти, как в такой ситуации видоизменяются соотношения (2.25), (2.26), получающиеся из граничных условий. В левой части (2.25) нужно заменить a_1 на $a_1 + a_0$, а в левой части (2.26), соответственно, заменить a_1 на $a_1 - a_0$. В результате в выражениях для a_2 (см. (2.27)) и a_1 (см. (2.28)) появятся члены, пропорциональные a_0 . Обозначим их через δa_2 и δa_1 . Имеем

$$\delta a_2 = \frac{2a_0\epsilon_1 \sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2}}{\epsilon_1 \sqrt{\epsilon_2\mu_2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} + \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2}}, \quad (3.349)$$

$$\delta a_1 = \frac{a_0(\epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2} - \epsilon_1 \sqrt{\epsilon_2\mu_2 - \kappa^2 c^2/\omega^2})}{\epsilon_1 \sqrt{\epsilon_2\mu_2 - \kappa^2 c^2/\omega^2} + \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2}}. \quad (3.350)$$

Если воспользоваться формулой (2.38) для энергии электромагнитных волн и положить $q = 0$, то (3.349), (3.350) дают, естественно, формулы Френеля для прошедшей через границу и отра-

женной от границы волн. Таким образом, при наличии заряда q возникающее результирующее поле аддитивно складывается из поля переходного излучения заряда в отсутствие внешней волны и полей отраженных и прошедших волн, таких, которые были бы в отсутствие заряда, что отражает принцип суперпозиции, справедливый в рамках линейной электродинамики. Возникает только интерференция между этими волнами, вследствие которой полная энергия излучения не будет равна сумме энергий переходного излучения заряда в отсутствие волны и энергии прошедших и отраженных волн, порожденных внешней волной a_0 .

Амплитуды переходного излучения заряда при $a_0 = 0$ будем по-прежнему обозначать через a_1 и a_2 . Тогда для интерференционной части энергии поля волн в среде 2 (вперед по движению заряда) получаем (см. (2.38))

$$\delta W_2^r = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} (a_2 \delta a_2^* + a_2^* \delta a_2) \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} =$$

$$= \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} \delta W_2^r(\omega, \theta_2) 2\pi \sin \theta_2 d\theta_2, \quad (3.351)$$

$$\delta W_2^r(\omega, \theta_2) = \text{Re} \{ 8E_0 (vq\omega/c^2 i) \varepsilon_2 \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2} \times$$

$$\times [\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2} + \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2]^{-1} \times$$

$$\times \left[1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2} \right]^{-1} -$$

$$- \frac{\varepsilon_1/\varepsilon_2 + (v/c) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2 \sin^2 \theta_2}}{1 - (v^2/c^2) \varepsilon_2 \mu_2 \cos^2 \theta_2} \Bigg\}; \quad E_0 = \frac{iq a_0}{2\pi^2 \omega}. \quad (3.352)$$

Здесь мы использовали (2.20) для того, чтобы выразить a_0 через амплитуду электрического поля E_0 падающей волны. В случае, когда среды 1 и 2 прозрачны и не рассматриваются углы, соответствующие мнимым значениям корней в (3.352) (т. е. отвечающие полному внутреннему отражению от среды 1), имеем

$$\delta W_2^r \propto \text{Re} (E_0/i) \propto |a_0| \cos \varphi_0, \quad (3.353)$$

где φ_0 — фаза внешней волны при $t=0$, $z=0$. Напомним, что частица проходит границу $z=0$ при $t=0$. Если частица проходит границу в другой момент времени, то так же, как и в (3.338), возникает фазовый множитель $\cos(\varphi_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}_0)$, где $\mathbf{r}_0$ — координата частицы при $t=0$. Наличие δW^r отражает и то, что внешняя волна в процессе перехода частицы через границу дополнительно воздействует на частицу, причем это воздействие зависит от фазы $\varphi = \varphi_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}_0$ (ср. (3.338)). Действительно, дополнительные члены, связанные с внешней волной, возникают и в выражении для работы сил над зарядом (2.163). Нужно при этом учесть не только δa_2 и δa_1 в формуле (2.163), но, кроме того, добавить еще

член $-a_0[1 - (v/c)\sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \kappa^2 c^2/\omega^2}]^{-1}$ в фигурных скобках (2.163), который возникает из-за наличия падающей волны a_0 в среде 1. Эти дополнительные члены в работе сил также зависят от фазы волны. Легко показать, что дополнительная работа сил целиком связана с дополнительными интерференционными членами δW^T в излучении, т. е. баланс энергий соблюдается. Наконец, не только в выражении для работы сил, но и в выражениях для импульса и самой силы, действующей на частицу*), возникают члены, зависящие от тех же фазовых соотношений между волной и частицей (ср. (3.338)). Все это и позволяет говорить о том, что воздействие внешней волны при наличии границы раздела сред тоже приводит к дополнительной фазировке частиц внешней волной и (при наличии пучка частиц) к образованию сгущений плотности и частичной когерентности излучения, пропорциональной амплитуде волны.

5. Об индуцированном переходном излучении. Рассмотрим задачу о прохождении компенсированного (по заряду и току) пучка частиц через границу раздела сред. Будем считать скорости частиц пучка (без волны) нормальными к границе раздела. Для создания обратной связи для излучения будем предполагать наличие двух идеальных зеркал на равном расстоянии $-d$ и $+d$ от границы (рис. 12). Зеркала предполагаются прозрачными для частиц, но не излучения.

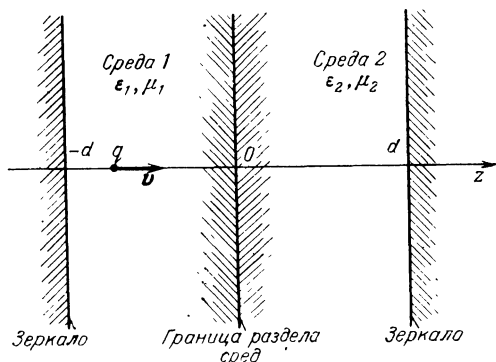


Рис.12. Излучение заряда (пучка частиц), падающего нормально на границу раздела двух сред при наличии двух зеркал.

Будем исходить из выражения для тока (3.334), считая, что все частицы имеют только скорости вдоль z . Хотя без возмущения волной все частицы пучка движутся вдоль z (перпендикулярно границе), волна создает возмущение как по z , так и перпендикулярно z . Поэтому ток (3.334) содержит как z -компоненту, обозначаемую просто через $\delta j_{\omega, k}$, так и компоненту $\delta j_{\perp, \omega, k}$, перпендикулярную z . Имеем, согласно (3.334) (причем $\mathbf{k} = \{\kappa, k_z\}$),

*) Все перечисленные величины обращаются в нуль, если $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$ (для δW^T это видно непосредственно из (3.352)).

$$\delta j_{\omega, \kappa, k_z} = \frac{q^2}{i} E_{\omega, \kappa, k_z} \int \left[\frac{v}{\omega - k_z v} \frac{\partial f_p}{\partial p} - \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \kappa^2 v^2 f_p}{M \omega (\omega - k_z v)^2} \right] \frac{dp}{2\pi} - \frac{q^2}{iM} \kappa \mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa, k_z} \int \frac{v \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\omega (\omega - k_z v)} \frac{f_p dp}{2\pi} \quad (3.354)$$

и

$$\delta j_{\perp, \omega, \kappa, k_z} = -\frac{q^2}{iM} \mathbf{E}_{\perp, \omega, \kappa, k_z} \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{f_p}{\omega} \frac{dp}{2\pi} - \frac{q^2}{iM} \frac{\kappa}{\omega} E_{\omega, \kappa, k_z} \int \frac{v \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\omega - k_z v} \frac{f_p dp}{2\pi}. \quad (3.355)$$

Здесь мы использовали первое из выражений (3.334а) и положили

$$f_{\mathbf{p}} = f_p (2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_{\perp}), \quad p_z \equiv p, \quad \int \frac{f_p dp}{2\pi} = N_b. \quad (3.356)$$

Так же, как и в случае излучения В.—Ч., будем считать пучок достаточно слабым, так что его вклад в показатель преломления, описывающий распространение электромагнитных волн, пренебрежимо мал. Тогда в первом приближении в (3.354), (3.355) можно подставить вместо E и $\mathbf{E}_{\perp}$ поля свободных волн (2.20). Здесь мы должны считать, что как в среде 1, так и в среде 2 распространяются волны в обе стороны (т. е. со знаками $\mp$ в (2.20), причем минус соответствует волне, распространяющейся против z , а плюс — по z) и с амплитудами $a^{(\pm)}$ (см. § 3.2). Имеем

$$\delta j_{\omega, \kappa, k_z} = \delta j_{\omega, \kappa, k_z}^{(+)} + \delta j_{\omega, \kappa, k_z}^{(-)}, \quad (3.357)$$

$$\delta j_{\omega, \kappa}^{(\pm)}(z) = -\frac{4\pi q^3 c^2}{\omega^2 (2\pi)^3} a^{(\pm)} \exp\left(\pm i \frac{\omega z}{c} \sqrt{\epsilon\mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right) \times \\ \times \int \frac{f_p}{\mathcal{E}(2\pi)} \left\{ \frac{1 - v^2/c^2 + \kappa^2 v^2/\omega^2}{[1 \mp (v/c) \sqrt{\epsilon\mu - \kappa^2 c^2/\omega^2}]^2} \mp \frac{(v/c) \sqrt{\epsilon\mu - \kappa^2 c^2/\omega^2}}{1 \mp (v/c) \sqrt{\epsilon\mu - \kappa^2 c^2/\omega^2}} \right\} dp, \quad (3.358)$$

$$\delta j_{\perp, \omega, \kappa}^{(\pm)}(z) = -\frac{4\pi q^3 c^3 \kappa}{(2\pi)^3 \omega^3} a^{(\pm)} \exp\left(\pm i \frac{\omega z}{c} \sqrt{\epsilon\mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right) \times \\ \times \int \frac{f_p}{\mathcal{E}} \left[\frac{v/c}{1 \mp (v/c) \sqrt{\epsilon\mu - \kappa^2 c^2/\omega^2}} \mp \frac{\omega^2}{\kappa^2 c^2} \sqrt{\epsilon\mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right] \frac{dp}{2\pi}. \quad (3.359)$$

Исключая перпендикулярные компоненты поля (так же, как это делалось в § 2.2), получим уравнение для $E_{\omega, \kappa}(z)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} - \kappa^2 \right) E_{\omega, \kappa}(z) = -\frac{4\pi i}{\omega\epsilon} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} \right) \delta j_{\omega, \kappa}(z) + \right. \\ \left. + i \frac{\partial}{\partial z} (\kappa \delta j_{\perp, \omega, \kappa}(z)) \right] \approx -\frac{4\pi i}{\omega\epsilon} \left[\kappa^2 \delta j_{\omega, \kappa}(z) + i \frac{\partial}{\partial z} (\kappa \delta j_{\perp, \omega, \kappa}(z)) \right] \approx$$

$$\approx \frac{4\pi q^2 E_{\omega, \kappa}(z)}{\varepsilon} \int \frac{f_p}{\mathcal{E}} \left[\varepsilon \mu + (\varepsilon \mu - 1) \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 \mp \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon \mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right)^{-2} \right] \frac{dp}{2\pi}. \quad (3.360)$$

В отсутствие пучка

$$E_{\omega, \kappa}^{(1,2)}(z) = a^{(\pm)} \exp \left[\pm i (\omega z / c) \sqrt{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} - \kappa^2 c^2 / \omega^2} \right] = \\ = a^{(\pm)} \exp (\pm i k_{1,2}^{(0)} z), \quad (3.361)$$

$$k_z = \pm k_{1,2}^{(0)}; \quad k_{1,2}^{(0)} = (\omega / c) \sqrt{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} - \kappa^2 c^2 / \omega^2}; \quad (3.362)$$

причем для $a^{(+)}$ в правой части (3.360) нужно выбрать знак минус в квадратных скобках, а для $a^{(-)}$ соответственно знак плюс.

При наличии пучка, согласно (3.360), величина k_z изменяется, причем в различной степени для волн, распространяющихся против пучка и навстречу пучку:

$$k_z = \pm k_{1,2}^{(\pm)}; \quad k_{1,2}^{(\pm)} = k_{1,2}^{(0)} + \delta k_{1,2}^{(\pm)}. \quad (3.363)$$

Поправки $\delta k^{(\pm)}$ могут быть найдены из (3.360) в линейном приближении по плотности пучка (по f_p):

$$\delta k^{(\pm)} = - \frac{2\pi q^2 c}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu - \kappa^2 c^2 / \omega^2}} \int \frac{f_p}{\mathcal{E}} \left[\mu + \left(\mu - \frac{1}{\varepsilon} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2} \left(1 \mp \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon \mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right)^{-2} \right] \frac{dp}{2\pi}. \quad (3.364)$$

В отсутствие пучка граничные условия на границе раздела сред и на двух зеркалах дают дисперсионное уравнение для мод рассматриваемого резонатора

$$\frac{\varepsilon_2}{k_2^{(0)}} \frac{\sin(k_2^{(0)} d)}{\cos(k_2^{(0)} d)} + \frac{\varepsilon_1}{k_1^{(0)}} \frac{\sin(k_1^{(0)} d)}{\cos(k_1^{(0)} d)} = 0, \quad (3.365)$$

решением которого будут некие частоты $\omega_n(\kappa)$, $n = 1, 2, \dots$. При наличии пучка граничные условия дают дисперсионное уравнение

$$\frac{\varepsilon_2 \{1 - \exp[id(k_2^{(+)} + k_2^{(-)})]\}}{k_2^{(+)} + k_2^{(-)} \exp[id(k_2^{(+)} + k_2^{(-)})]} = \frac{\varepsilon_1 \{1 - \exp[-id(k_1^{(+)} + k_1^{(-)})]\}}{k_1^{(+)} + k_1^{(-)} \exp[-id(k_1^{(+)} + k_1^{(-)})]}. \quad (3.366)$$

В качестве примера рассмотрим решение этого уравнения при выполнении неравенств

$$\omega = \omega_n(\kappa) + i\gamma, \quad \gamma \ll \omega_n(\kappa), \quad |\delta k_{1,2}^{(\pm)}| \ll k_{1,2}^{(0)}, \quad (3.367)$$

а также

$$|\delta k_{1,2}^{(\pm)}| d \ll 1, \quad \gamma d/c \ll 1. \quad (3.368)$$

Получаем $\gamma = \gamma' + i\gamma''$; $\gamma' = \text{Re } \gamma$, $\gamma'' = \text{Im } \gamma$, причем

$$\begin{aligned} \gamma' = & \left[(\delta k_1^{(+)} - \delta k_1^{(-)}) \frac{\varepsilon_1}{(k_1^{(0)})^2 d} \frac{\sin^2(k_1^{(0)} d)}{\cos^2(k_1^{(0)} d)} - \right. \\ & \left. - (\delta k_2^{(+)} - \delta k_2^{(-)}) \frac{\varepsilon_2}{(k_2^{(0)})^2 d} \frac{\sin^2(k_2^{(0)} d)}{\cos^2(k_2^{(0)} d)} \right] \times \\ & \times \left[\frac{\varepsilon_1}{\cos^2(k_1^{(0)} d)} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\omega^2 \varepsilon_1 \mu_1}{c^2 (k_1^{(0)})^2} + \frac{\varepsilon_2}{\cos^2(k_2^{(0)} d)} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2}{c^2 (k_2^{(0)})^2} \right]^{-1}. \quad (3.369) \end{aligned}$$

При получении (3.369) предполагалось, что условие излучения В.—Ч. не выполнено. Из (3.369) видно, что γ' обращается в нуль, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$, а также, если $\delta k^{(+)} = \delta k^{(-)}$ (например, если $v = 0$)*). Ясно также, что выразить инкремент (3.369) через введенные выше (гл. 2) вероятности переходного излучения простым образом нельзя, да этого и трудно было ожидать, так как система с двумя зеркалами существенно отличается от рассмотренного выше случая одной границы раздела сред. Необходимость зеркал здесь связана с тем, что для раскачки нужна обратная связь. Приведенный пример носил иллюстративный характер. Конкретные устройства, в которых может проявиться эффект индуцированного переходного излучения, могут быть весьма разнообразными (см. [93 — 95]).

Стоит отметить, что с точки зрения эффективности передачи энергии пучка в электромагнитное излучение рассмотренная система не оптимальна, так как сгущения зарядов, возникшие в пучке, сносятся вместе с ним и в дальнейшем не усиливаются. Волна, возвратившись (из-за зеркал), взаимодействует с новыми частицами; она, естественно, вызывает большие сгущения зарядов, так как ее амплитуда возросла. Однако эти сгущения зарядов дальше «не используются».

Другая ситуация возникает, если имеется много границ раздела. Однако спектр излучения здесь существенно видоизменяется из-за интерференции переходного излучения, возникшего на различных границах. Подчеркнем еще раз, что появление частичной когерентности под действием волны не является единственно возможным механизмом индуцированного переходного излучения. Из-за нелинейных эффектов диэлектрическая проницаемость каждой из сред ε_1 и ε_2 становится функцией амплитуды волны, падающей на границу раздела (см. § 3.5), а поэтому и интенсивность переходного излучения может зависеть от интенсивности падающей волны.

*) Легко видеть из (3.364), что для любого симметричного по скоростям (импульсам) распределения ($f_{-p} = f_p$) всегда $\delta k^{(+)} = \delta k^{(-)}$, т. е. для неустойчивости необходимо, грубо говоря, наличие пучка.

6. Интерференция переходного излучения от двух границ. Случай излучения в пластинке уже был рассмотрен в § 3.2, где мы в основном интересовались интерференцией между переходным излучением и излучением В.—Ч. Сейчас мы, имея в виду перейти в дальнейшем к случаю многих границ (гл. 4), рассмотрим область высоких частот, например, когда, с одной стороны, излучение В.—Ч. невозможно, а с другой — коэффициенты отражения от границ малы (область прозрачности), так что многократные отражения излучения от двух границ рассматривать не нужно. Переходное излучение, однако, возникает на обеих границах. Хотя этот случай охватывается общими соотношениями § 3.2, мы здесь рассмотрим простейший случай $\delta\epsilon \ll \epsilon$, используя результаты § 2.4.

Рассмотрим случай, когда вне пластинки (с толщиной d) $\epsilon = \epsilon^{(0)} - \Delta\epsilon/2$, $\mu = 1$, а внутри пластинки $\epsilon = \epsilon^{(0)} + \Delta\epsilon/2$, $\Delta\epsilon \ll \epsilon^{(0)}$. Тогда $\delta\epsilon(z)$ (см. § 2.4, (2.120)) можно записать в виде

$$\delta\epsilon(z) = \int \delta\epsilon_\eta \exp(i\eta z) d\eta = \frac{\Delta\epsilon}{2\pi} \int \frac{d\eta}{i\eta} \{\exp(i\eta z) - \exp[i\eta(z-d)]\} \quad (3.370)$$

или

$$\delta\epsilon_\eta = \frac{\Delta\epsilon}{2\pi i\eta} [1 - \exp(-i\eta d)] \quad (3.371)$$

(границы пластинки расположены при $z=0$ и $z=d$). Приведенные в § 2.4 формулы пригодны для описания поля излучения для произвольного $\delta\epsilon_\eta$. Для получения из них поля переходного излучения при $z > d$ нужно учесть в (2.124) полюс, соответствующий волне, распространяющейся вперед (по движению заряда),

$$\eta = -\omega/v + (\omega/c) \sqrt{\epsilon^{(0)} - \kappa^2 c^2/\omega^2}. \quad (3.372)$$

В области $0 < z < d$ будут присутствовать две волны (по и против скорости заряда), а в области $z < 0$ только одна волна (со знаком минус перед корнем (3.372)). Энергия излучения определяется $|\delta\epsilon_\eta|^2$ и, следовательно, интерференция излучений от двух границ приводит к дополнительному множителю F :

$$\begin{aligned} F &= |1 - \exp(-i\eta d)|^2 = 4 \sin^2(\eta d/2) = \\ &= 4 \sin^2 \left[\frac{\omega d}{2v} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon^{(0)} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right) \right] = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}. \end{aligned} \quad (3.373)$$

В случае, когда квадрат синуса равен 1, фактор $F=4$, т. е. энергия излучения в четыре раза больше, чем от одной границы. Для ультрарелятивистских частиц энергия переходного излучения при влете частицы в среду и вылете частицы из среды одинаковы, при этом

$$F = 4 \sin^2 \left\{ \frac{\omega d}{4c} \left[\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \Theta^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] \right\} = 4 \sin^2 \frac{\pi d}{L_f}, \quad (3.374)$$

где L_t — длина зоны формирования излучения на частоте ω (см. (2.108)). Если $\sin^2(\pi d/L_t) \approx 1$, то $F \approx 4$ и интерференция усиливает излучение (энергия излучения не в два, а в четыре раза больше, чем от одной границы). Если $d \gg L_t$, то значение $\sin^2(\pi d/L_t)$ быстро осциллируют, причем среднее значение равно $1/2$ и $F = 2$. В этом случае можно сказать, что излучение независимо складывается из излучения от передней и задней границ пластинки.

При $\pi d \ll L_t$, т. е. для тонкой пластинки,

$$F \approx \frac{4\pi^2 d^2}{L_t^2} \ll 1; \quad L_t \approx \frac{4\pi c}{\omega [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]}, \quad (3.375)$$

т. е. излучение от тонкой пластинки много меньше суммы излучений от двух границ (каждая из которых находится далеко от другой). Имеем

$$F \approx (\omega^2 d^2 / 4c^2) [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^2. \quad (3.376)$$

Полное излучение ультрарелятивистской частицы будет:

$$W^{tr}(\omega) \approx \frac{q^2 d^2 \omega_{pe}^4 (\Delta N)^2}{4\pi c^3 \omega^2 N_0^2} \int_0^\infty \frac{\theta^2 d\theta^2}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^2}. \quad (3.377)$$

Этот интеграл «расходится» на больших углах (ср. гл. 2). Это приводит к тому, что фактически исчезает характерный для излучения ультрарелятивистских частиц на одной границе (или в толстой пластинке) максимум излучения на частоте $\omega \sim \omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$. Поэтому спектральная плотность энергии излучения начинает падать с частотой уже при $\omega \gtrsim \omega_{pe}$. Излучение оказывается также не сконцентрированным в узком угловом интервале $\theta \sim Mc^2/\mathcal{E}$ около скорости частицы.

Случай многих границ приводит к многократной интерференции излучений и фактически характер излучения существенно видоизменяется — он соответствует переходному рассеянию (гл. 4).

ГЛАВА 4

ПЕРЕХОДНОЕ РАССЕЯНИЕ

§ 4.1. Общие представления о переходном рассеянии. Законы сохранения

1. Введение. На природе переходного рассеяния волны диэлектрической проницаемости на неподвижном («закрепленном») заряде и на переходном рассеянии в более общей постановке задачи мы уже останавливались в гл. 1. Если сам термин «переходное рассеяние» был введен сравнительно недавно, то в частных случаях переходное рассеяние фактически неоднократно рассматривалось и ранее. При этом, однако, не было достаточно ясной физической интерпретации или понимания того, что рассматриваемый эффект имеет отношение к процессам рассеяния. Задача настоящего раздела — выявление не всегда ясных с первого взгляда связей между переходным рассеянием и такими процессами, как резонансное переходное излучение (переходное излучение в периодической среде) и переходное излучение в среде со случайными неоднородностями. При этом мы для удобства отчасти повторим сказанное в § 1.3.

Переходное излучение происходит как при изменении свойств среды в пространстве, так и при изменении свойств среды во времени. Одной из возможных комбинаций является случай, когда диэлектрическая проницаемость меняется и в пространстве, и во времени по синусоидальному закону (1.5) (об излучении частиц в такой среде см. [24, 40, 96, 97]):

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t - \varphi_0); \quad \omega_0 = \omega(\mathbf{k}_0). \quad (4.1)$$

Возможны, разумеется, и другие периодические изменения ε , например, когда на периоде $2\pi/k_0$ величина ε меняется дважды скачком от $\varepsilon^{(0)} - \varepsilon^{(1)}$ до $\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}$ и обратно от $\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}$ до $\varepsilon^{(0)} - \varepsilon^{(1)}$:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} \theta(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t);$$

$$\theta(\psi) = \begin{cases} 1, & 0 < \psi = \mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t < \pi; \\ -1, & -\pi < \psi < 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Такая зависимость соответствует волне, родственной (4.1), но с резкими ступенчатыми фронтами (скачками ϵ). Если при этом отсутствует зависимость от t , т. е. $\omega_0 = 0$, то мы имеем дело со стопкой пластинок.

При движении заряда в таких периодических средах возникает переходное излучение, которое, естественно, отлично от переходного излучения на одной границе раздела. Главные различия состоят в том, что, во-первых, излучение происходит во всем пространстве непрерывно, а не в одной области, локализованной вблизи одной границы раздела; во-вторых, излучение, образующееся вблизи разных границ, когерентно и нужно учитывать интерференцию. Этот эффект интерференции особенно прозрачен для случая стопки пластинок, когда излучения, возникающие на разных резких границах, отличаются друг от друга лишь фазовыми множителями (см. § 3.8). Вместе с тем для случая зависимости ϵ от r и t по синусоидальному закону особенно целесообразно говорить о переходном рассеянии. Ступенчатую же зависимость ϵ всегда можно разложить по синусоидальным гармоникам (4.1) и трактовать такой процесс как переходное рассеяние целого набора синусоидальных волн (4.1).

Как уже было отмечено в гл. 1, при падении волны проницаемости (4.1) даже на покоящийся заряд в его окрестности возникает переменная поляризация и образуется уходящая от заряда волна — продукт переходного рассеяния. Подчеркнем, что такое рассеяние коренным образом отличается от обычного, связанного с колебаниями частицы в поле падающей волны. Достаточно сказать, что переходное рассеяние возникает и для частицы с бесконечной массой $M \rightarrow \infty$. Правда, распространение в среде различных возмущений сопровождается, вообще говоря, как волнами проницаемости типа (4.1), так и волнами электрического поля, которое для частиц с конечной массой M вызывает обычное томсоновское рассеяние. Отделить переходное рассеяние от томсоновского в некоторых случаях (например, для электронов в плазме) не столь просто, поскольку имеет место интерференция обоих типов рассеяния. Эта интерференция, например, для плазменных ленгмюровских волн при их рассеянии на электронах столь существенна (см. гл. 6 и [73]), что меняет порядок величины полного сечения рассеяния.

Здесь мы вначале рассмотрим переходное рассеяние как самостоятельный процесс, учитывая, что в ряде случаев обычное рассеяние оказывается пренебрежимо малым (для очень тяжелых частиц) или вообще отсутствует (например, для обычных акустических волн, которые не сопровождаются волнами электрического поля). Будем сейчас пренебрегать также эффектами пространственной дисперсии среды. Ниже мы коснемся и вопроса о том, как учитывать интерференцию обычного и переходного рассеяния в случае сред с пространственной и частотной дисперсией.

К теории переходного рассеяния можно подойти с двух сторон. Самым непосредственным и прямым путем является подсчет

излучения заряда в среде с диэлектрической проницаемостью (4.1). Однако можно рассмотреть и излучение в среде с волнами проницаемости, имеющими вид «ступеньки» (4.2), и, в частности, для стопки пластинок ($\omega_0 = 0$). В последнем случае не нужно делать новых расчетов, так как переходное излучение на одной границе известно и следует лишь учесть интерференцию излучения от разных границ. Естественно, при этом получится не переходное рассеяние на отдельной синусоидальной волне, но на той их совокупности, на которую раскладывается «ступенчатая» диэлектрическая проницаемость (4.2). В этом смысле любое переходное излучение можно было бы рассматривать как процесс рассеяния (трансформации) возмущения или импульса волны проницаемости с образованием электромагнитных, а в принципе, и других волн. Но по такой причине о переходном рассеянии, наряду с переходным излучением, вероятно, было бы нецелесообразным говорить, если бы не существовало переходного рассеяния на покоящемся («закрепленном») заряде [40]. В этом случае вводить понятие о переходном излучении было бы явной натяжкой, так как нет движущегося заряда и имеет место типичное рассеяние волны проницаемости с ее превращением в электромагнитную волну (см. рис. 3). Сказанное уже отмечалось в гл. 1, но здесь трудно совсем избежать повторений.

Дополнительно отметим, что случай покоящегося заряда может показаться невыделенным, поскольку в другой инерциальной системе отсчета этот заряд будет уже двигаться с постоянной скоростью $v \neq 0$. В этой системе, однако, будет двигаться и среда, в силу чего для решения задач нужно пользоваться электродинамикой движущихся сред. Таким образом, в условиях, когда скорость среды постоянна (не зависит от координат и времени), связанная со средой системы отсчета физически выделена и ее использование наиболее удобно. Ниже, как и раньше, мы будем пользоваться только такой системой отсчета и, соответственно, электродинамикой покоящихся сред. Разумеется, в этой системе отсчета движущийся заряд имеет скорость $v \neq 0$ относительно среды.

Переходное рассеяние на покоящемся заряде происходит только при $\omega_0 \neq 0$ и $k_0 \neq 0$. Если же скорость заряда $v \neq 0$, то излучение электромагнитных волн имеет место уже при $\omega_0 = 0$, $k_0 \neq 0$ (пространственно-периодическая структура) или при $\omega_0 \neq 0$, $k_0 = 0$ (среда, проницаемость которой периодически изменяется только во времени).

В связи с таким различием, задача о переходном рассеянии на покоящемся заряде также в известном смысле выделена, хотя и может, конечно, быть исследована на основе общего решения, справедливого при $\omega_0 \neq 0$, $k_0 \neq 0$ (именно известная нетривиальность предельного перехода от переходного рассеяния на движущемся заряде к такому рассеянию на покоящемся заряде привела к тому, что рассеяние на покоящемся заряде было рассмотрено только в [40]).

2. Законы сохранения при рассеянии. Для покоящейся частицы бесконечно большой массы рассеяние волны (4.1) должно происходить без изменения частоты:

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0), \quad (4.3)$$

где $\omega(\mathbf{k})$ и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор рассеянной волны*). Для движущегося заряда равенство частот рассеянной и рассеиваемой волн имеет место только в системе отсчета, в которой заряд покоится, тогда как в используемой системе отсчета, в которой покоится среда, из-за эффекта Доплера вместо (4.3) имеем

$$\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v} = \omega(\mathbf{k}_0) - \mathbf{k}_0\mathbf{v}. \quad (4.4)$$

Здесь и в дальнейшем $\omega(\mathbf{k}) > 0$ и $\omega(\mathbf{k}_0) > 0$. Волна (4.1) содержит как член с $\exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r})$, так и с $\exp(i\omega_0 t - i\mathbf{k}_0 \mathbf{r})$. Поэтому, строго говоря, помимо (4.4) следует учесть возможность выполнения равенства

$$\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v} = -(\omega(\mathbf{k}_0) - \mathbf{k}_0\mathbf{v}). \quad (4.5)$$

Если (4.4) соответствует процессу излучения волны с частотой $\omega(\mathbf{k})$ и поглощению волны с частотой $\omega(\mathbf{k}_0)$, то процесс (4.5) соответствует одновременному излучению или поглощению двух волн [222]. Действительно, рассмотрим процессы рассеяния с квантовой точки зрения. При квантовом описании вводятся кванты с энергией $\hbar\omega(\mathbf{k})$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$. Используем для процесса поглощения кванта $\hbar\omega(\mathbf{k}_0)$ и излучения кванта $\hbar\omega(\mathbf{k})$ законы сохранения:

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}_0) + \hbar\omega(\mathbf{k}_0) = \mathcal{E}(\mathbf{p}_1) + \hbar\omega(\mathbf{k}), \quad \mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k}, \quad (4.6)$$

где $\mathcal{E}(\mathbf{p}_{0,1})$ и $\mathbf{p}_{0,1}$ — соответственно энергия и импульс частицы в начальном и конечном состояниях. В квазиклассическом приближении

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}_1) = \mathcal{E}(\mathbf{p}_0) + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{p}} = \mathcal{E}(\mathbf{p}_0) + \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}, \quad (4.7)$$

и мы приходим к закону сохранения в форме (4.4). При этом квантовая постоянная сокращается, что свидетельствует об использовании классического приближения. Если же излучаются или поглощаются два кванта, то

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}_0) = \mathcal{E}(\mathbf{p}_1) \pm \hbar\omega(\mathbf{k}_0) \pm \hbar\omega(\mathbf{k}), \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 \pm \hbar\mathbf{k} \pm \hbar\mathbf{k}, \quad (4.8)$$

и аналогичное (4.7) разложение дает закон сохранения (4.5).

Уместно здесь сопоставить эти результаты с законом сохранения при переходном излучении на одной границе раздела (2.284) и при однократном резком скачке ϵ во времени (см. (2.308)). Закон сохранения (2.284) можно получить из (4.4) или (4.5), положив $\omega(\mathbf{k}_0) = 0$, $\mathbf{k}_0 \rightarrow \pm \mathbf{k}_0$ **), причем $-\hbar\mathbf{k}_0$ — это импульс, передаваемый границе раздела сред. Заметим, что по импульсам $-\hbar\mathbf{k}_0$, передаваемым границе (при переходном излучении на одной границе), происходит интегрирование по всем значениям от $-\infty$ до

*) Эффект отдачи при рассеянии существует только при учете квантовых эффектов и конечности массы частицы M .

**) Здесь знак плюс следует использовать в (4.4), а минус — в (4.5).

$+\infty$, так что оба закона сохранения (4.4) и (4.5) соответствуют (2.284). Точно так же закон сохранения (2.308) для переходного излучения при резком изменении ε во времени мы получим из (4.4), положив $\mathbf{k}_0 = 0$, $\omega(\mathbf{k}_0) = \omega_0$ (закон сохранения (4.5) не удовлетворяется, так как для электромагнитных волн $\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v} > 0$). Существование соответствия между законами сохранения при переходном излучении и переходном рассеянии не удивительно, поскольку, как это уже отмечалось, случаи резких скачков (в пространстве или во времени) могут рассматриваться как наложение многих синусоид типа (4.1). Именно поэтому в случае переходного излучения (§ 2.7) энергия излучения получается суммированием (интегрированием) по всем передаваемым импульсам или энергиям.

Законы сохранения (4.4), (4.5) в случае излучения электромагнитных волн ультрарелятивистскими частицами существенно упрощаются. При этом для $\omega \gg \omega_{pe}$, $\theta \ll 1$ левые части (4.4), (4.5) всегда положительны:

$$\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v} \approx (\omega/2) [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2] > 0, \quad (4.9)$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$.

Для ультрарелятивистской частицы $\mathbf{k}_0\mathbf{v} \leq k_0c$, т. е. для $\omega_0 \gg k_0c$ разрешен только процесс (4.4), а для $\omega_0 \ll k_0c$ возможны оба процесса — (4.4) и (4.5). При этом «выбор» процесса (4.4) или (4.5) определяется углом между $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{v}$, поскольку в этом случае (т. е. при $\omega_0 \ll k_0c$)

$$\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v} \approx \mp \mathbf{k}_0\mathbf{v}. \quad (4.10)$$

Если ультрарелятивистская частица распространяется по или против направления волны (4.1), то из (4.5) и (4.4) следует

$$\omega = 2k_0c [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^{-1}. \quad (4.11)$$

При $\omega_0 \ll k_0c$, $\omega_0 \neq 0$ излучение ультрарелятивистской частицы, следовательно, происходит так же, как и на статических неоднородностях с длиной волны $2\pi/k_0$. Такой вывод вполне понятен. Максимальные частицы излучаются при условии $\omega \gg \omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$, $\theta \ll Mc^2/\mathcal{E}$, тогда из (4.11) получаем

$$\omega_{\max} \approx 2k_0c(\mathcal{E}/Mc^2)^2. \quad (4.12)$$

Для $\omega_0 \gg k_0c$ в формуле для излученной частоты (4.11) вместо k_0c фигурирует ω_0 , а максимальная излученная частота равна

$$\omega_{\max} \approx 2\omega_0(\mathcal{E}/Mc^2)^2. \quad (4.13)$$

Особый случай соответствует тому, что волна ω_0 , $\mathbf{k}_0$ является электромагнитной (ω_0 и k_0c — одного порядка или почти равны), но тогда (4.4) совпадает с известным условием томсоновского рассеяния электромагнитных волн. В этом случае максимальная частота отличается от (4.13) в два раза.

§ 4.2. Излучение в периодической среде

Условие резонанса. Рассмотрим последовательность границ раздела (4.2) или какую-то стопку пластинок. На каждой границе возникает переходное излучение, причем волны, порожденные на разных границах, интерферируют между собой. Если излучение от отдельных границ можно считать некогерентным, то мощность излучения заряда (энергия, излученная в единицу времени) будет определяться числом границ, пересекаемых частицей в единицу времени. Переходное рассеяние, напротив, соответствует когерентной интерференции полей, возникающих на различных границах. Условие когерентности (резонанса), как будет видно, совпадает с (4.10). Заметим, что условие резонанса (4.11) может быть также записано в виде

$$L_1 = \frac{4\pi c}{\omega [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]} = \frac{2\pi}{k_0} \equiv 2d_0, \quad (4.14)$$

т. е. длина формирования переходного излучения (2.108) должна быть в точности равна пространственному периоду $2d_0$ модуляции диэлектрической проницаемости. Из этого критерия подбирается частота ω , удовлетворяющая условию резонанса. Физически это объясняется тем, что на длине L_1 набегает фаза поля излучения, равная 2π , и если в этом месте возникает новое излучение из-за следующей «границы», то оно будет как раз в фазе с полем, возникшим на предыдущей границе. Условие (4.14) записано для отдельной синусоидальной волны.

2. Излучение стопки пластинок. Рассмотрим теперь периодическую среду, причем для каждого периода справедливо выражение (4.2) с $\omega_0 = 0$, а плоскости слоев перпендикулярны оси z (рис. 13). Другими словами, положим

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\theta(k_0 z); \quad \theta(k_0 z) = \begin{cases} 1, & 0 < k_0 z < \pi; \\ -1, & -\pi < k_0 z < 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Эту проницаемость можно записать в виде суперпозиции синусоидальных волн проницаемости:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2s+1)} \sin[(2s+1)k_0 z]. \quad (4.16)$$

При движении заряда каждая из синусоидальных волн будет испытывать переходное рассеяние. Ранее (в § 3.8) было рассмотрено переходное излучение одной пластинки. Оказалось, как это и следовало ожидать, что нужно учесть лишь интерференционный множитель F (см. (3.373)–(3.376)), описывающий интерференцию от передней и задней границ пластинки. При наличии пластинок мы должны учесть интерференцию от всех границ. Подсчитав с учетом интерференции переходное излучение S пластинок, мы затем перейдем к пределу $S \rightarrow \infty$, что даст периодическую среду с

диэлектрической проницаемостью (4.15). Мы можем независимо подсчитать переходное рассеяние каждой из парциальных волн в сумме (4.16) и сопоставить результаты. Их соответствие иллюстрирует связь процессов переходного рассеяния с процессами переходного излучения.

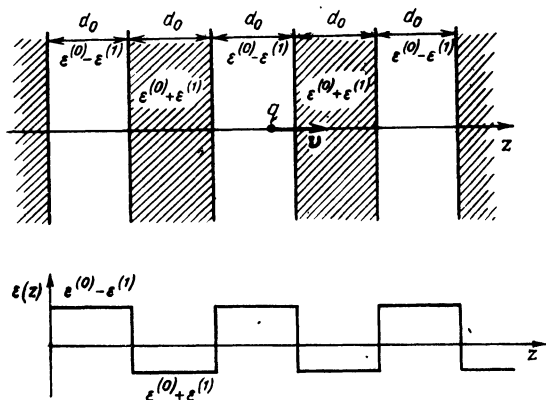


Рис. 13. Прохождение заряда через периодическую среду. На нижней части рисунка изображена зависимость диэлектрической проницаемости среды ϵ от расстояния z .

Интерес к переходному излучению стопки пластинок был связан с проблемой переходных счетчиков. Хотя полная излучаемая энергия при прохождении частицей одной границы раздела и растет с ростом ее энергии (и это могло бы быть использовано для измерения энергии частицы), однако, на отдельной границе, как отмечалось в § 2.2 в среднем излучается менее одного кванта с большой энергией, т. е. необходимо большое число границ для получения одного кванта. Такая оценка справедлива в том случае, если поля излучения от отдельных границ не интерферируют между собой (излучение пропорционально полному числу слоев S). Интерференция излучений, испущенных от отдельных слоев, должна привести к тому, что полная интенсивность на данной частоте будет пропорциональна квадрату числа пластинок S^2 в стопке. Казалось бы, в этом случае суммарная по частотам и углам интенсивность может быть существенно большей, чем в случае отсутствия интерференции. В действительности, однако, суммарная интенсивность меняется не очень существенно. Дело в том, что в результате интерференции подавляются одни частоты и усиливаются другие, которые удовлетворяют резонансным условиям типа (4.4), (4.5). Возникающее излучение, как мы покажем, представляет собой не что иное как переходное рассеяние, но не от синусоидальной волны, а от «волны» (4.15) с крутыми фронтами.

Задачу об излучении частицы в среде с проницаемостью ϵ , описываемой выражениями (4.15), (4.16), можно рассматривать

как предел при $S \rightarrow \infty$ переходного излучения конечной стопки из S чередующихся слоев с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon^{(0)} - \epsilon^{(1)}$ и $\epsilon^{(0)} + \epsilon^{(1)}$. При этом нужно учесть фактор когерентности излучения от отдельных слоев. Толщина слоя равна $d_0 = \pi/k_0$, а полный период модуляции ϵ равен $2\pi/k_0$.

Мощность излучения частицы (считаем ее ультрарелятивистской) от отдельной границы определяется формулой (2.59) (индекс 2 опускаем):

$$W^{\text{tr}}(\omega) = \int_0^\infty W^{\text{tr}}(\omega, \theta) \pi d\theta^2; \quad (4.17)$$

$$W^{\text{tr}}(\omega, \theta) = \frac{q^2 \theta^2}{\pi^2 c} \left[\frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe},1}^2/\omega^2} - \frac{1}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe},2}^2/\omega^2} \right]^2,$$

где следует положить

$$\begin{aligned} \epsilon^{(0)} + \epsilon^{(1)} &= 1 - \omega_{\text{pe},1}^2/\omega^2, & \epsilon^{(0)} - \epsilon^{(1)} &= 1 - \omega_{\text{pe},2}^2/\omega^2, \\ \omega_{\text{pe},1}^2 &= \frac{4\pi e^2}{m_e} \left(N_0 + \frac{\Delta N}{2} \right), & \omega_{\text{pe},2}^2 &= \frac{4\pi e^2}{m_e} \left(N_0 - \frac{\Delta N}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Простоты ради будем считать, что пространство вне стопки заполнено средой с диэлектрической проницаемостью $\epsilon^{(0)} - \epsilon^{(1)}$ (*). Для конечного числа S слоев найдем фактор F , описывающий интерференцию излучений от различных границ. Он определяется набегом фазы излучения за время движения заряда от одной границы к другой [24, 98, 99]. Мощность излучения W_S^{tr} для стопки из S слоев равна

$$W_S^{\text{tr}}(\omega, \theta) = W^{\text{tr}}(\omega, \theta) F_S(\varphi, \varphi'); \quad (4.19)$$

$$F_S(\varphi, \varphi') = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \frac{\sin^2 [(\varphi + \varphi') S/2]}{\sin^2 [(\varphi + \varphi')/2]}.$$

Здесь φ и φ' — набег фаз поля излучения относительно поля частицы на расстоянии d_0 соответственно в слое с $\epsilon = \epsilon^{(0)} + \epsilon^{(1)}$ и в слое с $\epsilon^{(0)} - \epsilon^{(1)}$. Набег фаз φ и φ' определяются соотношением (3.373), причем φ соответствует диэлектрической проницаемости $\epsilon^{(0)} + \epsilon^{(1)}$, а фаза φ' соответствует диэлектрической проницаемости $\epsilon^{(0)} - \epsilon^{(1)}$. Для ультрарелятивистских частиц фазы φ и φ' приблизительно таковы (см. (3.374), $d = d_0 = \pi/k_0$):

$$\begin{aligned} \varphi &= (\pi\omega/2k_0c) [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe},1}^2/\omega^2], \\ \varphi' &= (\pi\omega/2k_0c) [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe},2}^2/\omega^2]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

*) Это предположение фактически не влияет на результат, поскольку вне стопки нет границ и нет излучения, а значение $\epsilon^{(0)} - \epsilon^{(1)}$ близко к единице (полагаем $\omega \gg \omega_{\text{pe},1,2}$).

Первый множитель в факторе (4.19)

$$4 \sin^2(\varphi/2) = |1 - \exp(-i\varphi)|^2 \quad (4.21)$$

совпадает с интерференционным множителем (3.373), описывающим интерференцию от передней и задней границ одного слоя, а второй множитель

$$\frac{\sin^2[(\varphi + \varphi')S/2]}{\sin^2[(\varphi + \varphi')/2]} = \left| \sum_{s=0}^{S-1} \exp[is(\varphi + \varphi')] \right|^2 \quad (4.22)$$

учитывает интерференцию от различных слоев *).

Рассмотрим простейший случай, когда скачок концентрации ΔN мал, т. е. $\Delta N \ll N_0$. Тогда в первом приближении отношение $\Delta N/N_0$ войдет лишь в интенсивность излучения одного слоя $W^{\text{tr}}(\omega, \theta)$ (см. (4.17)), которая будет пропорциональной $(\Delta N/N_0)^2$, тогда как в набегах фаз φ и φ' величиной ΔN можно пренебречь, считая $\varphi \approx \varphi' = \varphi_0$, где

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= (\pi\omega/2k_0c) [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]; \\ \omega_{\text{pe}}^2 &= 4\pi N_0 e^2/m_e. \end{aligned} \quad (4.23)$$

При этом

$$W_S^{\text{r}}(\omega, \theta) = \frac{q^2 \theta^2 \omega_{\text{pe}}^4 (\Delta N)^2 F_S(\varphi_0)}{\pi^2 c \omega^4 N_0^2 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]^4}, \quad (4.24)$$

где

$$F_S(\varphi_0) = 4 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \frac{\sin^2(S\varphi_0)}{\sin^2 \varphi_0}. \quad (4.25)$$

Интерференционный множитель — фактор $F_S(\varphi_0)$ имеет максимумы, которые будут тем ярче выражены, чем больше число слоев S , имеющих в стопке. Максимумы соответствуют значению

$$\varphi_0 = (2s + 1)\pi, \quad (4.26)$$

где $s = 0, 1, 2, \dots$ — целые числа. Фактор $F_S(\varphi_0)$ при этом равен

$$F_{S, \text{max}} = 4S^2. \quad (4.27)$$

Интенсивность излучения в максимуме, действительно, оказывается пропорциональной квадрату числа слоев, что и отражает эффект интерференции излучения отдельных слоев. Коэффициент 4 возникает от интерференции излучения от передней и задней границ одного слоя.

Посмотрим теперь, что означает условие (4.26). Используя (4.23), получаем

$$\omega = \omega_s = \frac{2k_0 c (2s + 1)}{(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2}. \quad (4.28)$$

*) Все это аналогично дифракции на решетке (один фактор отвечает дифракции от одной щели, а другой — интерференции излучений от разных щелей).

Сравнивая (4.28) с (4.11), убеждаемся в том, что частота (4.28) совпадает с выражением для частоты переходного рассеяния на «волне» с $k_{0s} = k_0(2s + 1)$. Именно такие парциальные синусоидальные волны и присутствуют в разложении (4.16) для диэлектрической проницаемости стопки пластинок. С увеличением числа слоев S частоты, не удовлетворяющие (4.28), подавляются и все излучение концентрируется в «линиях», соответствующих резонансным условиям (4.28). Существенным отличием переходного излучения на отдельной границе от переходного рассеяния является отсутствие у первого однозначной связи ω_s с θ^2 и наличие такой связи для переходного рассеяния. Заметим, что при заданной длине периодичности (заданном k_0), вообще говоря, всегда имеется частота, удовлетворяющая указанным условиям резонанса (4.28) (правда, при малых ω_s квадратное уравнение (4.28) для ω_s может и не иметь решений). Однозначная зависимость ω_s от θ меняет и спектральное распределение интенсивности.

Рассмотрим предел $S \rightarrow \infty$ и найдем мощность излучения Q^r в единицу времени ($v \rightarrow c$):

$$Q^r(\omega, \theta) = \frac{W_S^r(\omega, \theta) k_0 c}{2\pi S} = \frac{W_S^r(\omega, \theta) c}{2S d_0}. \quad (4.29)$$

При этом $F_{S, \max}/S \propto S \rightarrow \infty$ при $\omega = \omega_s$, но $F_S/S \rightarrow 0$ при $\omega \neq \omega_s$, что лишь указывает на то, что интерференционный множитель превращается в δ -функцию. Действительно, легко получить

$$\frac{F_S(\varphi_0)}{S} \xrightarrow{S \rightarrow \infty} \frac{4 \sin^2(\varphi_0/2) \sin^2(S\varphi_0)}{S \sin^2 \varphi_0} \rightarrow \sum_{s=0}^{\infty} 4\pi \delta(\varphi_0 - (2s + 1)\pi). \quad (4.30)$$

Следовательно,

$$Q^r(\omega, \theta) = \frac{2q^2 \theta^2 k_0}{\pi^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\Delta N)^2 \omega_{pe}^4}{N_0^2 \omega^4 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^4} \times \\ \times \delta((\omega\pi/2k_0c) [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2] - (2s + 1)\pi) \quad (4.31)$$

и интегральная по частотам мощность уже не зависит от полного числа слоев S . Наличие резонансной δ -функции приводит к частотной зависимости переходного рассеяния, отличной от частотной зависимости переходного излучения. Так, интегрируя (4.31) по углам и используя δ -функции, получаем

$$Q^r(\omega) = \int_0^{\infty} Q^r(\omega, \theta) \pi d\theta^2 = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s^r(\omega) = \\ = \frac{q^2 \omega_{pe}^4 (\Delta N)^2}{N_0^2 \pi^2 c \omega (2k_0 c)^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s + 1)^4} \left\{ \frac{(2s + 1) 2k_0 c}{\omega} - \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right\}. \quad (4.32)$$

Для каждого значения s здесь имеются четкие частотные границы излучения:

$$\omega_{s, \min} < \omega < \omega_{s, \max}, \quad (4.33)$$

которые определяются из требования положительности величины θ_s^2 , фигурирующей в соотношении

$$(\omega/2k_0c) [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta_s^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2] = 2s + 1 \quad (4.34)$$

(это же условие обеспечивает положительность фигурной скобки в (4.32)). Частотные границы $\omega_{s, \max}$ и $\omega_{s, \min}$ существенно зависят от энергии частицы $\mathcal{E}$. Приравнявая нулю θ_s^2 в (4.34), получаем

$$\omega_{s, \max} = \frac{\omega_{pe}}{(2s+1)k_0c/\omega_{pe} \pm \sqrt{(2s+1)^2k_0^2c^2/\omega_{pe}^2 - (Mc^2/\mathcal{E})^2}}. \quad (4.35)$$

Зависимость $\omega_{s, \max}$ и $\omega_{s, \min}$ от $\mathcal{E}$ можно, в принципе, использовать для определения энергии $\mathcal{E}$. Ясно, однако, что в стопке пластинок из-за наложения многих синусоидальных гармоник (разных s) такие эффекты будут смазаны, если вклад дают разные s . В случае одной гармоники $s=0$ интервал частот (4.33) отличен от нуля, только если выполнено условие

$$\mathcal{E}/Mc^2 > \omega_{pe}/k_0c. \quad (4.36)$$

Интегральная по частотам интенсивность излучения равна

$$Q^r = \sum_{s=0}^{\infty} \int_{\omega_{s, \min}}^{\omega_{s, \max}} Q_s(\omega) d\omega = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^2 (\Delta N)^2 \omega_{pe}^4}{\pi^2 c (2k_0c)^2 (2s+1)^4 N_0^2} \times \\ \times \left\{ \frac{2k_0c(2s+1)}{\omega_{pe}} \sqrt{(2s+1)^2 \frac{k_0^2 c^2}{\omega_{pe}^2} - \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2} - \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 \ln \frac{\omega_{s, \max}}{\omega_{s, \min}} \right\}. \quad (4.37)$$

Рассмотрим излучение s -й гармоники (одного члена суммы (4.37)) вблизи порога излучения s -й гармоники, когда $\mathcal{E}$ близко к порогу $\mathcal{E}_{th}^s$; причем

$$\mathcal{E}_{th}^s = Mc^2 \frac{\omega_{pe}}{(2s+1)k_0c}. \quad (4.38)$$

Пусть $(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{th}^s)/\mathcal{E}_{th}^s \ll 1$; тогда

$$Q_s = \frac{q^2 k_0^2 c (\Delta N)^2}{3\pi^2 N_0^2} \left(\frac{\mathcal{E}_{th}^s}{Mc^2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mathcal{E}_{th}^s}{\mathcal{E}} \right)^2 \right] \sqrt{1 - \left(\frac{\mathcal{E}_{th}^s}{\mathcal{E}} \right)^2}. \quad (4.39)$$

Корневая зависимость интенсивности излучения вблизи порога $\mathcal{E}_{th}$ соответствует общим результатам работы [100], касающейся излучения заряженных частиц вблизи порогов процесса *).

*) В данном случае мощность излучения вблизи порога оказывается пропорциональной $[1 - (\mathcal{E}_{th}^s/\mathcal{E})^2]^{3/2}$, что указывает лишь на равенство нулю коэффициента при первом члене разложения, пропорциональном $\sqrt{1 - (\mathcal{E}_{th}^s/\mathcal{E})^2}$.

Рассмотрим случай, когда размер одной пластинки много больше длины зоны формирования переходного излучения на одной границе для частоты порядка $\omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$, т. е. примем, что

$$1 \ll \mathcal{E}/Mc^2 \ll \omega_{pe}/k_0c. \quad (4.40)$$

Тогда в (4.37) вносят вклад только гармоники с $s \gg 1$ и суммирование по гармоникам s может быть заменено интегрированием по $\xi = 2sk_0c\mathcal{E}/(\omega_{pe}Mc^2)$:

$$\begin{aligned} Q^r &= \int_1^\infty \frac{q^2 \omega_{pe} k_0 (\Delta N)^2 \mathcal{E}}{8\pi^2 N_0^2 Mc^2 \xi^4} \left(2\xi \sqrt{\xi^2 - 1} - \ln \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} \right) d\xi = \\ &= \frac{q^2 \omega_{pe} k_0 (\Delta N)^2}{24\pi N_0^2} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \end{aligned} \quad (4.40a)$$

Этот результат соответствует некогерентному суммированию излучения на границах:

$$Q^r = \frac{W^{tr} S}{S\pi/k_0} = \frac{k_0 W^{tr}}{\pi} = \frac{q^2 \omega_{pe} k_0 (\Delta N)^2}{24\pi N_0^2} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (4.41)$$

Здесь мы использовали (2.61).

Экспериментально в [98] была подтверждена частотная зависимость, соответствующая когерентному механизму, т. е. фактически переходному рассеянию, а не переходному излучению. В условиях, когда

$$\omega_{pe}/k_0c \ll \mathcal{E}/Mc^2, \quad (4.42)$$

из (4.37) получаем *)

$$Q^r \approx q^2 \omega_{pe}^2 (\Delta N)^2 / 16c N_0^2. \quad (4.43)$$

Важно, что и в случае, когда слои меньше зоны формирования излучения на частоте $\omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$, излучение при не слишком малых $\Delta N/N_0$ достигает вполне заметной величины. Из сравнения (4.41) и (4.43) видно, что с ростом k_0 полная мощность излучения растет пропорционально k_0 и достигает насыщения при $k_0\mathcal{E}/Mc^2 \approx \omega_{pe}/c$. Хотя в дальнейшем интегральная интенсивность и не растет, меняется спектральный состав и в особенности максимальная излучаемая частота:

$$\omega_{s, \max} \approx 2k_0c(2s+1)(\mathcal{E}/Mc^2)^2. \quad (4.44)$$

Эффект обрыва интенсивности излучения на высоких частотах, сильно зависящий от энергии частиц, мог бы служить для определения энергии. Если ориентироваться на этот эффект, то нужно было бы использовать переходное рассеяние в чистом виде, когда

*) При получении (4.43) из (4.37) учтено, что $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^4} = \frac{\pi^2}{8} = 1,234$.

имеется одна гармоника. Тогда возникает четкий обрыв. Например, для $s = 0$

$$\omega_{0, \max} = 2k_0 c (\mathcal{E} / M c^2)^2. \quad (4.45)$$

Заметим, что при выполнении неравенства (4.42) минимальная частота

$$\omega_{\min} \approx \omega_{\text{pe}}^2 / k_0 c \quad (4.46)$$

от энергии не зависит.

Из (4.37) для $s = 0$ в условиях (4.42) получаем

$$Q_0^r \approx q^2 (\Delta N)^2 \omega_{\text{pe}} / (2\pi^2 c N_0^2), \quad (4.47)$$

что отличается лишь численным коэффициентом $8/\pi^2$ от (4.43)*. Независимость интегральной интенсивности от энергии, при резкой зависимости от нее максимальной излучаемой частоты (см. (4.45)), указывает на то, что основная энергия излучается с частотами, близкими к минимальным (4.46). Поэтому доля энергии, приходящаяся на частоты $\omega \sim \omega_{\max}$, относительно невелика. Согласно (4.32) при $\mathcal{E} / M c^2 \gg \omega_{\text{pe}} / k_0 c$

$$\omega Q_0^r(\omega) |_{\omega \sim \omega_{0, \max}} \approx \frac{q^2 \Delta N^2 \omega_{\text{pe}}}{\pi^2 c N_0^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{M c^2} \right)^2 \frac{\omega_{\text{pe}}^3 (\omega_{0, \max} - \omega)}{(\omega_{0, \max})^3}. \quad (4.48)$$

Считая, что $\omega \sim \omega_{0, \max}$, можно последний сомножитель оценить как $\omega_{\text{pe}}^3 / 2 (\omega_{0, \max})^2$. Длина, на которой будет излучен хотя бы один квант с частотой $\omega \sim \omega_{0, \max}$, находится из условия

$$\omega_{0, \max} Q_0^r(\omega \sim \omega_{0, \max}) L / \hbar \omega_{0, \max} \sim 1, \quad (4.49)$$

что дает

$$L \sim L_0 \left(\frac{N_0}{\Delta N} \right)^2 \left(\frac{2k_0 c}{\omega_{\text{pe}}} \frac{\mathcal{E}}{M c^2} \right)^3; \quad (4.50)$$

$$L_0 = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{pe}}} \frac{\mathcal{E}}{M c^2} \frac{\pi \hbar c}{q^2}. \quad (4.51)$$

Все множители после L_0 в (4.50) много больше единицы в силу (4.42) и условия $\Delta N \ll N_0$. Множитель L_0 соответствует толщине которую надо взять для получения некогерентного излучения одного кванта на многих границах. Итак, детектирование по граничной частоте в переходном рассеянии требует толщин, существенно больших длины L_0 **).

Мы остановились подробно на указанных вопросах не для того, чтобы обсуждать здесь проблему использования переходного излучения и переходного рассеяния для определения энергии ча-

*) Относительная доля всех гармоник с $s > 0$ в полном излучении (4.43) невелика, так как $\pi^2/8 - 1 \approx 0,234$.

**) Этот вывод касается излучения частиц с энергией, много большей порога (4.36). Оценку возможности использования порога (4.36) для определения энергии см. ниже, в § 4.3.

стиц (это не является предметом изложения в настоящей книге), а с тем, чтобы подчеркнуть, что в этих вопросах до сих пор остаются несколько в тени физические аспекты, такие как связи между когерентными и некогерентными процессами, а также связь между переходным излучением и переходным рассеянием. При этом в качественном отношении особенно интересны две возможности: а) период модуляции больше зоны формирования на частоте $\omega_{pe} \mathcal{E} / Mc^2$, б) период меньше этой зоны формирования (случай $2\pi/k_0 \cong (c/\omega_{pe}) \mathcal{E} / Mc^2$).

В первом случае интенсивности излучения суммируются от разных границ независимо или почти независимо. Суммарное излучение является результатом наложения переходных рассеяний от большого числа пространственных гармоник s (см. (4.16)) и основной вклад вносят гармоники с $s \gg 1$. Во втором случае работает чисто переходное рассеяние, т. е. резонансное переходное излучение, основную роль играют малые s и появляются резкие частотные обрывы интенсивности излучения. Этот пример позволил нам также проследить связь между переходным излучением и переходным рассеянием. Для исследования переходного рассеяния как такового естественно обратиться к простейшему случаю синусоидальной модуляции плотности (4.1), учтя не только пространственную, но и временную модуляцию, т. е. рассмотреть волну диэлектрической проницаемости с $\omega_0 \neq 0$ и $\mathbf{k}_0 \neq 0$.

§ 4.3. Общая теория переходного рассеяния на заряде

1. Поле заряда в волне диэлектрической проницаемости. В общем случае при рассмотрении переходного рассеяния ток частицы $\mathbf{j}^q$ можно считать заданным (для заряда — равным (2.11)) и использовать уравнения Максвелла (2.10) с некоторой периодической диэлектрической проницаемостью. При этом удобно все величины раскладывать в полные интегралы Фурье по времени и пространству:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) d\omega d\mathbf{k}, \\ \mathbf{j}^q(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^q \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) d\omega d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.52)$$

и т. д. Для среды с проницаемостью (4.1) связь между индукцией и электрическим полем (простоты ради здесь $\varphi_0 = 0$, сечение рассеяния от φ_0 не зависит) $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ для компонент Фурье принимает вид

$$\mathbf{D}_{\omega, \mathbf{k}} = \epsilon^{(0)}(\omega) \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} + \epsilon^{(1)}(\omega) \frac{1}{2i} (\mathbf{E}_{\omega+\omega_0, \mathbf{k}+\mathbf{k}_0} - \mathbf{E}_{\omega-\omega_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0}). \quad (4.53)$$

Для проницаемости (4.1) величины $\epsilon^{(0)}$ и $\epsilon^{(1)}$ от частоты, разумеется, не зависят, однако в общем случае $\epsilon^{(1)}$ может зависеть как от ω и $\mathbf{k}$, так и от ω_0 и $\mathbf{k}_0$ (см. ниже). Здесь нам существенно подчеркнуть зависимость $\epsilon^{(1)}$ от ω . Поэтому в (4.53) эта зависи-

мость явно выписана. При учете пространственной дисперсии $\varepsilon^{(0)}$ зависит не только от ω , но и от $\mathbf{k}$. Чтобы не усложнять изложение, мы рассмотрим сейчас простейший случай, когда $\varepsilon^{(0)}$ и $\varepsilon^{(1)}$ зависит только от ω . Далее, для (2.11)

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \frac{q\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (4.54)$$

Уравнения (2.10) приобретают тогда вид ($\mu = 1$)

$$[\mathbf{k}\mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}_{\omega, \mathbf{k}} - \frac{4\pi i}{c} \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{\mathbf{q}}, \quad (4.55)$$

$$[\mathbf{k}\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}}.$$

Отсюда с учетом (4.53) получаем

$$\begin{aligned} \left(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \varepsilon^{(0)}(\omega) \frac{\delta_{ij}}{c^2} \right) E_{j, \omega, \mathbf{k}} = \frac{4\pi i q v_i \omega}{(2\pi)^3 c^2} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \\ + \frac{\omega^2}{2ic^2} \varepsilon^{(1)}(\omega) (E_{i, \omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0} - E_{i, \omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0}). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Будем считать, что $|\varepsilon^{(1)}(\omega)| \ll |\varepsilon^{(0)}(\omega)|$, и рассматривать последний член (4.56) как возмущение; тогда при $\varepsilon^{(1)}(\omega) \rightarrow 0$ получим поле равномерно движущегося заряда как сумму поперечного и продольного (по отношению к вектору $\mathbf{k}$) полей:

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{\mathbf{q}, l} + \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{\mathbf{q}, t}, \quad (4.57)$$

$$E_{i, \omega, \mathbf{k}}^{\mathbf{q}, l} = G_{ij}^l(\omega, \mathbf{k}) j_{j, \omega, \mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = -\frac{4\pi i q k_i \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{(2\pi)^3 k^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)}, \quad (4.58)$$

$$E_{i, \omega, \mathbf{k}}^{\mathbf{q}, t} = G_{ij}^t(\omega, \mathbf{k}) j_{j, \omega, \mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \frac{4\pi i q \omega (v_i - k_i \mathbf{k}\mathbf{v}/k^2) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{(2\pi)^3 c^2 (k^2 - \omega^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)/c^2)}. \quad (4.59)$$

Здесь введены функции Грина для продольного ($G_{ij}^l(\omega, \mathbf{k})$) и поперечного ($G_{ij}^t(\omega, \mathbf{k})$) полей. Они равны:

$$G_{ij}^l(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi i k_i k_j}{\omega k^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)}, \quad (4.60)$$

$$G_{ij}^t(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{4\pi i \omega}{c^2 (k^2 - \omega^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)/c^2)}. \quad (4.61)$$

Если рассеянные волны для конкретности считать поперечными, то их поле определится из (4.56) в следующем приближении (подставляем в член, содержащий $\varepsilon^{(1)}(\omega)$, поле (4.57)):

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)}{c^2} \right) \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{\mathbf{r}, t} = \frac{\omega^2 \varepsilon^{(1)}(\omega)}{2c^2 i} \left[\mathbf{E}_{\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0}^{\mathbf{q}} - \right. \\ \left. - \mathbf{E}_{\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0}^{\mathbf{q}} - \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k} \mathbf{E}_{\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0}^{\mathbf{q}}) + \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k} \mathbf{E}_{\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0}^{\mathbf{q}}) \right]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Здесь уместно остановиться на одной особенности членов, входящих в правую часть (4.62), которая в данном случае служит как бы эффективным источником (током), возбуждающим рассеянную волну. Этот ток ортогонален $\mathbf{k}$, и может показаться, что только поперечное поле заряда — поле (4.59) — будет вносить свой вклад в правую часть (4.62). В действительности, однако, в (4.62) входят поля $\mathbf{E}_{\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0}^q$, т. е. индексы l и t в (4.58), (4.59) в данном случае указывают на продольность или поперечность поля по отношению к вектору $\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$, а не $\mathbf{k}$. Поэтому, если только $\mathbf{k}_0 \neq 0$, то нужно учитывать как продольное, так и поперечное поля. Более того, легко видеть, что поперечная компонента (4.59) при $v \rightarrow 0$ стремится к нулю и для покоящегося заряда основным будет продольное поле (4.58). В [97] было учтено только поперечное поле (4.59) и тем самым не учтен эффект, который является единственным для покоящегося заряда. Более того, из сравнения (4.58) и (4.59) легко получить, что продольное поле будет основным и при $v \ll c^2 k / \omega \epsilon^{(0)}(\omega) \sim c / \sqrt{\epsilon^{(0)}(\omega)}$, т. е. при скоростях частиц, много меньших скорости света в среде, а значит, при $\epsilon^{(0)} < 1$, для любых нерелятивистских частиц. Впрочем, это утверждение не очень точно, поскольку при $\mathbf{k}_0 \rightarrow 0$, $v \neq 0$ становится существенным уже поперечное поле (4.59) и, следовательно, оно существенно и при достаточно малых $\mathbf{k}_0$. Строго говоря, вывод о преимущественной роли продольного или поперечного поля может быть получен только при сравнении окончательных выражений для сечений рассеяния. Частоты $\omega \pm \omega_0$ и волновые векторы $\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$ функции Грина $G_{ij}^l(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)$ продольного поля и $G_{ij}^t(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)$ поперечного поля чаще всего не соответствуют волнам, которые могут распространяться в среде, поэтому поля с такими частотами и волновыми векторами называют виртуальными. Рассеяние при учете продольного поля частицы $\mathbf{E}^{q,l}$ часто называют рассеянием через виртуальную продольную волну, а при учете $\mathbf{E}^{q,t}$ — рассеянием через виртуальную поперечную волну.

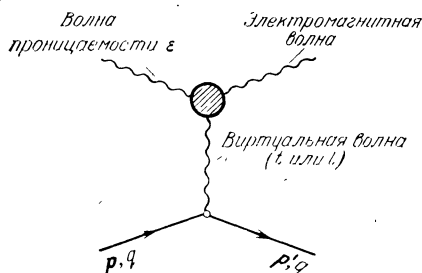


Рис. 14. График процесса переходного рассеяния (p и p' — значения импульса заряженной частицы соответственно до и после рассеяния; в случае переходного рассеяния на частице с $M \rightarrow \infty$ можно всегда считать p' равным p).

Такие названия связываются также с диаграммным изображением переходного рассеяния (рис. 14). Кругок на рис. 14 соответствует взаимодействию трех волн, описываемому вершиной $\epsilon^{(1)}$. Разумеется, при $v = \text{const}$ (масса частицы $M \rightarrow \infty$) импульсы p и p' можно считать одинаковыми.

Ниже мы рассмотрим два предельных случая — случай нерелятивистской частицы, когда основным является рассеяние через виртуальную продольную волну, и случай ультрарелятивистской частицы, когда основным является рассеяние через виртуальную поперечную волну.

2. Переходное рассеяние на покоящемся заряде. Для простоты положим сразу $\mathbf{v} = 0$, тогда частота рассеянной волны равна частоте падающей волны. После подстановки (4.58) в (4.62) нетрудно найти [40] рассеянное поле

$$\mathbf{E}_k^r(t) = \int \mathbf{E}_{\omega, k}^r \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (4.63)$$

Для вычисления мощности излучения удобно воспользоваться тем, что вдали от заряда поле $\mathbf{E}^r$ отделяется от собственного поля заряда и поэтому мощность излучения Q^r будет равна среднему (по времени) изменению энергии W^r поля $\mathbf{E}^r$ в единицу времени:

$$\begin{aligned} Q^r = Q^{\text{sc}} = \frac{dW^r}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \mathbf{E}^r(\mathbf{r}, t) \widehat{\varepsilon}^{(0)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^r(\mathbf{r}, t) + \right. \\ &+ \left. \mathbf{H}^r(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}^r(\mathbf{r}, t) \right\} d\mathbf{r} = 2\pi^2 \int \left\{ \mathbf{E}_{-k}^r(t) \widehat{\varepsilon}^{(0)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_k^r(t) + \right. \\ &+ \left. \mathbf{H}_{-k}^r(t) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_k^r(t) \right\} d\mathbf{k} = \frac{q^2 \omega_0^3}{4\pi c^2} \int \left| \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)} \right|^2 \times \\ &\times \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}_0]^2}{k^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^4} \delta\left(k^2 - \frac{\omega_0^2 \varepsilon^{(0)}(\omega_0)}{c^2}\right) d\mathbf{k}; \quad \widehat{\varepsilon}^{(0)} = \varepsilon^{(0)}\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right). \end{aligned} \quad (4.64)$$

В соответствии со сказанным в § 4.1 мощность излучения обращается в нуль как при $\omega_0 \rightarrow 0$, так и при $k_0 \rightarrow 0$. Напомним, что в общем случае $\varepsilon^{(1)}$ зависит от ω_0 , $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}$ (в данном случае $\omega = \omega_0$). Сечение рассеяния может существенно зависеть от пространственной дисперсии $\varepsilon^{(1)}$. Здесь мы, однако, пренебрежем пространственной дисперсией, полагая $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(1)}(\omega)$. Тогда интегрирование по k^2 и углу θ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$ дает [40]

$$Q^{\text{sc}} = \frac{q^2 \omega_0^2}{8c} \left| \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)} \right|^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}} \left(\frac{1}{\Lambda} \ln \frac{1+\Lambda}{1-\Lambda} - 2 \right); \quad (4.65)$$

$$\Lambda = 2(k/k_0 + k_0/k)^{-1}. \quad (4.66)$$

В предельных случаях имеем

$$Q^{\text{sc}} = \frac{q^2 \omega_0^4 |\varepsilon^{(1)}(\omega_0)|^2 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}}{3c^3 k_0^2 |\varepsilon^{(0)}(0)|^2}, \quad k \ll k_0; \quad (4.67)$$

$$Q^{\text{sc}} = \frac{q^2 c k_0^2 |\varepsilon^{(1)}(\omega_0)|^2}{3 |\varepsilon^{(0)}(0)|^2 (\varepsilon^{(0)}(\omega_0))^{3/2}}, \quad k \gg k_0; \quad (4.68)$$

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}/c. \quad (4.69)$$

Следует отметить, что $k/k_0 = \omega_0 \sqrt{\epsilon^{(0)}(\omega_0)}/k_0 c$, и если $\omega_0/k_0 \ll \ll c/\sqrt{\epsilon^{(0)}(\omega_0)}$, т. е. фазовая скорость волны проницаемости (4.1) много меньше скорости света в среде, то $k \ll k_0$. Для оценки сечения рассеяния можно сравнить (4.67), (4.68) с известной мощностью излучения электрического диполя (осциллятора), находящегося в среде (см., например, [1], гл. 6):

$$Q_p^r = q^2 \omega_0^4 r_0^2 \sqrt{\epsilon^{(0)}(\omega_0)}/3c^3, \quad (4.70)$$

где r_0 — амплитуда колебаний осциллятора (q — заряд, ω_0 — собственная частота). Согласно (4.67) и (4.70)

$$\frac{Q^{sc}}{Q_p^r} = \left| \frac{\epsilon^{(1)}(\omega_0)}{\epsilon^{(0)}(0)} \right|^2 \left(\frac{\lambda_0}{2\pi r_0} \right)^2; \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}. \quad (4.71)$$

Томсоновское рассеяние (рассеяние на свободном заряде) пропорционально q^2 и обратно пропорционально квадрату массы M^2 , поскольку в этом случае

$$r_0 = -\frac{qE_0}{M\omega_0^2}, \quad Q_p^r = Q^T = \frac{q^4 E_0^2 \sqrt{\epsilon^{(0)}(\omega_0)}}{3M^2 c^3}. \quad (4.72)$$

Переходное рассеяние не зависит от массы частицы и имеет место и для тяжелых частиц (а, в принципе, и при $M \rightarrow \infty$). При этом роль амплитуды r_0 играет λ_0 — длина падающей волны. При $\lambda_0 \gg r_0$ переходное рассеяние может намного превосходить томсоновское. Эти выводы, касающиеся переходного рассеяния, особенно важны для плазмы (см. гл. 6), где количественные оценки будут несколько иными из-за эффектов пространственной дисперсии проницаемости. Поскольку рассеяние на покоящемся заряде происходит без изменения частоты ($\omega = \omega_0$), то для низкочастотных волн диэлектрической проницаемости рассеяние возможно только в том случае, если частота ω_0 лежит в окне прозрачности среды для электромагнитных волн. Возможно также переходное рассеяние с образованием любых других типов волн (с частотой ω_0), которые способны распространяться в среде.

3. Переходное рассеяние на ультрарелятивистском заряде. Рассмотрим теперь переходное рассеяние для ультрарелятивистской частицы. Основным в данном случае будет рассеяние через виртуальную поперечную волну, т. е. для расчета поля рассеяния необходимо в правую часть (4.62) подставить поле (4.59). Расчет, аналогичный тому, который был приведен выше для покоящегося заряда, дает

$$Q^{sc} = \frac{q^2}{4\pi c^6} \int \frac{|\epsilon^{(1)}(\omega)|^2 |\omega|^3 ((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}) \mathbf{w}^2}{|(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 - ((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v})^2 \epsilon^{(0)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}/c^2|^2} \times \\ \times \delta(k^2 - \omega^2 \epsilon^{(0)}(\omega)/c^2) \delta(\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}) d\omega d\mathbf{k}, \quad (4.73)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})/k^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{v})/(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 + \\ + \mathbf{k}(\mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0))((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{v})/k^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2. \quad (4.74)$$

Если $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{v}$ параллельны, то

$$\mathbf{w}^2 = [\mathbf{k}\mathbf{v}]^2 \frac{(\mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0))^2}{k^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^4}. \quad (4.75)$$

Рассмотрим вначале случай $\omega_0 = 0$ и $\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$, т. е. рассеяние на неподвижной периодической решетке диэлектрической проницаемости. Для ультрарелятивистских частиц имеет смысл рассматривать область высоких частот, когда можно пользоваться плазменной формулой $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$. Тогда, считая концентрацию N промодулированной, имеем

$$N = N_0 + (\Delta N/2) \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r}); \quad (4.76)$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon^{(0)}(\omega) + \epsilon^{(1)}(\omega) \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r});$$

$$\epsilon^{(0)}(\omega) = 1 - 4\pi N_0 e^2 / m_e \omega^2 \equiv 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2, \quad \epsilon^{(1)}(\omega) = -2\pi \Delta N e^2 / m_e \omega^2. \quad (4.77)$$

Далее из (4.73) получаем

$$Q^{sc} = \frac{q^2 \omega_{pe}^4 (\Delta N)^2}{16\pi c^6 N_0^2} \int \frac{|\omega| [\mathbf{k}\mathbf{v}]^2 (\mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0))^2}{(k_0^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2 k^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^4} \times \\ \times \delta(k^2 - \omega^2 \epsilon^{(0)}(\omega)/c^2) \delta(\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}) d\omega d\mathbf{k}. \quad (4.78)$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{v}$ параллельно $\mathbf{k}_0$.

Для ультрарелятивистских частиц $k \approx \omega/c \approx 2k_0 (\mathcal{E}/Mc^2)^2 \gg k_0$ (см. (4.12)) и, кроме того, угол θ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$, а следовательно, и угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$ малы (т. е. $\theta^2 \ll 1$). Это позволяет сразу упростить выражение (4.78):

$$Q^{sc} = \frac{q^2 \omega_{pe}^4 (\Delta N)^2}{32c (2k_0 c)^2 N_0^2} \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \int_0^\infty d\omega \delta\left(\frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 + \theta^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right] - k_0 v\right) = \\ = \frac{q^2 \omega_{pe}^4 (\Delta N)^2}{16c (2k_0 c)^2 N_0^2} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{1}{\omega} \left[\frac{2k_0 c}{\omega} - \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right] d\omega. \quad (4.79)$$

Сравнивая этот результат с членом $s=0$ в (4.32), мы видим, что выражение (4.79) отличается от (4.32) на множитель $(4/\pi)^2$, как это и должно быть согласно разложению (4.16). Этим проверяется идентичность резонансного переходного излучения движущегося заряда с переходным рассеянием.

Приведенные выше формулы справедливы, строго говоря, для статических неоднородностей ($\omega_0 = 0$). Однако с хорошей точностью они могут быть использованы для медленно движущихся волн диэлектрической проницаемости, которые зависят от времени. Скорость волны при этом должна быть достаточно малой:

$$\omega_0/k_0 \ll c. \quad (4.80)$$

Рассмотрим теперь переходное рассеяние ультрарелятивистских частиц на волнах диэлектрической проницаемости, имеющих сверхсветовые скорости, т. е. будем считать выполненным неравенство, обратное (4.80). Считая, что в законе сохранения (4.4) $\omega_0 \gg k_0 v$, получаем (см. 4.9))

$$\omega [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2] = 2\omega_0, \quad (4.81)$$

а из условия $\theta^2 > 0$ находим

$$\omega_{\min}^{\max} = \frac{\omega_{pe}}{\omega_0/\omega_{pe} \mp \sqrt{(\omega_0/\omega_{pe})^2 - (Mc^2/\mathcal{E})^2}}. \quad (4.82)$$

Для интенсивности излучения получаем

$$Q^{sc} = \frac{q^2 \omega_{pe}^4 (\Delta N)^2}{16\pi c^2 N_0^2} \int \frac{|\omega| |\mathbf{k} \mathbf{v}|^2}{k^2 (\omega_0^2 - 2\omega\omega_0)^2} \times \\ \times \delta(k^2 - \omega^2 \epsilon^{(0)}(\omega)/c^2) \delta(\omega - \omega_0 - \mathbf{k} \mathbf{v}) d\omega d\mathbf{k}. \quad (4.83)$$

Если $\omega_0 \ll \omega_{pe}$, то минимальная излучаемая частота равна $\omega_{\min} = \omega_{pe}^2/\omega_0 \gg \omega_0$, и следовательно, во всей области излучения выполнено условие $\omega \gg \omega_0$. Рассмотрим этот случай подробнее. Из (4.83) получаем

$$Q^{sc} = \frac{q^2 \omega_{pe}^4 (\Delta N)^2}{16\pi c^2 N_0^2 \omega_{\min}^2} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{1}{\omega} \left[\frac{2\omega_0}{\omega} - \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] d\omega = \\ = \frac{q^2 \omega_{pe}^4 (\Delta N)^2}{8c^2 \omega_0^2 N_0^2} \left[\frac{\omega_0}{\omega_{pe}} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega_{pe}} \right)^2 - \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right) \ln \frac{\omega_0/\omega_{pe} + \sqrt{(\omega_0/\omega_{pe})^2 - (Mc^2/\mathcal{E})^2}}{\omega_0/\omega_{pe} - \sqrt{(\omega_0/\omega_{pe})^2 - (Mc^2/\mathcal{E})^2}} \right]. \quad (4.84)$$

Вблизи порога $|\mathcal{E}_{th} - \mathcal{E}| \ll \mathcal{E}_{th} = Mc^2 \omega_{pe}/\omega_0$ и мощность излучения стремится к нулю по закону

$$Q^{sc} \propto (\mathcal{E} - \mathcal{E}_{th})^{3/2} \quad (4.85)$$

аналогично случаю статических неоднородностей, когда $\mathcal{E}_{th} = Mc^2 \omega_{pe}/k_0 c$.

4. Переходное рассеяние в средах с пространственной дисперсией. В средах с пространственной дисперсией теория переходного рассеяния строится аналогично тому, как это было сделано в п. 1 настоящего параграфа. Отличие заключалось лишь в конкретных зависимостях $\epsilon^{(0)}$ и $\epsilon^{(1)}$ от ω , $\mathbf{k}$, ω_0 и $\mathbf{k}_0$ в средах с пространственной дисперсией. Что касается $\epsilon^{(0)}$, то необходимо в уравнениях Максвелла заменить эту величину на тензор $\epsilon_{ij}^{(0)}(\omega, \mathbf{k})$.

В случае изотропной среды

$$\varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^t(\omega, k)(\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) + \varepsilon^l(\omega, k) k_i k_j / k^2. \quad (4.86)$$

Таким образом, видоизменение будет состоять в том, что в формулах для функций Грина нужно $\varepsilon^{(0)}(\omega)$ заменить на $\varepsilon^t(\omega, k)$ — в (4.61) и соответственно на $\varepsilon^l(\omega, k)$ — в (4.60). В формулы рассеяния входит $\varepsilon^{(0)}(\omega - \omega_0)$ (см. (4.73)). Нужно заменить эту величину в случае, если рассеяние происходит через виртуальную продольную волну (на медленном нерелятивистском заряде) на $\varepsilon^l(\omega - \omega_0, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)$, а если рассеяние происходит через виртуальную поперечную волну (на ультрарелятивистском заряде) — на $\varepsilon^t(\omega - \omega_0, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)$. Так, в (4.64) войдет $\varepsilon^l(\omega - \omega_0, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)$, а в (4.73) $\varepsilon^t(\omega - \omega_0, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)$.

Далее, величины $\varepsilon^{(1)}(\omega)$ (см. (4.56)) в средах с пространственной дисперсией нужно заменить в общем случае на некоторые тензорные величины $\varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}, \omega_0, \mathbf{k}_0)$. Конкретные выражения для них можно найти, если известны нелинейные токи плазмы (3.191) или (3.198). В первом приближении можно учесть лишь нелинейные токи низшего порядка по амплитудам волн:

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{n1} = \int S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) E_{l,\omega_1,\mathbf{k}_1} E_{j,\omega-\omega_1,\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} d\omega_1 d\mathbf{k}_1; \quad (4.87)$$

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{n1} = \int S'_{ij}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) \delta N_{\omega_1,\mathbf{k}_1} E_{j,\omega-\omega_1,\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} d\omega_1 d\mathbf{k}_1. \quad (4.88)$$

При получении (4.87) нелинейный ток раскладывается по напряжениям полей, а все остальные вариации параметров среды при наличии полей выражаются через напряженности $\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}$. При получении (4.88) ток раскладывается как по вариациям плотности среды δN , так и по напряженности поля. В первом приближении нелинейный ток содержит выписанный член (4.88), который линеен по δN и $\mathbf{E}$. Выражением (4.88) иногда пользоваться удобнее, чем (4.87), если речь идет о волнах концентрации (например, акустических волнах). В ряде случаев (например, в плазме) вариации плотности и других параметров в волне выражаются через напряженность поля волны. Тогда из (4.88) можно получить (4.87) и наоборот. Поле (или плотность) рассеиваемой волны обозначим через $\mathbf{E}_{\omega_0,\mathbf{k}_0}^{(0)}$ (или $\delta N_{\omega_0,\mathbf{k}_0}^{(0)}$). Линейные по этим величинам плотности токов (4.87), (4.88) равны

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{n1} = 2 \int S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) E_{l,\omega_0,\mathbf{k}_0}^{(0)} E_{j,\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} d\omega_0 d\mathbf{k}_0, \quad (4.89)$$

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{n1} = \int S'_{ij}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \delta N_{\omega_0,\mathbf{k}_0}^{(0)} E_{j,\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (4.90)$$

В (4.89) мы учли симметрию коэффициентов нелинейных токов S_{ijl} (см. § 3.5). Считая в соответствии с (4.1), что поле рассеива-

емой волны является синусоидальным, получаем

$$E_{l,\omega,\mathbf{k}}^{(0)} = (E_l^{(0)}/2i) [\delta(\omega - \omega_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - \delta(\omega + \omega_0) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)], \quad (4.91)$$

$$\delta N_{\omega,\mathbf{k}}^{(0)} = (\delta N^{(0)}/2i) [\delta(\omega - \omega_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - \delta(\omega + \omega_0) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)]. \quad (4.92)$$

Подставив (4.91), (4.92) в (4.89), (4.90), получаем

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{n1} = -iE_l^{(0)} [S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) E_{j,\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} - S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) E_{j,\omega+\omega_0,\mathbf{k}+\mathbf{k}_0}], \quad (4.93)$$

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{n1} = (\delta N^{(0)}/2i) [S'_{ij}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) E_{j,\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} - S'_{ij}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) E_{j,\omega+\omega_0,\mathbf{k}+\mathbf{k}_0}]. \quad (4.94)$$

Из сравнения с (4.53) имеем

$$\varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = (8\pi/\omega) S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) E_l^{(0)}, \quad (4.95)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = (4\pi/\omega) S'_{ij}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \delta N^{(0)}. \quad (4.96)$$

Отсюда видно, что для нахождения $\varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$ достаточно использовать выражения для нелинейных откликов среды S_{ijl} и S'_{ij} , которые иногда хорошо известны (см. § 3.5 и гл. 6, где приведены значения этих тензоров для плазмы).

Наконец, следует указать, как тензор $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ входит в вероятность переходного рассеяния. Из вывода, приведенного в п. 1 настоящего параграфа, видно, что индекс j должен быть свернут с продольным единичным вектором $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)/|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|$, если рассеяние происходит через продольную волну или с поперечным тензором $\delta_{ij} - (k_i - k_{0,i})(k_j - k_{0,j})/(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2$, если рассеяние происходит через поперечную волну. Индекс i в $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ свертывается с нормальным единичным вектором поляризации излучаемой (рассеянной) волны. Фактически все эти правила непосредственно следуют из приведенных в пп. 1—3 настоящего параграфа выводов формул для переходного рассеяния.

§ 4.4. Переходное рассеяние на электрических и магнитных диполях

Переходное рассеяние, естественно, возможно не только на зарядах, но и на электрических и магнитных диполях, сгустках зарядов, токах и др. «рассеивателях». Рассмотрим здесь несколько наиболее простых задач.

1. Переходное рассеяние на покоящемся электрическом диполе. Поле, создаваемое покоящимся зарядом (пространственной дисперсией пренебрегаем), равно

$$E_{i,\omega,\mathbf{k}}^q(\mathbf{r}_q) = -\frac{4\pi i q k_i}{k^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)} \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}_q), \quad (4.97)$$

где $\mathbf{r}_q$ — координата заряда. Для двух зарядов противоположного знака

$$\begin{aligned} E_{i,\omega,\mathbf{k}}^{\mathbf{p}} &= E_{i,\omega,\mathbf{k}}^q(\mathbf{r}_q) + E_{i,\omega,\mathbf{k}}^{-q}(\mathbf{r}_{-q}) = \\ &= - (4\pi i q k_i / k^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)) [\exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}_q) - \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}_{-q})] \approx \\ &\approx 4\pi k_i (\mathbf{p} \mathbf{k}) \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}_q) / k^2 \varepsilon^{(0)}(\omega); \quad \mathbf{p} = q(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{-q}). \end{aligned} \quad (4.98)$$

Здесь мы положили $|\mathbf{k} \mathbf{r}_q - \mathbf{k} \mathbf{r}_{-q}| \ll 1$.

Для получения интенсивности рассеяния на электрическом диполе нужно поле (4.98) подставить в правую часть уравнения (4.62), что дает эффективный ток, возбуждающий рассеянную волну,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}^{\mathbf{p}} &= - \frac{\omega \varepsilon^{(1)}(\omega)}{8\pi} \left\{ \frac{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)((\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \mathbf{p})}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2 \varepsilon^{(0)}(\omega + \omega_0)} - \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{p})}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 \varepsilon^{(0)}(\omega - \omega_0)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0))((\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \mathbf{p})}{k^2(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2 \varepsilon^{(0)}(\omega + \omega_0)} + \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0))((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{p})}{k^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 \varepsilon^{(0)}(\omega - \omega_0)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Мощность рассеяния найдется так же, как и для заряда (см. (4.64)). Она получится из (4.64) заменой

$$q^2 \rightarrow (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{p})^2. \quad (4.100)$$

Интегрируя по k^2 и вводя угол θ_0 между дипольным моментом $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}_0$, получим мощность переходного рассеяния в виде

$$Q^{\mathbf{p}} = \int_0^\pi Q^{\mathbf{p}}(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (4.101)$$

где $Q^{\mathbf{p}}(\theta)$ — мощность излучения на единичный телесный угол:

$$\begin{aligned} Q^{\mathbf{p}}(\theta) &= \frac{\omega_0^2 k_0^2 \mathbf{p}^2 \sin^2 \theta}{8\pi c \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}} \left| \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)} \right|^2 \times \\ &\times \left[\left(\cos \theta - \frac{k_0 c}{\omega_0 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}} \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{-2} \left[\left(\cos \theta - \frac{k_0 c}{\omega_0 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}} \right)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos^2 \theta_0 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 \right]. \end{aligned} \quad (4.102)$$

В случае, когда фазовая скорость волны поляризации ω_0/k_0 много меньше скорости света в среде $c/\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}$, получаем

$$Q^{\mathbf{p}}(\theta) \approx \frac{\omega_0^4 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)} \mathbf{p}^2 \cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta \left| \varepsilon^{(1)}(\omega_0) \right|^2}{8\pi c^3 \left| \varepsilon^{(0)}(0) \right|^2} \quad (4.103)$$

и

$$Q^{\mathbf{p}} = \int_0^\pi Q^{\mathbf{p}}(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{\omega_0^4 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)} \mathbf{p}^2 \cos^2 \theta_0 \left| \varepsilon^{(1)}(\omega_0) \right|^2}{3c^3 \left| \varepsilon^{(0)}(\omega_0) \right|^2}. \quad (4.104)$$

В противоположных условиях $ck_0/\omega_0\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)} \ll 1$, имеем

$$Q^p(\theta) = \frac{\omega_0^2 \mathbf{p}_0^2 \sin^2 \theta}{8\pi c \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}} \left| \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)} \right|^2 \left(\cos^2 \theta \cos^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 \right) \quad (4.105)$$

и

$$Q^p = \frac{\omega_0^2 \mathbf{p}_0^2 k_0^2}{6c \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}} \left| \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)} \right|^2. \quad (4.106)$$

Эффект рассеяния постоянным электрическим полем (например, в бесконечном плоском конденсаторе) будет нулевым. Однако в пространственно неоднородном статическом макроскопическом поле рассеяние происходит. Допустим, например, что электрическое поле $\mathbf{E}_0$ в среде с $\varepsilon = \varepsilon^{(0)}(\omega)$ сконцентрировано в некоторой области объема V (радиус a , длина l и, следовательно, $V = \pi a^2 l$; поле $\mathbf{E}_0$ направлено по оси стержня). Такой стержень в известном приближении обладает статическим дипольным моментом

$$\mathbf{p}_0 = \frac{\varepsilon^{(0)}(0) - 1}{4\pi} V \mathbf{E}_0, \quad (4.107)$$

а при прохождении волны приобретает и переменный момент

$$\mathbf{p} = \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0) V \mathbf{E}_0}{4\pi} \cos \omega_0 t = \mathbf{p}_1 \cos \omega_0 t \quad (4.108a)$$

(считаем, что длина волны поляризации $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ много больше a). Очевидно, что средняя по времени интенсивность возникающего электромагнитного излучения частоты ω_0 , если $\lambda \gg a$ (дипольное приближение), равна (см. (4.70))

$$Q^r(\theta) = \frac{p_1^2 \omega_0^4 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}}{8\pi c^3} \sin^2 \theta \quad (4.108b)$$

и

$$Q^r = \int_0^\pi Q^r(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{(\varepsilon^{(1)}(\omega_0))^2 V^2 \omega_0^4 E_0^2 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}}{48\pi^2 c^3}. \quad (4.109)$$

Такой же результат по порядку величины получится из (4.103), если в (4.103) положить $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$. В акустических волнах $\varepsilon^{(1)} \ll \varepsilon^{(0)}$, но в ударных $\varepsilon^{(1)} \sim \varepsilon^{(0)}$ и можно получить заметное рассеяние.

2. Переходное рассеяние на покоящемся магнитном диполе. Ток, создаваемый статическим магнитным диполем $\mathbf{m}$, равен

$$\mathbf{j}^m = c \operatorname{rot} \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}), \quad (4.110)$$

причем

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^m = ic [\mathbf{k} \mathbf{m}] \delta(\omega)/(2\pi)^3. \quad (4.111)$$

Если считать, что магнитная проницаемость $\mu = 1$, то переходное рассеяние на магнитном моменте отсутствует. Действительно, в § 4.3 при расчетах переходного рассеяния учитывалась только волна диэлектрической проницаемости. В этом случае для возникновения рассеяния нужно, чтобы источник создавал электрическое поле (член с $\varepsilon^{(1)}$ в правой части (4.56) является источником рассеянной волны). Поэтому статические магнитные моменты рассеивают лишь волны магнитной проницаемости. Положим

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)}(\omega), \quad (4.112)$$

$$\mu = \mu^{(0)} + \mu^{(1)} \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t - \varphi_0). \quad (4.113)$$

Тогда уравнения Максвелла запишутся следующим образом:

$$[\mathbf{k} \mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}}] = -\omega \varepsilon^{(0)}(\omega) \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}/c - 4\pi \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(m)} i/c^2, \quad (4.114)$$

$$[\mathbf{k} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}] = \omega \mathbf{B}_{\omega, \mathbf{k}}/c = \omega \mu^{(0)} \mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}}/c + \\ + (\omega \mu^{(1)}/2ic) (\mathbf{H}_{\omega+\omega_0, \mathbf{k}+\mathbf{k}_0} - \mathbf{H}_{\omega-\omega_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0}). \quad (4.115)$$

Удобнее в данном случае написать уравнение для $\mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}}$, исключив $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$ при помощи уравнения (4.114):

$$(k^2 - \omega^2 \varepsilon^{(0)}(\omega) \mu^{(0)}/c^2) \mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}} = (4\pi i/c^2) [\mathbf{k} \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(m)}] + \\ + (\omega^2 \varepsilon^{(0)}(\omega) \mu^{(1)}/2c^2 i) (\mathbf{H}_{\omega+\omega_0, \mathbf{k}+\mathbf{k}_0} - \mathbf{H}_{\omega-\omega_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0}). \quad (4.116)$$

Это уравнение аналогично (4.56). Однако в силу приближенной поперечности $\mathbf{H}$ (в однородной среде при $\mu = \mu^{(0)}$ $\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mu^{(0)} \mathbf{H}$) в левой части (4.116) по сравнению с левой частью (4.56) отсутствует член $-k_i k_j$. Следовательно, обратный оператор (функция Грина) всегда поперечный (см. (4.61)) и переходное рассеяние всегда идет через виртуальную поперечную волну.

Статическое магнитное поле магнитного диполя равно (см. § 3.6, формулы (3.242) — (3.247))

$$\mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}}^{(m)} = \frac{4\pi i [\mathbf{k} \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(m)}]}{ck^2} = -\frac{4\pi [\mathbf{k} [\mathbf{k} \mathbf{m}]]}{k^2 (2\pi)^3} \delta(\omega). \quad (4.117)$$

Это поле нужно подставить в правую часть (4.116), чтобы получить поле излучения:

$$\mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}}^r = -\frac{2\pi \varepsilon^{(0)}(\omega) \mu^{(1)}}{(2\pi)^3 i c^2 (k^2 - \omega^2 \varepsilon^{(0)}(\omega) \mu^{(0)}/c^2)} \times \\ \times \left\{ \frac{[(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) [(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \mathbf{m}]]}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2} \delta(\omega + \omega_0) - \frac{[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) [(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{m}]]}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \delta(\omega - \omega_0) \right\}. \quad (4.118)$$

Мощность излучения найдется аналогично (4.64):

$$Q^r = \widetilde{Q}^{\text{sc}} = \frac{dW^r}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \mathbf{E}^r(\mathbf{r}, t) \widehat{\varepsilon}^{(0)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^r(\mathbf{r}, t) + \right. \\ \left. + \mathbf{H}^r(\mathbf{r}, t) \mu^{(0)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}^r(\mathbf{r}, t) \right\} d\mathbf{r}. \quad (4.119)$$

Получаем, подставляя (4.118) в (4.119),

$$Q^{\text{sc}} = \frac{\omega_0^3}{4\pi c^2} |\mu^{(1)\varepsilon(0)}(\omega_0)|^2 \int \delta\left(k^2 - \omega_0^2 \varepsilon^{(0)}(\omega_0) \frac{\mu^{(0)}}{c^2}\right) \times \\ \times \frac{\{[\mathbf{k}\mathbf{k}_0](\mathbf{m}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)) - [\mathbf{k}\mathbf{m}](\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2\}^2}{k^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^4} d\mathbf{k}. \quad (4.120)$$

Вводя $Q^{\text{sc}}(\theta)$ — угловое распределение излучения (θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$, θ_0 — угол между $\mathbf{m}$ и $\mathbf{k}_0$), получаем

$$Q^{\text{sc}} = \int_0^\pi Q^{\text{r}}(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (4.121)$$

$$Q^{\text{sc}}(\theta) = \\ = \frac{\omega_0 (\varepsilon^{(0)}(\omega_0))^{3/2} |\mu^{(1)}|^2 m^2}{8\pi c \sqrt{\mu^{(0)}} [(\cos \theta - k_0 c / (\omega_0 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0) \mu^{(0)}}))^2 + \sin^2 \theta]^2} \{k_0^2 \sin^2 \theta \times \\ \times [(\cos \theta - k_0 c / (\omega_0 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0) \mu^{(0)}}))^2 \cos^2 \theta_0 + 1/2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0] - \\ - (k_0 \omega_0 / c) \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0) \mu^{(0)}} \sin^2 \theta [(\cos \theta - k_0 c / (\omega_0 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0) \mu^{(0)}}))^2 + \\ + \sin^2 \theta] [2 \cos^2 \theta_0 (\cos \theta - k_0 c / (\omega_0 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0) \mu^{(0)}})) - \\ - \sin^2 \theta_0 \cos \theta] + (\omega_0^2 \varepsilon^{(0)}(\omega_0) \mu^{(0)} / c^2) (1 - \cos^2 \theta \cos^2 \theta_0 - \\ - 1/2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0) [(\cos \theta - k_0 c / (\omega_0 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0) \mu^{(0)}}))^2 + \sin^2 \theta]^2\}. \quad (4.122)$$

Только первый член в фигурных скобках аналогичен такому же члену в переходном рассеянии электрических диполей. Последующие члены в фигурных скобках (4.122) обязаны своим происхождением замкнутости токов, образующих магнитный диполь (член с $\delta(\mathbf{r})$ в (3.246)). Наличие этих членов указывает на различия между эффектом переходного излучения для магнитного диполя, составленного из двух магнитных зарядов, и магнитного диполя, образованного токами. Эти члены существенно меняют переходное рассеяние магнитных диполей. Так, при $\omega_0 \ll k_0 c / \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0) \mu^{(0)}}$ получаем

$$Q^{\text{sc}}(\theta) = \frac{\omega_0^4 (\varepsilon^{(0)}(\omega_0))^{5/2} \sqrt{\mu^{(0)}} |\mu^{(1)}|^2 m^2}{8\pi c^3} \times \\ \times [3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta_0 + 1 - \cos^2 \theta \cos^2 \theta_0 - 1/2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0], \quad (4.123)$$

и отсюда

$$Q^{\text{sc}} = \int_0^\pi Q^{\text{sc}}(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \\ = 4/3 (\omega_0^4 / c^3) (\varepsilon^{(0)}(\omega_0))^{5/2} \sqrt{\mu^{(0)}} |\mu^{(1)}|^2 m^2 (1 - 3/4 \sin^2 \theta_0). \quad (4.124)$$

При сравнении с переходным рассеянием магнитного диполя

$\mathbf{m}'$, составленного из двух магнитных зарядов (оно может быть получено из формул рассеяния электрического диполя при заменах $\varepsilon \rightleftharpoons \mu$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$), видно различие в зависимости мощности рассеяния от $\sin \theta_0$.

В случае $\omega_0 \gg ck_0/\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}\mu^{(0)}$ получаем из (4.122)

$$Q^{\text{sc}}(\theta) = \frac{\omega_0^4}{8\pi c^3} (\varepsilon^{(0)}(\omega_0))^{5/2} \sqrt{\mu^{(0)}} |\mu^{(1)}|^2 m^2 \times \\ \times (1 - \cos^2 \theta \cos^2 \theta_0 - 1/2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0) \quad (4.125)$$

и, следовательно,

$$Q^{\text{sc}} = \int_0^\pi Q^{\text{sc}}(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{\omega_0^4}{3c^3} (\varepsilon^{(0)}(\omega_0))^{5/2} \sqrt{\mu^{(0)}} |\mu^{(1)}|^2 m^2. \quad (4.126)$$

§ 4.5. Переходное рассеяние зарядов в средах со случайными неоднородностями

1. Введение. Излучение зарядов в среде со случайными неоднородностями плотности. Процессам распространения электромагнитных волн и изучения частиц в средах со случайными неоднородностями посвящена обширная литература (см., например, [29] и цитированную там литературу, а также [101]). Несмотря на это, в существующей литературе мало обращалось внимания на то, что фактически специфические особенности излучения зарядов в средах со случайными неоднородностями в основном связаны как раз с процессами переходного рассеяния.

Рассмотрим здесь только случай неоднородной концентрации (о рассеянии на случайных неоднородностях магнитных полей в плазме см. гл. 6). Обычно статистические свойства неоднородностей концентрации описываются спектром флуктуаций

$$\delta N = N - \langle N \rangle = \int \delta N_{\omega_0, \mathbf{k}_0} \exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}) d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (4.127)$$

В случае в среднем однородной и в среднем стационарной среды

$$\langle \delta N_{\omega_0, \mathbf{k}_0} \delta N'_{\omega'_0, \mathbf{k}'_0} \rangle = |\delta N|_{\omega_0, \mathbf{k}_0}^2 \delta(\omega_0 + \omega'_0) \delta(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}'_0), \quad (4.128a)$$

$$\frac{\langle (\delta N)^2 \rangle}{N_0^2} = \frac{1}{N_0^2} \int |\delta N|_{\omega_0, \mathbf{k}_0}^2 d\omega_0 d\mathbf{k}_0, \quad (4.128b)$$

где $\langle \rangle$ — знак усреднения.

Если неоднородности являются статическими, то можно использовать соотношения

$$\langle \delta N_{\mathbf{k}_0} \delta N'_{\mathbf{k}'_0} \rangle = |\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2 \delta(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}'_0), \quad (4.129)$$

$$\delta N_{\mathbf{k}_0} = \int \delta N_{\omega_0, \mathbf{k}_0} d\omega_0, \quad \frac{\langle (\delta N)^2 \rangle}{N_0^2} = \frac{1}{N_0^2} \int |\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2 d\mathbf{k}_0. \quad (4.130)$$

Покажем, что формулы для излучения заряда, движущегося с постоянной скоростью в среде со случайными неоднородностями, могут быть получены из формул для переходного рассеяния. Рассмотрим вначале статические неоднородности. Легко видеть, что переходное рассеяние не зависит от фазы диэлектрической проницаемости, а определяется лишь ее амплитудой. Поэтому разложение (4.130) можно рассматривать как разложение среднего квадрата флуктуации концентрации среды по пространственным гармоникам. Используем (4.78), заменив $(\Delta N^2)/8N_0^2$ выражением (4.130)*.

Для ультрарелятивистской частицы, для основной части спектра, векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ очень близки по направлению, т. е.

$$2\mathbf{k}_0\mathbf{k} \approx 2k(\mathbf{k}_0\mathbf{v})/v \approx 2\mathbf{k}_0\mathbf{v}\omega/c^2 \approx [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2] \omega^2/c^2. \quad (4.131)$$

Поэтому

$$Q^{sc} = \frac{q^2 \omega_{pe}^4}{4c} \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^2} \times \\ \times \int \frac{|\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2}{N_0^2} \delta \left(\frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \theta^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] - \mathbf{k}_0\mathbf{v} \right) d\mathbf{k}_0. \quad (4.132)$$

Этот результат совпадает с известным ранее и полученным иными методами [75, 102, 103]. Таким образом, излучение частицы в среде со случайными неоднородностями есть фактически сумма переходных рассеяний на спектре гармоник вариаций плотности. Новый качественный эффект возникает, например, если неоднородности распределены изотропно (стопки пластинок нельзя расположить так, чтобы это имело место). Вводя $|\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2 = 4\pi k_0^2 |\delta N|_{k_0}^2$,

$$\frac{1}{N_0^2} \langle (\delta N)^2 \rangle = \frac{1}{N_0^2} \int |\delta N|_{k_0}^2 dk_0; \quad k_0 = |\mathbf{k}_0|, \quad (4.133)$$

и интегрируя по углу между $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{v}$, получаем

$$Q^{sc} = \frac{q^2 \omega_{pe}^4}{8c^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \int_{k_{0,\min}(\theta)}^\infty \frac{|\delta N|_{k_0}^2}{k_0 N_0^2} \left(\frac{\omega}{2ck_{0,\min}(\theta)} \right)^2 dk_0 = \\ = \frac{q^2 \omega_{pe}^4}{8c^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \int_{k_{0,\min}(\omega)}^\infty dk_0 \frac{|\delta N|_{k_0}^2}{k_0 N_0^2} \left(\ln \frac{k_0}{k_{0,\min}(\omega)} - 1 + \frac{k_{0,\min}(\omega)}{k_0} \right); \quad (4.134) \\ k_{0,\min}(\omega) = (\omega/2c) [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2], \\ k_{0,\min}(0) = (\omega/2c) [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2].$$

* Согласно (4.76) $\langle N \rangle = N_0$, $\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = 1/4 (\Delta N)^2 \langle \sin^2(\mathbf{k}_0\mathbf{r}) \rangle = 1/8 (\Delta N)^2$.

Здесь, как видим, путем изменения порядка интегрирования удается проинтегрировать по углам θ^2 . Следует отметить, что минимальное значение величины

$$(\omega/2c) [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2], \quad (4.135)$$

которая определяет нижний предел в интеграле (4.134) по k_0 , равно

$$(\omega_{pe}/c) Mc^2/\mathcal{E}. \quad (4.136)$$

Это важно в том отношении, что в случае достаточно резкого падения спектра флуктуаций концентрации при $k_0 < k_{0*}$ излучать будут только частицы с

$$\mathcal{E}/Mc^2 \geq \omega_{pe}/k_{0*}c = \mathcal{E}_{th}/Mc^2, \quad (4.137)$$

где $\mathcal{E}_{th}$ — пороговое значение энергии $\mathcal{E}$.

Такое условие аналогично (4.36). Пороговый характер условия (4.137) может быть использован при детектировании частиц. Излучаемая частота для энергий $\mathcal{E}$, близких к порогу ($\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{th}$), равна

$$\omega \approx \omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2. \quad (4.138)$$

На пороге при $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{th}$ оценка мощности излучения такова:

$$Q^{sc} \approx \frac{q^2}{c} \omega_{pe}^2 \frac{\langle (\delta N)^2 \rangle}{N_0^2}. \quad (4.139)$$

Таким образом, мощность по порядку величины такая же, как и полная мощность излучения, а один квант излучается на относительно небольшой длине

$$L \sim \frac{c}{\omega_{pe}} \frac{N_0^2}{\langle (\delta N)^2 \rangle} \frac{\hbar c}{q^2} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \sim \frac{1}{k_{0*}} \frac{N_0^2}{(\delta N)^2} \frac{\hbar c}{q^2}. \quad (4.140)$$

Для описания излучения частиц в среде со случайными неоднородностями в ряде работ [75, 102, 103] использовался метод эффективной диэлектрической проницаемости. Соответствие результатов, полученных этим методом, с приведенными здесь будет обсуждаться ниже (см. п. 2 настоящего параграфа).

Формулы, приведенные в настоящем разделе, строго говоря, справедливы для статических неоднородностей. Однако с хорошей точностью они могут быть использованы и для медленно движущихся неоднородностей. В этом случае корреляционные функции (4.127) зависят от ω_0 . Однако при условии

$$\omega_0 \ll k_0c \quad (4.141a)$$

приведенные выше результаты можно использовать и при $\omega_0 \neq 0$, подставив в них

$$|\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2 = \int |\delta N|_{\omega_0, \mathbf{k}_0}^2 d\omega_0. \quad (4.141b)$$

2. Излучение заряда на тепловых равновесных флуктуациях, роль пространственной дисперсии. Общие соотношения для излучения заряженных частиц в случайно-неоднородной среде могут быть использованы для расчета излучения в среде с равновесными флуктуациями (т. е. в среде в состоянии теплового равновесия). Если для сильно неравновесных флуктуаций в спектре флуктуаций (функции $|\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2$) могут быть достаточно резко выделены определенные гармоники (например, спектр имеет максимум около $k_{0*} = 2\pi/l_0$, где l_0 — основной характерный масштаб неоднородностей *)), то в случае тепловых флуктуаций спектр неоднородностей близок к «белому» (представлены все гармоники $\mathbf{k}_0$ вплоть до самых больших). Так, в идеальном классическом (неквантовом) газе

$$|\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2 = N_0/(2\pi)^3. \quad (4.142a)$$

В частности, в бесстолкновительной плазме при пренебрежении корреляциями, связанными с кулоновскими столкновениями, для флуктуаций электронной концентрации имеем

$$|\delta N|_{\omega_0, \mathbf{k}_0}^2 = \frac{N_0}{(2\pi)^3} \frac{\exp(-\omega_0^2/2k_0^2 v_{Te}^2)}{\sqrt{2\pi} k_0 v_{Te}}, \quad (4.142b)$$

где v_{Te} — средняя тепловая скорость электронов. Соотношение (4.142a) является следствием соотношения (4.142b), если учесть их связь, задаваемую формулой (4.141б).

Полная интенсивность излучения в среде со спектром флуктуаций (4.142a) будет содержать интеграл по $\mathbf{k}_0$ (см. формулу (4.132)). Вклад в этот интеграл могут вносить достаточно большие $\mathbf{k}_0$, когда пренебрегать пространственной дисперсией обычно недопустимо. В общем случае следует учитывать зависимость $\epsilon^{(1)}$ как от $\mathbf{k}$, так и от $\mathbf{k}_0$ (см. формулы (4.95) и (4.96)).

Если пренебречь пространственной дисперсией, то можно получить известный ранее результат [103]. В общем случае произвольных скоростей заряда нужно учесть рассеяние как через поперечную, так и через продольную волны, т. е. учесть оба члена в формуле (4.57) (для покоящегося заряда существенно рассеяние через продольную волну (§ 4.3, п. 2), а для ультрарелятивистского — через поперечную (§ 4.3, п. 3).

Пренебрегая пространственной дисперсией в $\epsilon^{(0)}(\omega)$ и считая, что $\epsilon^{(1)}(\omega) \approx -(\omega_{pe}^2/\omega^2) \delta N/N_0$ и $\omega \gg \omega_{pe}$, $\omega \gg \omega_0$, получаем (ср. с (4.73))

$$Q^{sc} = \frac{q^2 \omega_{pe}^4}{\pi c^6 \omega^4 N_0^2} \int \frac{\epsilon^{(0)}(\omega) |\omega|^5 w^2 |\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2 d\omega d\mathbf{k}_0 d\mathbf{k}}{|(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 - \omega^2 \epsilon^{(0)}(\omega)/c^2|^2} \times \\ \times \delta(k^2 - \omega^2 \epsilon^{(0)}(\omega)/c^2) \delta(\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}), \quad (4.142в)$$

*) В турбулентной среде спектры часто имеют степенные зависимости $\propto 1/k_0^v$ при $k \gg k_{0*}$ или $k \ll k_{0*}$.

где

$$w^2 = \{[\mathbf{k}\mathbf{v}] + [\mathbf{k}\mathbf{k}_0] c^2/\omega\epsilon^{(0)}(\omega)\}^2/k^2.$$

Для тепловых флуктуаций нужно использовать соотношение (4.142а).

При расчетах удобно перейти к интегрированию по переменной $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$, использовать $\delta(\omega_0 + \mathbf{k}'_0\mathbf{v})$ для интегрирования по $k'_{0,z} = \mathbf{k}'_0\mathbf{v}/v$; после этого интегрирование по углам вектора $\mathbf{k}$ и интегрирование по k^2 проводится элементарно. Получаем

$$Q^{\text{sc}} = \int_0^\infty Q^{\text{sc}}(\omega) d\omega; \quad (4.142г)$$

$$Q^{\text{sc}}(\omega) = \frac{4q^2\omega_{\text{pe}}^4}{3c^3vN_0(2\pi)^3(\epsilon^{(0)}(\omega))^{3/2}} \int \frac{(1 - \epsilon^{(0)}(\omega) v^2/c^2)^2 \omega^2/c^2 + \kappa^2}{[(1 - \epsilon^{(0)}(\omega) v^2/c^2) \omega^2/c^2 + \kappa^2]^2} d\kappa,$$

$$\kappa = \mathbf{k}'_{0,\perp} = \mathbf{k}'_0 - \mathbf{v}(\mathbf{k}'_0\mathbf{v})/v^2.$$

Этот результат совпадает с полученным в [103] после умножения результата [103] на коэффициент $1/2\pi^2$ (отсутствующий в [103], вероятно, в силу опечатки), если в качестве поляризуемости α , фигурирующей в [103], подставить $\alpha = (\epsilon^{(0)}(\omega) - 1)/4\pi = -\omega_{\text{pe}}^2/4\pi\omega^2$. В любой среде в пределах больших частот можно использовать плазменную формулу. Казалось бы, это можно сделать и в (4.142г). Действительно, после интегрирования (4.142г) по κ остается только логарифмическая зависимость $Q^{\text{sc}}(\omega)$ от частоты ω , а, следовательно, согласно (4.142г) излучение приходится на самые высокие частоты, когда плазменной формулой для $\epsilon^{(0)}(\omega)$ заведомо можно пользоваться. Вывод о возможности излучения зарядом очень высоких частот на тепловых флуктуациях среды является, однако, неправильным. Конечно, существуют квантовые ограничения (типа $\hbar\omega \ll \mathcal{E}$), но наиболее важные ограничения связаны с эффектами пространственной дисперсии. Интеграл (4.142г) уже расходится при интегрировании по κ и в [103] такая логарифмическая расходимость связывалась с незаконностью макроскопического описания на малых расстояниях. Более точным, однако, является утверждение, что существенно сказывается пространственная дисперсия (причем в плазме на расстояниях, намного превышающих среднее расстояние между частицами плазмы). Учет пространственной дисперсии приводит к значению подлогарифмического выражения, не содержащего κ_{max} , причем существенным оказывается учет пространственной дисперсии в $\epsilon^{(1)}$ (см. (4.95) и (4.96)).

Стоит в этой связи отметить, что пример плазмы наиболее прост для иллюстрации роли пространственной дисперсии, так как конкретная зависимость $\epsilon^{(1)}$ от $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$ может быть легко найдена. Тепловые флуктуации в плазме создаются движениями отдельных частиц, причем каждая из них при пренебрежении

столкновениями движется равномерно и прямолинейно. Поэтому излучение заряда q при взаимодействии с флуктуациями эквивалентно в определенном отношении излучению при столкновении заряда с зарядом плазмы при учете того, что сталкивающиеся заряды пролетают один мимо другого по прямолинейным траекториям. При этом возникает модуляция диэлектрической проницаемости, описывающей экранировку поля зарядов. Короче, указанное излучение должно соответствовать переходному тормозному излучению (см. гл. 1, § 1.4). В данном случае речь идет о переходном тормозном излучении при столкновении заряда q с электронами плазмы (так как были учтены флуктуации электронной концентрации). Соответствующие формулы с учетом пространственной дисперсии получены в гл. 5.

Мы приведем здесь окончательный результат для переходного тормозного излучения ультрарелятивистского заряда q на электронах плазмы (см. (5.81)) при $\omega_{pe} \ll \omega \ll \omega_{pe}c/v_{Te}$, $\mathcal{E} \gg Mc^2$:

$$Q^{tr.b}(\omega) = \frac{16q^2e^4N_0}{3m_e^2c^4} \left(\ln \frac{c}{v_{Te} \sqrt{1 + \omega^2 M^2 c^4 / \omega_{pe}^2 \mathcal{E}^2}} - 1 \right). \quad (4.142d)$$

Этот результат несколько отличается от того, который следует из (4.142г) для $\omega_{pe} \ll \omega$, $\mathcal{E} \gg Mc^2$:

$$Q^{sc}(\omega) = \frac{16q^2e^4N_0}{3m_e^2c^4} \left(\ln \frac{\kappa_{max}c}{\omega_{pe} \sqrt{1 + \omega^2 M^2 c^4 / \omega_{pe}^2 \mathcal{E}^2}} - 1 \right). \quad (4.142e)$$

Из сравнения последних двух выражений следует, что κ_{max} нужно считать равным ω_{pe}/v_{Te} . Существенное ограничение по частотам в (4.142д) $\omega \ll \omega_{pe}c/v_{Te}$, отсутствующее в (4.142е), фактически указывает на то, когда роль пространственной дисперсии мала. При больших частотах излучение резко падает с частотой (см. ниже (5.87), (5.91)). Кроме переходного тормозного излучения нужно учитывать и обычное тормозное излучение (более подробно см. гл. 5). В других средах (не в плазме) анализ роли пространственной дисперсии также является существенным.

3. О балансе мощностей при излучении зарядов в случайно неоднородной среде. В отличие от переходного излучения на отдельной границе, в случае переходного рассеяния излучение происходит непрерывно вдоль всей траектории частицы. При этом собственная энергия поля заряда в среде в среднем не меняется, а ее производная по времени равна в среднем работе поля излучения над током, генерирующим это излучение:

$$Q^r = Q^{sc} = -Q^f = - \int \langle \mathbf{E}^r \mathbf{j} \rangle d\mathbf{r} = - (2\pi)^3 \int \langle \mathbf{E}_{-k}^r(t) \mathbf{j}_k(t) \rangle dk. \quad (4.143)$$

Будем считать условие излучения В.—Ч. не выполненным. Существенен вопрос о том, какая плотность тока $\mathbf{j}$ должна быть учте-

на в (4.143). Очевидно (из вычислений, приведенных выше), что таким током должен быть ток, вызывающий излучение, а именно (см. (4.56))

$$\frac{4\pi i \omega}{c^2} \delta \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^q = \frac{\omega^2 \epsilon^{(1)}(\omega)}{2c^2 i} (E_{\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0}^q - E_{\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0}^q), \quad (4.144)$$

$$\delta \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^q(t) = \int \delta \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^q \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (4.145)$$

При подстановке тока (4.144) в (4.143) и получается сразу условие баланса мощностей, выраженное первым равенством (4.143).

Строго говоря, выражение (4.144) нужно было бы назвать эффективным током (вызывающим излучение). Выражение для этого эффективного тока было получено по теории возмущений (в первом приближении пренебрегалось членом с $\epsilon^{(1)}(\omega)$ и полученное при этом поле заряда E^q подставлялось в член, содержащий $\epsilon^{(1)}(\omega)$). Таким образом, при использовании указанной теории возмущений, эффективный ток $\mathbf{j}$, создающий поле в среде, состоит из тока заряда $\mathbf{j}^1$ и тока (4.144) $\delta \mathbf{j}^q$. Полное же поле состоит из двух частей — поля E^q (поля тока $\mathbf{j}^q$) и поля E^r . Полная работа сил определяется таким же выражением, как и (4.143), которое, однако, под интегралом содержит $\langle (E_{-\mathbf{k}}^q(t) + E_{-\mathbf{k}}^r(t)) (\mathbf{j}_{\mathbf{k}}^q(t) + \delta \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^q(t)) \rangle$ и сводится к (4.143), если можно пренебречь $\langle E_{-\mathbf{k}}^q(\mathbf{j}_{\mathbf{k}}^q + \delta \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^q) \rangle$. Член $\langle E_{-\mathbf{k}}^q \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^q \rangle$ равен нулю, так как описывает излучение В.—Ч., а условие излучения В.—Ч. считается не выполненным; член же $\langle E_{-\mathbf{k}}^q \delta \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^q \rangle$ обращается в нуль, так как он линеен по случайному току $\delta \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^q$ (поле $E_{-\mathbf{k}}^q$ определяется током $\mathbf{j}_{-\mathbf{k}}^q$ и не содержит случайной величины δN). Ток заряда $\mathbf{j}^1$ (4.54) также выпадает при усреднении из (4.143), так как поле E^r в (4.143) является случайной величиной (пропорциональной δN), а $\mathbf{j}^q$ не содержит δN . Таким образом, при принятых предположениях полная работа сил содержит только величину $\langle E_{-\mathbf{k}}^r(t) \delta \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^q(t) \rangle$. Ток (4.144) представляет собой ток поляризации в среде. Этот ток и излучает рассеянные волны. Подчеркнем еще раз, что физически переходное рассеяние обязано изменению поляризации, окружающей заряд, а не изменению движения самого заряда.

Отметим, что существует и другой метод подсчета излучения, связанный с так называемой реакцией среднего поля [75, 105]. В этом методе фактически рассчитывается работа сил типа (4.143), причем в качестве плотности тока учитывается только плотность $\mathbf{j}^q$, тогда как током (4.144) пренебрегается, — другими словами, вычисляется величина

$$Q^t = \int \langle E^q \rangle \mathbf{j}^q d\mathbf{r}; \quad (4.146)$$

причем среднее поле $\langle E^q \rangle$ вычисляется с учетом нелинейной диэлектрической проницаемости $\delta \epsilon^{n1}$ (см. § 3.5, формулы (3.197),

(3.199), (3.202), где величины $\delta\epsilon_{ij}^{n1}$ выражены через коэффициенты нелинейных токов), учитывающей эффекты $\langle(\delta N)^2\rangle$ (в [75, 105, 102] для $\delta\epsilon^{n1}$ используется термин эффективная диэлектрическая проницаемость). Выражение (4.146) в отсутствие флуктуаций, как мы знаем (см. (2.23)), не равно нулю (в однородной среде) только при выполнении условия излучения В.—Ч. Условие излучения В.—Ч. считается не выполненным (это, например, всегда имеет место в области высоких частот). Для того чтобы Q' не было равно нулю, функция Грина, пропорциональна величине (см. (4.61))

$$1/[k^2 - \epsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2] \quad (4.147)$$

и связывающая $\langle E^q \rangle$ с j^q (см. (4.59)), должна иметь не равную нулю мнимую часть. Причем при выполнении условия В.—Ч. вместо (4.147) можно записать

$$\text{Im} \frac{1}{k^2 - \epsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2} \approx -i\pi\delta\left(k^2 - \frac{\epsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{c^2}\right). \quad (4.148)$$

В случайно-неоднородной среде вместо ϵ используется $\epsilon = \epsilon^{(0)} + \delta\epsilon^{n1}$, причем нелинейная часть диэлектрической проницаемости, пропорциональная в первом приближении $\langle(\delta N)^2\rangle$, содержит мнимую часть, а поэтому и при выполнении условия излучения В.—Ч. мнимая часть (4.147) не равна нулю. В этом фактически и состоит метод расчета, основанный на реакции среднего поля и использованный в [75].

Такой метод дает результаты, близкие (а в некоторых приближениях даже совпадающие) к тем, которые получаются при помощи (4.143), исходя из простых физических представлений о переходном рассеянии. В связи с этим стоит отметить, что включение $\delta\epsilon^{n1}$ в собственное поле $\langle E^q \rangle$, а следовательно, включение $\langle(\delta N)^2\rangle$ в знаменателе (см. (4.147)), предполагает суммирование вкладов в собственное поле $\langle E^q \rangle$ от различных порядков (степеней) по $\langle(\delta N)^2\rangle$. В этом случае разложение (4.147) по $\langle(\delta N)^2\rangle$ содержит любые степени $\langle(\delta N)^2\rangle$. Вместе с тем, сам вывод выражения для $\delta\epsilon^{n1}$ (см. § 3.5, формулу (3.202)) предполагает разложение по δN в нелинейном токе, т. е. при этом пренебрегается членами более высокого порядка по δN . Поэтому, во всяком случае, нужно знать, какую роль могут играть отброшенные члены более высокой степени по δN в нелинейных токах.

Одним из важных критериев могло бы быть выполнение баланса мощностей. Такой баланс выполняется для (4.143). Что касается метода реакции среднего поля, то возникает вопрос о том, почему этот метод дает приближенно правильный результат. Заметим, что он может носить только приближенный характер, поскольку не видно каких-либо физических оснований для того, чтобы при подсчете работы сил отбрасывать ток (4.144). Это тем более очевидно, что по физике дела излучение происходит благодаря колебаниям поляризации среды вблизи заряда, наво-

димым неоднородностями концентрации, через которые проходит частица. В случае, когда условие излучения В.—Ч. не выполнено, можно раскладывать функцию Грина, пропорциональную величине

$$1/[k^2 - (\epsilon^{(0)} + \epsilon^{n1})(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2], \quad (4.149)$$

по ϵ^{n1} , т. е. в конечном счете по $\langle(\delta N)^2\rangle$, и сравнить результат с тем, который получается для переходного рассеяния из формулы (4.143), в которой ток совпадает с выражением (4.144). При этом ϵ^{n1} , согласно § 3.5, выражается через нелинейные матричные элементы S_{ijl} , а мощность переходного рассеяния, согласно (4.95), (4.96), также выражается в общем случае через S_{ijl} или S'_{ij} . Результат, получаемый из (4.146) при учете члена, линейного по ϵ^{n1} , совпадает с полученным из (4.143), однако это совпадение имеет место только в случае недиссипативной среды, т. е. в условиях, когда S'_{ij} удовлетворяют соотношениям для среды без диссипации. Метод переходного рассеяния не ограничивается этим требованием. Вместе с тем ясно, что возможность учета членов, квадратичных по ϵ^{n1} в (4.149), требует, во всяком случае, более тщательного обоснования.

Следует сказать также о методе реакции среднего поля в случае выполнения условия излучения В.—Ч. (или в магнитном поле, при выполнении условия циклотронного или синхротронного резонанса). В этом случае разложение по ϵ^{n1} в (4.149), казалось бы, не очень пригодно, так как в области резонанса (связанного с излучением В.—Ч.) имеет место равенство

$$k^2 - \epsilon^{(0)}(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2 = 0. \quad (4.150)$$

Однако ясно и то, что до тех пор, пока $\epsilon^{n1} \ll \epsilon^{(0)}$, мнимая часть (4.149) достаточно хорошо описывается δ -функцией (4.148). Процессы же, связанные с ϵ^{n1} , только размазывают этот резонанс, не меняя интеграла. Эта проблема связана с широко обсуждавшейся задачей об излучении ондулятора при выполнении условия В.—Ч. (см. [11]) или о рассеянии волн зарядом при выполнении условия В.—Ч. (см. [148]). Как правило, при этом происходит перераспределение интенсивности излучения между рассеянием и излучением В.—Ч. без существенного изменения интегральной излучаемой энергии. Эта проблема применительно к случайно-неоднородной среде тесно связана также с проблемой так называемого турбулентного уширения черенковского резонанса (см. [73]) и составляет сейчас обширный раздел физики турбулентной плазмы.

Таким образом, в условиях, когда не выполняется условие В.—Ч. и, следовательно, допустимо разложение по ϵ^{n1} , эффекты излучения заряженных частиц в случайно-неоднородной среде сводятся к эффектам переходного рассеяния. Наиболее последовательным методом рассмотрения (при $\langle(\delta N)^2\rangle/N_0^2 \ll 1$) является теория возмущений, результаты которой справедливы и в

диссипативных нелинейных средах. В недиссипативных средах метод реакции среднего поля при невыполнении условия излучения В.—Ч. дает правильный ответ в первом порядке по $\langle(\delta N)^2\rangle/N_0^2$. Если же выполняется условие излучения В.—Ч., то интегральные поправки к излучению В.—Ч. из-за наличия случайных неоднородностей, как правило, малы (они чаще всего неаналитичны по $\langle(\delta N)^2\rangle$, точнее, описываются дробными степенями $\langle(\delta N)^2\rangle$; см. [73]). В той области спектра, в которой не выполняется условие излучения В.—Ч., естественно, излучение заряженной частицы в среде со случайными неоднородностями является суммой переходных рассеяний на гармониках концентрации, на которые может быть разложен спектр неоднородностей.

§ 4.6. Индуцированное (вынужденное) переходное рассеяние

1. Рассмотрение эффектов индуцированного рассеяния методом коэффициентов Эйнштейна. Физическая причина возникновения эффектов индуцированного переходного рассеяния та же, что и для индуцированного излучения В.—Ч. или индуцированного переходного излучения. Будем считать, что имеется пучок частиц, взаимодействующий с рассеиваемой волной диэлектрической проницаемости. Кроме того, в системе имеется внешняя электромагнитная волна, частота ω и волновой вектор $\mathbf{k}$ которой совпадают с одним из наборов возможных значений ω и $\mathbf{k}$, которые имеются у волн, излучаемых в результате рассеяния. Внешняя электромагнитная волна будет модулировать пучок частиц, группируя некоторые частицы пучка в сгустки. В результате когерентности излучения его мощность на одну частицу будет пропорциональна модуляции пучка, т. е. амплитуде падающей электромагнитной волны.

При анализе индуцированного рассеяния можно было бы использовать метод § 3.8, отыскивая сгущения зарядов, вызываемые полем излучения, и учитывая их влияние на процессы излучения. Важно в данном случае, что переходному рассеянию, как было выяснено, соответствует случай многих границ, расположенных регулярно (стопка пластинок) или случайно (случайно-неоднородная среда). Индуцированные эффекты возможны в обоих случаях. При этом сгущения зарядов, возникшие на одной из неоднородностей (пластинке), могут быть «усилены» следующей неоднородностью (пластинкой) и амплитуда возмущений будет нарастать. Таким образом, в данном случае нет необходимости в дополнительных «устройствах» для создания обратной связи, как это было в случае переходного излучения (см. § 3.8). Однако для возникновения индуцированных процессов необходимым условием является наличие многих излучателей, и, если неоднородности статические, то, очевидно, излучатели должны быть движущимися (т. е. это пучок частиц). Индуцированное рассеяние может привести как к эффектам усиления излучения (мазерный

эффект), так и к его поглощению (реабсорбции). Мы здесь получим основные результаты на простейшем пути — методом коэффициентов Эйнштейна (так же, как это было сделано для излучения В.—Ч. в § 3.8).

Введем вероятность переходного рассеяния в единицу времени. Для этого рассмотрим мощность излучения, записав ее в виде

$$Q^{sc} = \int w_p^{sc}(\mathbf{k}) \hbar \omega(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (4.151)$$

где $w_p^{sc}(\mathbf{k})$ — вероятность излучения в 1 с рассеянного кванта с частотой $\omega(\mathbf{k})$. Выразив E_0^2 через число падающих квантов $N_{\mathbf{k}_0}$, можно записать

$$w_p^{sc}(\mathbf{k}) = \int w_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\mathbf{k}_0} \frac{d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^3}, \quad (4.152)$$

где $w_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ — вероятность рассеяния на один падающий квант.

Использование выражения (4.152) наиболее целесообразно в случае, когда рассеиваемая волна является случайной. Тогда падающая волна не обязательно должна иметь электромагнитную природу, но, все равно, связанное с этой волной значение $\langle (\delta N)^2 \rangle$ может быть во многих случаях выражено через число квантов (например, фононов для акустических волн в твердых телах или плазмонов для плазменных колебаний и т. п.). Вместе с тем, использование выражения (4.152) отнюдь не необходимо для введения понятия об индуцированном рассеянии. Для регулярных рассеиваемых волн можно использовать и выражение (4.151). Однако, как подчеркивалось, интенсивность рассеяния не зависит от фаз рассеиваемых волн и в этом отношении использование (4.151) либо (4.152) приводит часто к одним и тем же результатам. Поскольку мы здесь ограничиваемся классическим приближением, квантовые представления удобны для описания процессов индуцированного рассеяния, но отнюдь не необходимы (классический расчет, приводящий к тому же результату, может быть проведен при использовании формул § 3.8 — см., например, (3.334), описывающих модуляцию пучка внешней электромагнитной волной).

Выражение (4.151) соответствует спонтанному рассеянию. В системе имеется еще внешняя волна, частота которой равна ω , а волновой вектор равен $\mathbf{k}$. Ее интенсивность можно характеризовать числом квантов $N_{\mathbf{k}}$. Следуя методу коэффициентов Эйнштейна, введем вероятность вынужденного излучения $N_{\mathbf{k}} v_p^{sc}(\mathbf{k})$ и вероятность вынужденного поглощения $N_{\mathbf{k}} v_p'^{sc}(\mathbf{k})$. Составим уравнение баланса (так же, как для излучения В.—Ч.; см. (3.348)), учтя, что в каждом элементарном акте взаимодействия с частицей поглощается квант с импульсом $\hbar \mathbf{k}_0$ и излучается квант с импульсом $\hbar \mathbf{k}$. Как уже отмечалось (см. (4.5)), возможны также процессы излучения двух квантов, которые мы здесь не учитываем (они трактуются аналогичным способом;

вклад двухквантовых процессов оказывается, вообще говоря, малым *). Изменение импульса частицы в процессе рассеяния равно $\hbar \mathbf{k}_0 - \hbar \mathbf{k}$.

С учетом равенства вероятностей прямых и обратных процессов

$$v_p^{sc}(\mathbf{k}) = v_p'^{sc}(\mathbf{k}) = \int v_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\mathbf{k}_0} \frac{d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^3} \quad (4.153)$$

уравнение баланса приобретает вид (f_p — функция распределения частиц, нормированная согласно (3.333))

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt} = & \int w_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\mathbf{k}_0} \frac{d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^3} \frac{f_p d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} + \\ & + \int v_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\mathbf{k}_0} N_{\mathbf{k}} \frac{f_p d\mathbf{p} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^6} - \\ & - \int w_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_0} f_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}+\hbar\mathbf{k}_0} \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^6} - \\ & - \int w_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}+\hbar\mathbf{k}_0} \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^6}. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Здесь мы учли также спонтанное рассеяние квантов $\mathbf{k}$ с превращением их в кванты $\mathbf{k}_0$ (последний член в (4.154)). Считая $|\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)| \ll |\mathbf{p}|$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt} = & N_{\mathbf{k}} \int v_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\mathbf{k}_0} \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^6} + \\ & + \int v_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\mathbf{k}_0} f_p \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^6} - N_{\mathbf{k}} \int w_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) f_p \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^6}. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Для нахождения соотношения между $w_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ и $v_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ используем требование, чтобы (4.155) оставалось справедливым в условиях теплового равновесия, когда

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{T}{\hbar \omega(\mathbf{k})}, \quad N_{\mathbf{k}_0} = \frac{T}{\hbar \omega(\mathbf{k}_0)}, \quad (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{p}} = - \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}}{T} f_p.$$

Получаем

$$\int \frac{f_p T}{(2\pi)^6 \hbar} \left[v_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \left(\frac{1}{\omega(\mathbf{k}_0)} - \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} \right) - v_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}}{\omega(\mathbf{k}) \omega(\mathbf{k}_0)} \right] d\mathbf{p} = 0. \quad (4.156)$$

В силу закона сохранения при рассеянии

$$\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_0) = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v} \quad (4.157)$$

*) Однако в плазме (см. гл. 6) переходное излучение (поглощение) двух волн, одной — низкочастотной (акустической), а другой — высокочастотной (ленгмюровской), оказывается того же порядка, что и переходное рассеяние низкочастотной волны в высокочастотную.

получаем

$$v^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = w^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0). \quad (4.158)$$

Следовательно, (4.155) можно записать в виде

$$\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt} = q_{\mathbf{k}} + 2\gamma_{\mathbf{k}}^{sc} N_{\mathbf{k}} - 2\gamma_{\mathbf{k}}^{sp} N_{\mathbf{k}}, \quad (4.159)$$

где

$$q = \int q_{\mathbf{k}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (4.160)$$

— полное число квантов $N_{\mathbf{k}}$, генерируемых в 1 с из-за спонтанного переходного рассеяния,

$$q_{\mathbf{k}} = \int w_{\mathbf{p}}^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\mathbf{k}_0} \frac{f_{\mathbf{p}} d\mathbf{p} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^6}, \quad (4.161)$$

а $\gamma_{\mathbf{k}}^{sc}$ — инкремент индуцированного усиления (или реабсорбции) рассеянных квантов:

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{sc} = \frac{1}{2} \int w_{\mathbf{p}}^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\mathbf{k}_0} \hbar (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^6}, \quad (4.162)$$

и, наконец, $\gamma_{\mathbf{k}}^{sp}$ — коэффициент спонтанной экстинкции квантов $\mathbf{k}$ из-за их рассеяния в кванты $\mathbf{k}_0$:

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{sp} = \frac{1}{2} \int w_{\mathbf{p}}^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) f_{\mathbf{p}} \frac{d\mathbf{k}_0 d\mathbf{p}}{(2\pi)^6}. \quad (4.163)$$

Поскольку член с $\gamma_{\mathbf{k}}^{sc}$ в (4.159) квадратичен по числу квантов (пропорционален $N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_0}$), то он описывает нелинейный эффект (см. [73]). Если кванты $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$ принадлежат разным ветвям колебаний, то этот нелинейный эффект соответствует нелинейной конверсии волн. Знак $\gamma_{\mathbf{k}}^{sc}$ в общем случае определяется как распределением частиц $f_{\mathbf{p}}$, так и распределением рассеиваемых квантов, т. е. возможно как поглощение, так и усиление излучения. Следует заметить, что хотя вывод выражения для $\gamma_{\mathbf{k}}^{sc}$ был сделан в предположении о случайном характере волны $N_{\mathbf{k}}$, результат от этого предположения зависит не сильно, если только число частиц, участвующих в рассеянии, не очень велико (ср. с индуцированным эффектом излучения В.—Ч., описываемым формулами (3.347), (3.348), когда условием применимости является малая концентрация пучка и возможность использования соотношения (3.344), что практически означает достаточно большую размытость пучка по импульсам). В процессах рассеяния для применимости (4.162) существенно также условие $\gamma_{\mathbf{k}}^{sc} \ll \omega(\mathbf{k})$, а рассеиваемые частицы должны иметь достаточно большой разброс по импульсам*). При невыполнении этих условий не-

*) Необходимо также выполнение условия $\gamma_{\mathbf{k}}^{sc} \ll |\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_0)|$ (см. гл. 6).

устойчивость (в том случае, когда $\gamma_k^{sc} > 0$) не исчезает, однако уже не описывается формулой (4.162). В плазме, например (см. гл. 6), она переходит в так называемую модуляционную неустойчивость. В том случае, когда $k \gg k_0$ (а этот случай соответствует переходному рассеянию ультрарелятивистских частиц — см. (4.11)), инкремент γ_k^{so} не зависит и от природы рассеиваемой волны и может быть выражен через вероятность (4.152):

$$\gamma_k^{sc} = \frac{1}{2} \int w_p^{sc}(\mathbf{k}) \hbar \mathbf{k} \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (4.164)$$

Эта формула формально совпадает с (3.347) для инкремента индуцированного излучения В.—Ч. с той разницей, что в (3.347) входит вероятность излучения В.—Ч., а в (4.164) — вероятность переходного рассеяния $w_p^{so}(\mathbf{k})$.

2. Усиление и поглощение электромагнитного излучения ультрарелятивистскими частицами. Из сопоставления (4.151) с (4.79) легко получаем выражение для вероятности переходного рассеяния ультрарелятивистских частиц на статических неоднородностях концентрации:

$$w_p^{sc}(\mathbf{k}) = \frac{q^2 \theta^2 \omega_{pe}^4 \pi^2 (\Delta N)^2}{16 \hbar \omega^3 k_0^2 N_0^2} \delta \left(\frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \theta^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] - k_0 c \right). \quad (4.165)$$

Используем (4.164) и рассмотрим направленный по z пучок частиц. Изменим нормировку функции распределения частиц, вводя $f_{\mathcal{E}}$ — функцию распределения по энергиям ($\mathcal{E} \approx cp_z$):

$$\int \frac{f_p d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E}. \quad (4.166)$$

Тогда получим для инкремента

$$\begin{aligned} \gamma_k^{sc} &\equiv \gamma_{\omega,0}^{sc} = \frac{1}{2} \int_0^\infty w_p^{sc}(\mathbf{k}) \hbar \omega \frac{\partial f_{\mathcal{E}}}{\partial \mathcal{E}} d\mathcal{E} = \\ &= \frac{q^2 \theta^2 \omega_{pe}^4 \pi^2 (\Delta N)^2}{32 \omega^3 k_0^2 M^2 c^4 N_0^2} \left[\mathcal{E}^3 \frac{\partial f_{\mathcal{E}}}{\partial \mathcal{E}} \right]_{\mathcal{E}=\mathcal{E}^*}, \end{aligned} \quad (4.167)$$

где

$$\mathcal{E}^* = Mc^2 \left(\sqrt{2k_0 c / \omega - \theta^2 - \omega_{pe}^2 / \omega^2} \right)^{-1}. \quad (4.168)$$

Инкремент положителен, если $\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} f_{\mathcal{E}} > 0$. Для $f_{\mathcal{E}} \propto \exp(-\mathcal{E}/T)$ имеем $\gamma_k < 0$, т. е. реабсорбцию (поглощение). Инкремент (4.167) сохраняется для случайных флуктуаций плотности, если они носят одномерный характер. Подчеркнем, что описанная неустой-

чивость сохраняется и для весьма высоких частот. Однако выражение (4.167) не пригодно для изотропных флуктуаций, когда для нахождения вероятности $w_p^{sc}(\mathbf{k})$ нужно использовать формулу (4.132), описывающую излучения релятивистских частиц в поле случайных неоднородностей:

$$w_p^{sc}(\mathbf{k}) = \frac{2q^2\omega_{pe}^4\theta^2c^2\pi^2}{\hbar\omega^5N_0^2} \int |\delta N|_{k_0}^2 \left[\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \theta^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^{-2} \times \\ \times \delta \left(\frac{1}{2} \omega [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2] - \mathbf{k}_0 \mathbf{v} \right) d\mathbf{k}_0. \quad (4.169)$$

Поскольку $|\delta N|_{k_0}^2$ не зависит от углов, то (4.169) можно усреднить по углу между $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}$, что эквивалентно следующему интегрированию (4.169):

$$\overline{w_p^{sc}} = \frac{1}{2} \int_0^\pi w_p^{sc} \sin \theta d\theta \approx \frac{1}{4} \int_0^\infty w_p^{sc} d\theta^2. \quad (4.170)$$

Это дает

$$\overline{w_p^{sc}} = \frac{q^2\omega_{pe}^4\pi^2}{4\hbar\omega^4} \int_{k_{0,\min}}^\infty \frac{|\delta N|_{k_0}^2}{N_0^2k_0^2} \left[\frac{2k_0c}{\omega} - \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] dk_0, \quad (4.171)$$

$$k_{0,\min} = \frac{1}{2} \omega [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2].$$

Из этого выражения следует, что даже в случае направленного пучка частиц, но изотропных флуктуаций плотности γ_k меньше нуля, т. е. имеет место реабсорбция. Вводим согласно (4.166) $f_{\mathcal{E}}$ (здесь $\mathcal{E} = cp_z$):

$$\gamma_k^{se} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \overline{w_p^{sc}} \hbar \omega \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E} \quad (4.172a)$$

или

$$\gamma_k^{sc} = - \frac{q^2\omega_{pe}^4\pi^2}{4\omega^3} \int_0^\infty \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{f_{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}} d\mathcal{E} \int \frac{|\delta N|_{k_0}^2}{N_0^2k_0^2} dk_0. \\ \frac{\omega}{2} [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2] \quad (4.172b)$$

Для изотропного распределения частиц также можно ввести распределение по энергиям $f_{\mathcal{E}}$, где $\mathcal{E} \approx c|\mathbf{p}|$, с нормировкой (4.166), однако при этом возникает дополнительный фазовый множитель

$$d\mathbf{p} \rightarrow 4\pi p^2 dp \approx 4\pi \mathcal{E}^2 d\mathcal{E} / c^3. \quad (4.173)$$

Это видоизменяет γ_k^{sc} следующим образом (флуктуации концентрации изотропны):

$$\begin{aligned} \gamma_k^{sc} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \overline{w_p^{sc}} \hbar \omega \mathcal{E}^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \left(\frac{f \mathcal{E}}{\mathcal{E}^2} \right) d\mathcal{E} = \\ &= - \frac{q^2 \omega_{pe}^4 \pi^2}{4 \omega^3} \int_0^\infty \frac{f \mathcal{E}}{\mathcal{E}} d\mathcal{E} \int \frac{|\delta N|_{k_0}^2}{N_0^2 k_0^2} \left(\frac{2k_0 c}{\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) dk_0, \\ &\quad \frac{\omega}{2} [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2] \end{aligned} \quad (4.174)$$

т. е. для изотропных частиц возникает поглощение ($\gamma_k < 0$).

§ 4.7. Интерференция томсоновского и переходного рассеяния

Выше мы пренебрегали обычным (томсоновским) рассеянием для того, чтобы выявить эффекты переходного рассеяния в «чистом виде». Во многих случаях, как подчеркивалось выше (например, для тяжелых частиц), переходное рассеяние может намного превосходить обычное рассеяние. Однако в общем случае надо учитывать как обычное томсоновское рассеяние, так и переходное рассеяние и их интерференцию между собой. Полное сечение рассеяния из-за этой интерференции в некоторых случаях оказывается даже много меньше сечения каждого из процессов рассеяния (когда амплитуды переходного рассеяния и обычного томсоновского рассеяния почти равны по величине и противоположны по знаку). Такое уменьшение (но в ряде случаев и увеличение; см. гл. 6) сечения мало существенно при рассеянии волн высоких частот тяжелыми частицами, так как для них обычное томсоновское рассеяние пренебрежимо мало.

Покажем, как включить в теорию обычное рассеяние и учесть его интерференцию с переходным рассеянием (пренебрегая квантовыми эффектами отдачи как в переходном, так и в обычном рассеянии). Для этого воспользуемся найденным в § 3.8 выражением для тока $\delta \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^q$ (3.330), создаваемого колебаниями частицы в поле произвольной волны. Запишем (3.330) в виде

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{j}_{i, \omega, \mathbf{k}}^q &= \int \Lambda_{ij}^q(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) \exp(-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{r}_0) \times \\ &\quad \times \delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}) E_{j, \omega_1, \mathbf{k}_1} d\omega_1 d\mathbf{k}_1, \end{aligned} \quad (4.175)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}^q(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1) &= \frac{q^2 c^2 i}{\mathcal{E} \omega_1 (2\pi)^3 (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})^2} \{ \delta_{ij} (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})^2 + \\ &\quad + (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}) (v_i k_j + v_j k_{1i}) + v_i v_j (\mathbf{k} \mathbf{k}_1 - \omega \omega_1 / c^2) \}; \quad (4.176) \\ \mathcal{E} &= Mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned}$$

Здесь, в отличие от (3.334), мы не суммируем по начальным положениям заряда $\mathbf{r}_0$, так как нас интересует ток, создаваемый

отдельным зарядом q , и $\delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)v)$ возникает из интегрирования по времени в (3.330). Конкретное выражение для Λ_{ij}^q (4.176) получается подстановкой (3.327а), (3.327б) в (3.330).

Если падающая волна является синусоидальной типа (4.1), то из (4.175) получаем

$$\delta j_{i,\omega,\mathbf{k}}^q = \frac{1}{2i} E_j^{(0)} \{ \Lambda_{ij}^q(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{r}_0] \times \\ \times \delta(\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)v) - \Lambda_{ij}^q(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) \times \\ \times \exp[-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \mathbf{r}_0] \delta(\omega + \omega_0 - (\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)v) \}. \quad (4.177)$$

Для того чтобы найти полное сечение рассеяния и учесть интерференцию переходного и обычного рассеяния, надо сложить (4.177) с нелинейным током (4.93), приводящим к переходному рассеянию. Для этих целей подставим в нелинейный ток (4.93) поле равномерно движущегося заряда

$$E_{i,\omega,\mathbf{k}}^q = G_{ij}(\omega, \mathbf{k}) j_{j,\omega,\mathbf{k}}^q = G_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{qv_j}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}v), \quad (4.178)$$

где $G_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ — функция Грина (см. (4.60), (4.61)).

В результате нелинейный ток (4.93) приобретает вид

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{nl} = \frac{qv_s E_j^{(0)}}{i(2\pi)^3} \{ S_{ilj}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) G_{ls}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times \\ \times \delta(\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)v) - S_{ilj}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) \times \\ \times G_{ls}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \delta(\omega + \omega_0 - (\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)v) \}. \quad (4.179)$$

Этот ток, описывающий переходное рассеяние, должен быть сложен с током (4.177) для обычного рассеяния. Тогда полный ток может быть описан выражением (4.175), в котором Λ_{ij}^q заменено на $\Lambda_{ij}^{\text{eff}}$, причем

$$\Lambda_{ij}^{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = \Lambda_{ij}^q(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) + 2v_s q (2\pi)^{-3} \times \\ \times S_{ilj}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) G_{ls}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \equiv \Lambda_{ij}^q + \Lambda_{ij}^{nl}. \quad (4.180)$$

Величина $\Lambda_{ij}^{\text{eff}} E_j^{(0)}$ может быть выражена через $\varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$, введенный соотношением (4.95):

$$\Lambda_{ij}^{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) E_j^{(0)} = \Lambda_{ij}^q(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) E_j^{(0)} + \\ + \frac{qv_s \omega}{4\pi (2\pi)^3} \varepsilon_{il}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) G_{ls}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0). \quad (4.181)$$

Существенно, что полная интенсивность рассеяния определяется квадратом суммы амплитуд $\Lambda^q + \Lambda^{nl}$, т. е. $|\Lambda^q + \Lambda^{nl}|^2$. В случае, если эти амплитуды почти равны по величине, но противоположны по знаку, то, очевидно, возможно сильное уменьшение рассеяния. Выписанная формула (4.181) справедлива для однородных и стационарных сред с пространственной дисперсией.

ГЛАВА 5

ПЕРЕХОДНОЕ ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ (ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЧАСТИЦ)

§ 5.1. Общие представления о переходном тормозном излучении

На физической природе переходного тормозного излучения мы уже кратко останавливались в гл. 1. Здесь обсудим, несколько более подробно, общие представления о переходном тормозном излучении. Речь фактически идет об описании процессов излучения при столкновении частиц, происходящих не в вакууме, а в среде. Если столкновения частиц происходят в вакууме, то излучение возникает, только если сталкивающиеся частицы испытывают ускорение и, вообще говоря, их траектории в процессе столкновения отклоняются от прямолинейных. Это хорошо известный процесс обычного тормозного излучения [150]. При столкновении частиц в среде излучение возможно и без изменения прямолинейного характера движения частиц, подобно тому как в среде возможны процессы переходного рассеяния для строго прямолинейного движения ($M \rightarrow \infty$). Таким образом, процессы переходного тормозного излучения [42, 43] возможны для двух частиц, для каждой из которых $M \rightarrow \infty$. Общая теория тормозного излучения в среде должна учитывать как обычное тормозное излучение, так и переходное тормозное излучение.

Здесь уместно напомнить о хорошо известной связи между процессами рассеяния и процессами тормозного излучения. Пусть в вакууме легкая частица (например, электрон) налетает на покоящуюся тяжелую частицу (например, ион). Поле неподвижной частицы можно разложить по пространственным гармоникам с волновыми векторами $\mathbf{k}_0$. Легкая частица при столкновении с тяжелой в результате эффекта Доплера «видит» уже не неподвижные гармоники, а движущиеся гармоники с частотой $\omega = \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{v}$. Такие «волны» отличаются от свободных электромагнитных волн (у которых, например, в вакууме $\omega(\mathbf{k}) = kc$) тем, что у них нет определенной зависимости частоты ω от волнового вектора $\mathbf{k}$ (о них говорят как о виртуальных волнах). Ясно, однако, что

такие «волны» заставляют частицу колебаться и благодаря таким колебаниям излучаются реальные электромагнитные волны. Это есть аналог обычного процесса томсоновского рассеяния. Такая трактовка тормозного излучения возможна только в квазиклассическом пределе для достаточно малых частот (энергия излучаемого фотона $\hbar\omega(\mathbf{k})$ должна быть много меньше энергии частицы $\mathcal{E}$). Таким образом, обычное тормозное излучение соответствует в этом пределе томсоновскому рассеянию виртуальных волн (поля сталкивающихся частиц) с их превращением в распространяющиеся электромагнитные волны.

При столкновении частиц в среде помимо обычного рассеяния возможно переходное рассеяние. Переходное тормозное излучение есть не что иное, как переходное рассеяние виртуальных волн (поля сталкивающихся частиц) с их превращением в реальные электромагнитные волны. Качественным отличием процессов переходного рассеяния и переходного тормозного излучения от обычных процессов рассеяния и тормозного излучения является то, что эти процессы возможны без каких-либо отклонений траекторий частиц от прямолинейных.

Рассмотрим два заряда q_α и q_β , движущиеся в среде с постоянными скоростями v_α и v_β . Говоря о столкновении этих зарядов между собой, мы имеем в виду то, что в какой-то области пространства в определенный момент времени их траектории близко подходят друг к другу. Однако, в согласии со сказанным, при рассмотрении переходного тормозного излучения отклонения траекторий от прямолинейных либо будем считать отсутствующими (M велико), либо будем ими пренебрегать. Каждый из зарядов в своей окрестности поляризует среду. А это значит, что гармоника, на которые может быть разложено поле каждого из равномерно движущихся зарядов, соответствуют также гармоникам изменения поляризации, окружающей заряды. Заряд, пролетающий мимо гармоник поляризации, их возмущает, создавая волны поляризуемости; последние рассеиваются на заряде, причем образуются электромагнитные волны, что и дает переходное тормозное излучение.

Если заряды тяжелые, то основным будет переходное тормозное излучение, для легких же зарядов обычное тормозное излучение и переходное тормозное излучение происходят одновременно. В этом случае обычно возникает интерференция между обычным тормозным излучением и переходным тормозным излучением (аналогично тому, как имеет место интерференция между обычным рассеянием и переходным рассеянием). Обычное тормозное излучение при столкновении тяжелых частиц между собой будет ничтожно малым и поэтому вплоть до некоторых, достаточно высоких частот (см. ниже) тормозное излучение тяжелых частиц (например, ионов в плазме) должно быть в основном переходным тормозным излучением. Причина этого, казалось бы, необычного вывода весьма проста. Дело, что в процессах переходного излучения и процессах переходного рассеяния фактически

излучает не сама частица, а окружающая ее поляризация среды. То же самое верно и для переходного тормозного излучения, т. е. при столкновениях частиц излучает поляризация среды, окружающая сталкивающиеся частицы. В этом смысле переходное тормозное излучение является нелинейным процессом, так как сталкивающиеся частицы не только создают переменную поляризуемость, но и рассеивают на себе «волны» поляризуемости. Поляризация обычно создается легкими частицами среды. Поэтому с микроскопической точки зрения при столкновении тяжелых частиц возникает движение легких частиц, создающих поляризацию в среде, которая и излучает. Это поясняет, почему при столкновении тяжелых частиц в среде может возникнуть заметное переходное тормозное излучение. Вместе с тем и для легких частиц переходное тормозное излучение может оказаться не только не малым по сравнению с обычным тормозным излучением, но, в определенных условиях (при достаточно малых частотах), стать доминирующим процессом тормозного излучения. Дело в том, что при малых частотах в обычное тормозное излучение вклад вносят далекие столкновения, когда отклонение траекторий частиц от прямолинейных мало. Это может указывать на сопоставимость по величине обычного тормозного излучения и переходного тормозного излучения. В случае релятивистских частиц существует, однако, еще специфический эффект подавления обычного тормозного излучения (см. § 5.2), который и приводит к тому, что переходное тормозное излучение становится основным процессом тормозного излучения.

Вообще, нужно отметить, что переходное тормозное излучение значительно только при достаточно низких частотах (критерий см. в § 5.3). В практически интересных случаях это такие частоты, для которых квантовые эффекты малосущественны (т. е. $\hbar\omega \ll \mathcal{E}$). Поэтому проведенная ниже квазиклассическая теория переходного тормозного излучения охватывает наиболее важную для приложений область частот. При энергии фотона $\hbar\omega$, сравнимой с энергией частицы $\mathcal{E}$, основным будет обычное тормозное излучение (если, конечно, не рассматривать очень плотной среды).

Поскольку для расчетов в случае обычного тормозного излучения часто используются фейнмановские диаграммы (рис. 15, а — для рассеяния и рис. 15, б — для тормозного излучения), стоит также указать на соответствующие диаграммы в случае переходного тормозного излучения (рис. 16, а — для переходного рассеяния и рис. 16, б — для переходного тормозного излучения). Заметим, что графики для тормозного излучения отличаются в обоих случаях от соответствующих графиков для рассеяния тем, что рассеиваемая волна является виртуальной волной, создаваемой сталкивающимися частицами. Следует еще раз сказать и о том, что переходное тормозное излучение создается возмущениями поляризации, и в связи с этим отметить, что поляризация может создаваться не только средой, но и экранирующими зарядами атома или молекулы, если речь идет о столкновении между

зарядом и квазинейтральным атомом или молекулой [45]. В этом случае также возможны сходные эффекты излучения тяжелых ионов [45], причем поляризация создается связанными электронами атома или молекулы. В случае плазмы, например, любой помещенный в нее заряд окружен поляризационной «шубой» зарядов другого знака, и поляризация создается обычно свободными электронами среды.

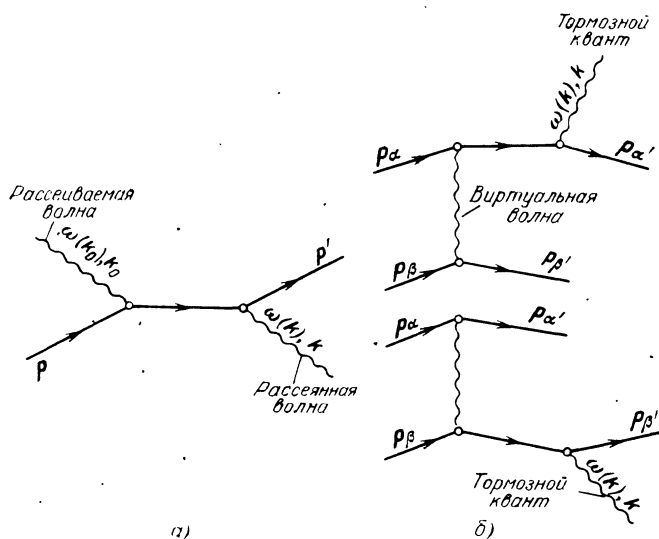


Рис. 15. а) График обычного томсоновского рассеяния; б) графики обычного тормозного излучения при столкновении частицы α (с начальным импульсом p_α) с частицей β (с начальным импульсом p_β).

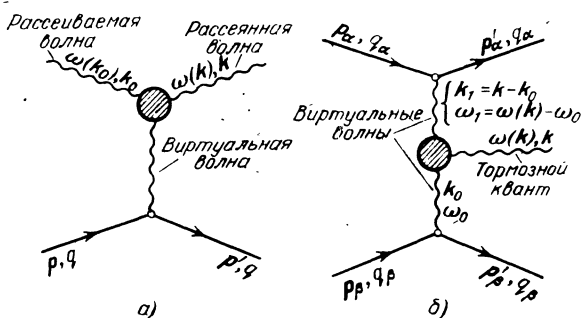


Рис. 16. а) График переходного рассеяния (в пределе $M \rightarrow \infty$ имеем $p' = p$); б) график переходного тормозного излучения (в пределе $M_\alpha, M_\beta \rightarrow \infty$ имеем $p_\alpha = p_\alpha, p_\beta = p_\beta$).

Общая теория тормозного излучения при столкновении частиц может строиться только при учете переходного тормозного излучения и его интерференции с обычным тормозным излучением. С уменьшением плотности среды роль переходного тормоз-

ного излучения, вообще говоря, падает. Чаще всего при этом падает значение той критической частоты, ниже которой переходное тормозное излучение существенно (см. ниже). Для ультрарелятивистских электронов, как отмечалось, всегда существует такая область частот, где доминирует переходное тормозное излучение. Это связано с подавлением обычного тормозного излучения ультрарелятивистских частиц при низких частотах (так называемый эффект плотности в обычном тормозном излучении [106, 107]).

§ 5.2. Эффект плотности в обычном тормозном излучении

1. Плотность тока. Эффект плотности в обычном тормозном излучении состоит в том, что для ультрарелятивистских частиц обычное тормозное излучение подавляется при излучении частот

$$\omega \ll \omega_c \equiv \omega_{pe} \mathcal{E} / M c^2, \quad (5.1)$$

где $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi N_e e^2 / m_e}$ — плазменная частота среды.

Качественно неравенство (5.1) можно получить следующим образом. Интенсивность излучения ультрарелятивистских частиц в среде определяется обычно некоей степенью фактора

$$\frac{1}{1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta} \approx \frac{1}{(M c^2 / \mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2 / \omega^2}, \quad (5.2)$$

причем правая часть равенства (5.2) написана для $\theta^2 \ll 1$, $\omega_{pe}^2 / \omega^2 \ll 1$, $(M c^2 / \mathcal{E})^2 \ll 1$. Если θ порядка $M c^2 / \mathcal{E}$, то существенное уменьшение фактора (5.2) наступает как раз при выполнении неравенства (5.1). Эффект этот называется эффектом плотности, так как возникает из-за наличия среды, и максимальная частота, удовлетворяющая (5.1), зависит от плотности среды.

Эффект плотности хорошо известен и в других процессах излучения релятивистских частиц, например, в синхротронном излучении [108—110] (см. также [4], гл. 6).

Рассмотрим теперь количественно эффект плотности в рамках квазиклассической теории обычного тормозного излучения. Простоты ради ограничимся случаем столкновения легкого заряда q_α с тяжелым зарядом $q_\beta = Zq$. Тяжелый заряд будем считать покоящимся в точке $z = 0$, а легкий — пролетающим мимо него на прицельном расстоянии $\Delta x = b$ (b — это то минимальное расстояние, на котором легкий заряд пролетел бы мимо тяжелого, если бы он не отклонялся последним; см. рис. 17).

Поле тяжелого заряда можно записать в виде

$$\mathbf{E}^{q_\beta}(\mathbf{r}) = \frac{q_\beta \mathbf{r}}{r^3}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{E}_{\omega_0, \mathbf{k}_0}^{q_\beta} = - \frac{4\pi i q_\beta \mathbf{k}_0 \delta(\omega_0)}{(2\pi)^3 k_0^2 \epsilon(0, \mathbf{k}_0)}. \quad (5.4)$$

Наличие $\epsilon(0, \mathbf{k}_0)$ в знаменателе (5.4) отражает экранировку средней поля тяжелого заряда *). Заряд q_α отклоняется полем заряда q_β . Это изменение траектории заряда, а следовательно, и создаваемого им тока будем рассматривать по теории возмущений, считая, что в первом приближении заряд q_α движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\mathbf{v}_\alpha$. Дополнительную плотность тока, создаваемую зарядом под действием поля волн, мы уже находили

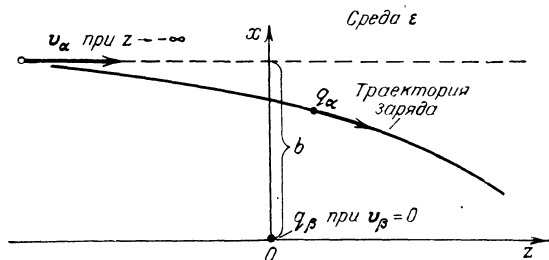


Рис. 17. Схематическое изображение траектории заряда q_α , отклоняющегося покоящимся при $\mathbf{r} = 0$ тяжелым зарядом q_β (b — прицельный параметр).

в § 3.8 (формула (3.330)) и § 4.7 (формула (4.175)). Мы можем воспользоваться этими результатами, учтя, что поле «волн» соответствует (5.4), а заряд движется на расстоянии $\mathbf{b}$ от оси z ($\mathbf{b}$ — вектор, перпендикулярный оси z с длиной, равной прицельному расстоянию b):

$$\delta j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{q_\alpha} = \int \Lambda_{ij}^{q_\alpha}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{b}] E_{j,\omega_0,\mathbf{k}_0}^{q_\beta} \times \\ \times \delta(\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{v}_\alpha) d\omega_0 d\mathbf{k}_0, \quad (5.5)$$

где $\Lambda_{ij}^{q_\alpha}$ задается выражением (3.176). Уже из (5.5) ясно, что речь идет о рассеянии виртуальных волн частоты ω_0 и волнового вектора $\mathbf{k}_0$ в реальные, например, электромагнитные, с частотой $\omega(\mathbf{k})$ и волновым вектором $\mathbf{k}$ (закон сохранения энергии при рассеянии описывается δ -функцией (5.5)). Подставив (3.176) и (5.4) в (5.5), получаем (здесь $\epsilon(0, \mathbf{k}_0)$ считается зависящим от $k_0 = |\mathbf{k}_0|$)

$$\delta j_{\omega,\mathbf{k}}^{q_\alpha} = \frac{4\pi q_\alpha^2 q_\beta^2 c^2}{(2\pi)^6 \mathcal{E}_\alpha(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)^2} \int \frac{\exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{b}]}{k_0^2 \epsilon(0, k_0)} \times \\ \times [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{k} \mathbf{k}_0 + (\mathbf{k}_0 + \omega \mathbf{v}_\alpha / c^2)(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)] \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha + \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\alpha) d\mathbf{k}_0. \quad (5.6)$$

2. Интенсивность тормозного излучения. Найдем вначале энергию поля излучения $\mathbf{E}^r$, создаваемого током (5.6) (пространственной дисперсией излучаемых электромагнитных волн пренебрегаем):

$$\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^r = \frac{4\pi i \omega}{c^2 (k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)/c^2)} \left\{ \delta j_{\omega,\mathbf{k}}^{q_\alpha} - \frac{\mathbf{k}}{k^2} \mathbf{k} \delta j_{\omega,\mathbf{k}}^{q_\alpha} \right\}. \quad (5.7)$$

*) В изотропной среде с пространственной дисперсией $\epsilon(0, \mathbf{k}_0) = \epsilon^l(0, k_0)$. В общем случае $\epsilon(0, \mathbf{k}_0) = k_{0i} k_{0j} \epsilon_{ij}(0, \mathbf{k}_0) / k_0^2$.

Получаем

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha}^r &= - \int \delta \mathbf{j}^{\alpha}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^r(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt = - (2\pi)^4 \int \delta \mathbf{j}_{-\omega, -\mathbf{k}}^{\alpha} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^r d\omega d\mathbf{k} = \\
 &= - \frac{64\pi^5 i}{c^2} \int \frac{\omega d\omega d\mathbf{k}}{k^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2} \left(\delta \mathbf{j}_{-\omega, -\mathbf{k}}^{\alpha} \left(\delta \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{\alpha} - \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k}' \delta \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{\alpha}) \right) \right) = \\
 &= \frac{(2\pi)^6}{c^2} \int \frac{|\omega|}{k^2} |\left[\mathbf{k} \delta \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{\alpha} \right]|^2 \delta \left(k^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2} \right) d\omega d\mathbf{k}. \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Подставив сюда значение тока $\delta \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{\alpha}$ из (5.6), находим

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha}^r &= \frac{(4\pi)^2 c^4 q_{\alpha}^2}{\mathcal{E}_{\alpha}^2 (2\pi)^6} \int \frac{|\omega| \exp[i\mathbf{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'_0)] d\omega d\mathbf{k} d\mathbf{k}_0 d\mathbf{k}'_0}{k^2 k_0^2 (k'_0)^2 \varepsilon(0, k_0) \varepsilon(0, k'_0)} \times \\
 &\quad \times \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{k}_0\mathbf{v}_{\alpha}) \delta((\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'_0)\mathbf{v}_{\alpha}) (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})^{-4} \times \\
 &\quad \times R(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) R(\mathbf{k}, \mathbf{k}'_0) \delta(k^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2), \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

$$R(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = [\mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}] (\mathbf{k}\mathbf{k}_0 + \omega(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})/c^2) + [\mathbf{k}\mathbf{k}_0] (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}). \quad (5.10)$$

Пусть, далее, N_{β} — число зарядов q_{β} в единице объема среды, через которую проходит заряд q_{α} . Тогда число столкновений в единицу времени заряда q_{α} будет $|\mathbf{v}_{\alpha}| N_{\beta} db_x db_y$. Потери энергии получатся интегрированием по всем возможным значениям b_x и b_y . Так как вектор $\mathbf{b}$ — это двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{v}_{\alpha}$, то можно записать

$$\int \exp[i\mathbf{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'_0)] d\mathbf{b} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k}_{0,\perp} - \mathbf{k}'_{0,\perp}), \quad (5.11)$$

где индекс $\perp$ указывает на направление, перпендикулярное $\mathbf{v}_{\alpha}$ (т. е. оси z , см. рис. 17). Далее,

$$\delta((\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'_0)\mathbf{v}_{\alpha}) = \frac{1}{|\mathbf{v}_{\alpha}|} \delta(k_{0,z} - k'_{0,z}). \quad (5.12)$$

Другими словами, в формуле (5.9) $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}'_0$. Наконец, функция $\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha} + k_{0,z}\mathbf{v}_{\alpha})$ используется при интегрировании по $k_{0,z}$. Окончательно получаем ($\mathbf{k}_{0,\perp} = \mathbf{x}$) для мощности излучения заряда

$$\begin{aligned}
 Q_{\alpha}^r &= Q_{\alpha}^{\text{ор.б}} = \frac{2q_{\alpha}^4 q_{\beta}^2 N_{\beta} c^2}{\pi v_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}^2} \int_0^{\infty} d\omega \int \frac{\omega \delta(k^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2)}{k^2 (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})^2} d\mathbf{k} \times \\
 &\quad \times \int_0^{\infty} \frac{x^2}{[\mathbf{x}^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})^2 / v_{\alpha}^2]^2} \varepsilon(0, \sqrt{\mathbf{x}^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})^2 / v_{\alpha}^2})^2 \times \\
 &\quad \times \{k^2 (\mathbf{x}^2 + \omega^2 (1 - v_{\alpha}^2/c^2)^2 [\mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}]^2 / k^2 v_{\alpha}^4) + \\
 &\quad + \mathbf{x}^2 [\mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}]^2 (k^2 v_{\alpha}^2 - \omega^2) / 2v_{\alpha}^2 (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha})^2\}. \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

Влияние среды на тормозное излучение в данном случае сказывается в двух отношениях: с одной стороны, экранируются

поля тяжелых частиц (фактор $\varepsilon(0, \sqrt{\kappa^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)^2/v_\alpha^2})$ в знаменателе (5.13)), а, с другой стороны, изменяется распространение излучаемых волн (проницаемость $\varepsilon(\omega)$ в δ -функции (5.13)). Интегрируя в (5.13) по k^2 , получим распределение интенсивности излучения по углам и частотам

$$Q_\alpha^{\text{ор.б}} = \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi Q_\alpha^{\text{ор.б}}(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (5.14)$$

где

$$Q_\alpha^{\text{ор.б}} = \frac{q_\alpha^4 q_\beta^2 N_\beta c \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{\pi v_\alpha \mathcal{E}_\alpha^2 [1 - (v_\alpha/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta]^2} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\kappa^2 + \omega^2 \left(1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}\right)^2 \frac{1}{v_\alpha^2} \sin^2 \theta - \frac{\kappa^2 \sin^2 \theta (1 - \varepsilon(\omega) v_\alpha^2/c^2)}{2 [1 - (v_\alpha/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta]^2}}{|\varepsilon(0, \sqrt{\kappa^2 + \omega^2 [1 - (v_\alpha/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta]^2 / v_\alpha^2})|^2} \times \\ \times \frac{d\kappa^2}{[\kappa^2 + \omega^2 [1 - (v_\alpha/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta]^2 / v_\alpha^2]}. \quad (5.15)$$

Отметим, что $\hbar\kappa$ соответствует импульсу, передаваемому заряду в процессе тормозного излучения ($\kappa \sim 1/b$ — величина, обратная прицельному параметру b , см. (5.11)). Полная интенсивность излучения (5.15) получается интегрированием по всем передаваемым импульсам. Рассмотрим простейший случай экранировки, когда

$$\varepsilon(0, k) = 1 + 1/(k^2 d^2), \quad (5.16)$$

где d — радиус экранировки. Потенциал, создаваемый зарядом q_β , в случае справедливости (5.16) имеет вид

$$\varphi_\beta = (q_\beta/r) \exp(-r/d). \quad (5.17)$$

Такая статическая экранировка может иметь место в плазме (тогда d — это дебаевский радиус, см. гл. 6) или для отдельного атома в приближении Хартри.

Мощность излучения в случае экранировки (5.16) записывается в следующем виде:

$$Q_\alpha^{\text{ор.б}}(\omega, \theta) = \frac{q_\alpha^4 q_\beta^2 N_\beta c \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{\pi v_\alpha \mathcal{E}_\alpha^2 [1 - (v_\alpha/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta]^2} \times \\ \times \left\{ \int_0^\infty \left[1 - \frac{(1 - \varepsilon(\omega) v_\alpha^2/c^2) \sin^2 \theta}{2 [1 - (v_\alpha/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta]^2} \right] d\kappa^2 \left[\kappa^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega^2}{v_\alpha^2} \left(1 - \frac{v_\alpha}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{d^2} \right]^{-1} + \int_0^\infty \left\{ \frac{\omega^2}{v_\alpha^2} \sin^2 \theta \left[\left(1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2} \right)^2 + \right. \right. \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \left(1 - \varepsilon(\omega) \frac{v_\alpha^2}{c^2} \right) \left] - \frac{1}{d^2} \left[1 - \frac{(1 - \varepsilon(\omega) v_\alpha^2/c^2) \sin^2 \theta}{2 [1 - (v_\alpha/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta]^2} \right] \right\} \times \\ \times \left[\kappa^2 + \frac{\omega^2}{v_\alpha^2} \left(1 - \frac{v_\alpha}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{d^2} \right]^{-2} d\kappa^2 \}. \quad (5.18)$$

Первый интеграл (5.18), содержащий первую степень κ^2 в знаменателе, расходится при больших значениях κ^2 (малых значениях b^2) и, как обычно, нужно ввести обрезание интеграла (5.18) на некотором $\kappa_{\max}$, значение которого определяется из квантового расчета (точнее, из «сшивания» с результатом квантового расчета). Величина $\kappa_{\max}$ входит лишь под знаком логарифма и для нас сейчас ее точное значение мало существенно.

Проводя интегрирование в (5.18) по κ^2 , получаем

$$Q_\alpha^{\text{or.b}}(\omega, \theta) = \frac{q_\alpha^4 q_\beta^2 N_\beta c \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{\pi v_\alpha \mathcal{E}_\alpha^2 [1 - (v_\alpha/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta]^2} \times \\ \times \left\{ \left[1 - \frac{(1 - \varepsilon(\omega) v_\alpha^2/c^2) \sin^2 \theta}{2 [1 - (v_\alpha/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta]^2} \right] \times \right. \\ \times \ln \frac{\kappa_{\max}^2}{(\omega^2/v_\alpha^2) [1 - (v_\alpha/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta]^2 + 1/d^2} + \\ + \left[\frac{\omega^2}{v_\alpha^2} \sin^2 \theta \left(\left(1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \varepsilon(\omega) \frac{v_\alpha^2}{c^2} \right) \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{d^2} \left(1 - \frac{(1 - \varepsilon(\omega) v_\alpha^2/c^2) \sin^2 \theta}{2 [1 - (v_\alpha/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta]^2} \right) \right] \times \\ \left. \times \left[\frac{\omega^2}{v_\alpha^2} \left(1 - \frac{v_\alpha}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{d^2} \right]^{-1} \right\}. \quad (5.19)$$

3. Излучение ультрарелятивистских частиц. Для ультрарелятивистских частиц с зарядом q_α (пусть это будут, например, электроны) основной максимум излучения приходится на малые углы по отношению к скорости частицы и, кроме того, $1 - \varepsilon = \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2$, $\omega_{\text{pe}}^2/\omega^2 \ll 1$, $\mathcal{E}_\alpha \gg M_\alpha c^2$ и $\theta^2 \ll 1$.

Тогда из (5.19) следует

$$Q_\alpha^{\text{or.b}}(\omega, \theta) = \frac{4q_\alpha^4 q_\beta^2 N_\beta}{\pi \mathcal{E}_\alpha^2 [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]^2} \times \\ \times \left\{ \left[1 - \frac{2\theta^2 [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]}{[(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]^2} \right] \times \right. \\ \times \ln \frac{4\kappa_{\max}^2 c^2/\omega^2}{(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \theta^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2 + 4c^2/d^2\omega^2} + \left[2\theta^2 \left(\left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^2 + \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \right) - \right.$$

$$- \frac{4c^2}{d^2\omega^2} \left[1 - \frac{\theta^2 ((M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2)}{(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2} \right] \times \\ \times \left[\left(\left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^2 + \theta^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)^2 + \frac{4c^2}{d^2\omega^2} \right]^{-1} \}. \quad (5.20)$$

Роль экранировки сводится к видоизменению подлогарифмического выражения в интенсивности излучения (5.20). Что касается второго нелогарифмического члена (5.20), то его зависимость от радиуса экранировки d весьма слабая (d входит и в числитель, и в знаменатель).

Положим

$$d = \omega_{pe}/v_T. \quad (5.21)$$

В случае плазмы v_T — средняя тепловая скорость частиц, в случае металлов v_T может иметь порядок скорости электронов на поверхности Ферми. Из (5.20) видно, что ролью экранировки поля рассеивающего заряда q_b можно пренебречь, если выполнено неравенство

$$\omega \gg \omega_{scr} \equiv 2(c/v_T)\omega_{pe}(\mathcal{E}_\alpha/M_\alpha c^2)^2. \quad (5.22)$$

Поскольку чаще всего $c \gg v_T$, критическая частота ω_{scr} обычно много больше той частоты $\omega_c = \omega_{pe}\mathcal{E}_\alpha/M_\alpha c^2$, при которой начинает проявляться эффект плотности (см. (5.1)). Формула Бете — Гайтлера для тормозного излучения получается из (5.20) при $\omega \gg \omega_{scr}$ (см. (5.246)). Если же выполнено противоположное неравенство, то из (5.20) можно получить общую формулу, учитывающую и эффект плотности (и справедливую при любом соотношении между ω и ω_c , но $\omega \ll \omega_{scr}$):

$$Q_\alpha^{or.b}(\omega, \theta) = \frac{4q_\alpha^4 q_b^2 N_\beta (\ln \kappa_{\max}^2 d^2 - 1)}{\pi \mathcal{E}_\alpha^2 [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^2} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{2\theta^2 [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]}{[(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^2} \right\}. \quad (5.23)$$

Интегрируя эту интенсивность по углам, получаем

$$Q_\alpha^{or.b}(\omega) = \int_0^\infty Q_\alpha^{or.b}(\omega, \theta) \pi d\theta^2 = \frac{16q_\alpha^4 q_b^2 N_\beta [\ln(\kappa_{\max} d) - 1/2]}{3M_\alpha^2 c^4 [1 + (\mathcal{E}_\alpha/M_\alpha c^2)^2 \omega_{pe}^2/\omega^2]}. \quad (5.24a)$$

По сравнению с формулой Бете — Гайтлера

$$Q_\alpha^{B.-H}(\omega) = \frac{16q_\alpha^4 q_b^2 N_\beta}{3M_\alpha^2 c^4} \left(\ln \frac{2\mathcal{E}_\alpha}{\hbar\omega} - 1/2 \right) \quad (5.24b)$$

формула (5.24) содержит другое подлогарифмическое выражение (экранировка) и еще дополнительный множитель (эффект

плотности) F :

$$F = \frac{1}{1 + (\mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2)^2 \omega_{pe}^2 / \omega^2} = \frac{1}{1 + (\omega_c / \omega)^2}, \quad (5.25)$$

который сильно подавляет обычное тормозное излучение при $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2 = \omega_c$. При этом интенсивность излучения падает при уменьшении ω как ω^2 . Этот эффект подавления тормозного излучения на малых частотах был получен в [106], а затем повторен в [107]; с учетом правильного подлогарифмического выражения он был получен только в [43]. Вследствие подавления обычного тормозного излучения в области малых частот, доминирующим, как мы увидим, может стать переходное тормозное излучение, которое не подавляется эффектом плотности.

§ 5.3. Общая теория переходного тормозного излучения

1. Плотность тока, приводящая к переходному тормозному излучению. Рассмотрим две частицы с зарядами q_α и q_β , движущиеся в среде прямолинейно с неизменными значениями скоростей v_α и v_β соответственно. Мы будем вначале полностью пренебрегать обычным тормозным излучением и считать, что под действием поля одной из частиц другая частица совсем не отклоняется от первоначального прямолинейного движения и не меняет значения своей скорости. Такая ситуация может приближенно реализоваться либо при столкновении двух очень тяжелых частиц, либо даже при столкновении легких частиц при больших параметрах удара (т. е. в случае, когда они пролетают далеко друг от друга). Задача состоит в отыскании плотности тока, ответственной за излучение частиц при таком их столкновении.

Пусть система координат выбрана так, что частица β , при $t = 0$, имеет координату $\mathbf{r} = 0$, а частица α , при $t = 0$, имеет координату $\mathbf{r} = \mathbf{b}$ *). Токи, создаваемые частицами, будут

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{q\beta} = \frac{q_\beta v_\beta}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k} v_\beta), \quad (5.26)$$

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{q\alpha} = \frac{q_\alpha v_\alpha}{(2\pi)^3} \exp(i \mathbf{k} \mathbf{b}) \delta(\omega - \mathbf{k} v_\alpha). \quad (5.27)$$

Поля, создаваемые этими токами в линейном приближении, равны

$$E_{i, \omega, \mathbf{k}}^{q\alpha, \beta} = G_{ij}(\omega, \mathbf{k}) j_{j, \omega, \mathbf{k}}^{q\alpha, \beta}, \quad (5.28)$$

где $G_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ — функция Грина уравнений Максвелла (см. (4.60), (4.61)). Напомним, что общая теория переходного рассеяния в средах с пространственной дисперсией в гл. 4 строилась на базе

*) Как будет видно из дальнейшего, в окончательный результат войдет проекция вектора $\mathbf{b}$ на направление, перпендикулярное относительной скорости частиц $v_\alpha - v_\beta$. Выше эта проекция (при $v_\beta = 0$) соответствовала вектору $\mathbf{b}$, величина которого равна прицельному параметру b .

выражения для нелинейного тока среды

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{nl} = \int S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) E_{l,\omega_0,\mathbf{k}_0} E_{j,\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} d\omega_0 d\mathbf{k}_0 = \\ = \int S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) E_{l,\omega_0,\mathbf{k}_0} E_{j,\omega_1,\mathbf{k}_1} \times \\ \times \delta(\omega - \omega_0 - \omega_1) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1) d\omega_0 d\omega_1 d\mathbf{k}_0 d\mathbf{k}_1. \quad (5.29)$$

Коэффициенты нелинейного тока S_{ijl} , как отмечалось, всегда можно считать симметричными при замене $1 \rightleftharpoons 0$. В форме, соответствующей первому из равенств (5.29), эта симметрия отвечает замене $\mathbf{k}_0 \rightleftharpoons \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$, $\omega_0 \rightleftharpoons \omega - \omega_0$.

При построении теории переходного рассеяния мы подставляем в соотношение типа (5.29) в качестве одного из полей поле одной (первой) из частиц (5.28), а в качестве другого из полей — поле рассеиваемой волны. В данном случае (для переходного тормозного излучения) рассеиваемым полем должно быть поле, создаваемое второй из сталкивающихся частиц, т. е.

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{nl} = 2 \int S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) E_{l,\omega_0,\mathbf{k}_0}^{q\beta} E_{j,\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}^{q\alpha} d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (5.30)$$

Коэффициент 2 в (5.30) получен при учете отмеченных выше условий симметрии коэффициентов S_{ijl} . Подставив в (5.30) соотношения (5.26)–(5.28), получаем

$$j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{nl} = 2q_\alpha q_\beta (2\pi)^{-3} \int S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) \times \\ \times G_{ls}(\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) G_{jn}(\omega - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) v_{\beta,s} v_{\alpha,n} \times \\ \times \exp[-i\mathbf{b}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)] \delta(\omega - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\alpha) d\mathbf{k}_0. \quad (5.31)$$

Входящая в (5.31) δ -функция отражает закон сохранения энергии при переходном тормозном излучении

$$\omega = \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\alpha. \quad (5.32)$$

При $\mathbf{v}_\beta = 0$ соотношение (5.32) совпадает с тем, которое фигурировало в (5.9) для обычного тормозного излучения.

Закон сохранения (5.32) может быть просто получен из квантовых соображений. Действительно, пусть до столкновения частицы обладали импульсами $\mathbf{p}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\beta$, а в результате столкновения от частицы β к частице α был передан импульс $\hbar \mathbf{k}_0$ и, кроме того, была излучена волна с энергией $\hbar \omega(\mathbf{k})$ и импульсом $\hbar \mathbf{k}$ (эта волна и отвечает тормозному кванту). Конечные импульсы после столкновения у частиц будут $\mathbf{p}'_\alpha$ и $\mathbf{p}'_\beta$:

$$\mathbf{p}'_\alpha = \mathbf{p}_\alpha + \hbar \mathbf{k}_0 - \hbar \mathbf{k}, \quad \mathbf{p}'_\beta = \mathbf{p}_\beta - \hbar \mathbf{k}_0. \quad (5.33)$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) + \mathcal{E}_\beta(\mathbf{p}_\beta) = \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha) + \mathcal{E}_\beta(\mathbf{p}'_\beta) + \hbar \omega(\mathbf{k}). \quad (5.34)$$

Далее, в квазиклассическом приближении

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha) = \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha + \hbar \mathbf{k}_0 - \hbar \mathbf{k}) \approx \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) + \hbar \mathbf{v}_\alpha (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}), \quad (5.35)$$

$$\mathcal{E}_\beta(\mathbf{p}'_\beta) = \mathcal{E}_\beta(\mathbf{p}_\beta - \hbar \mathbf{k}_0) \approx \mathcal{E}_\beta(\mathbf{p}_\beta) - \hbar \mathbf{v}_\beta \mathbf{k}_0 \quad (5.36)$$

и, следовательно,

$$\omega(\mathbf{k}) = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta. \quad (5.37)$$

Это уравнение отличается от (5.32) тем, что вместо ω входит конкретная дисперсионная ветвь $\omega(\mathbf{k})$. Кажущаяся несимметрия (5.32) и (5.37) относительно замены частицы α на частицу β в действительности отсутствует. Это видно из отмеченной выше симметрии нелинейных коэффициентов S_{ijl} в (5.30) относительно замен $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 \rightleftharpoons \mathbf{k}_0$, $\omega - \omega_0 \rightleftharpoons \omega_0$. Поэтому с учетом этих замен мы могли бы вместо (5.32) записать

$$\omega = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\beta + \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\alpha. \quad (5.38)$$

Такая замена соответствует тому, что по-другому определяется импульс $\hbar \mathbf{k}_0$, передаваемый от одной частицы другой частице при их столкновении ($\mathbf{p}'_\alpha = \mathbf{p}_\alpha - \hbar \mathbf{k}_0$, $\mathbf{p}'_\beta = \mathbf{p}_\beta + \hbar \mathbf{k}_0 - \hbar \mathbf{k}$; ср. с (5.33), см. также рис. 16, б, $\mathbf{k}_0$ соответствует $\mathbf{k}_1$).

2. Мощность переходного тормозного излучения. Рассмотрим вначале переходное тормозное излучение поперечных электромагнитных волн (затем мы покажем, как получить тормозное излучение волн других поляризаций). Энергия излучения W^Γ электромагнитных волн током (5.31) будет описываться формулой, аналогичной (5.8):

$$W^\Gamma = \frac{2(2\pi)^6}{c^2} \int_0^\infty \omega d\omega \int \frac{1}{k^2} |[\mathbf{k} \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{nl}}]|^2 \delta \left(k^2 - \frac{\varepsilon(\omega) \omega^2}{c^2} \right) d\mathbf{k}. \quad (5.39)$$

Подставив в (5.39) нелинейный ток (5.31), получаем

$$\begin{aligned} W^\Gamma = & \frac{8q_\alpha^2 q_\beta^2}{(2\pi)^6 c^2} \int_0^\infty \omega d\omega \int \left(\delta_{ii'} - \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \right) S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) \times \\ & \times S_{i'j'l'}(-\omega, -\mathbf{k}; -\mathbf{k}_0' \mathbf{v}_\beta, -\mathbf{k}_0') G_{ls}(\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) \times \\ & \times v_{\beta, s} v_{\alpha, n} v_{\beta, s'} v_{\alpha, n'} G_{jn}(\omega - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times \\ & \times G_{l's'}(-\mathbf{k}_0' \mathbf{v}_\beta, -\mathbf{k}_0') G_{j'n'}(-\omega + \mathbf{k}_0' \mathbf{v}_\beta, -\mathbf{k} + \mathbf{k}_0') \times \\ & \times \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}_0 (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{v}_\alpha)) \delta((\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_0') (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)) \times \\ & \times \delta(k^2 - \varepsilon(\omega) \omega^2 / c^2) d\mathbf{k} d\mathbf{k}_0 d\mathbf{k}_0'. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Пусть теперь частицы α с импульсами $\mathbf{p}_\alpha$ проходят через пространственно однородную в среднем «среду», состоящую из частиц β , распределение которых по импульсам $\mathbf{p}_\beta$ задается функ-

цией распределения $f_{p\beta}$. Будем считать, что функция распределения $f_{p\beta}$ нормирована так, что концентрация частиц β (их число в 1 см³) N_β определяется формулой

$$N_\beta = \int f_{p\beta} \frac{d^3 p_\beta}{(2\pi)^3}.$$

Можно выделить группу частиц этого распределения с импульсом, лежащим в пределе от p_β до $p_\beta + dp_\beta$, т. е. $dN_\beta = f_{p\beta} d^3 p_\beta (2\pi)^{-3}$. Все такие частицы имеют одинаковые скорости. Перейдя в систему отсчета, в которой их скорость равна нулю, мы сведем задачу к задаче об излучении частицы α в среде из покоящихся частиц β (см. § 5.1). Если обозначать штрихом все величины, относящиеся к этой системе отсчета, то для получения интенсивности излучения в 1 с нужно умножить W' на $dN'_\beta |v'_\alpha| db'$, где b' перпендикулярно v'_α , и проинтегрировать по всем b' .

Для того чтобы не усложнять изложения, и в связи с тем, что в дальнейшем будет рассматриваться частный случай, когда релятивистскими являются только частицы α , будем считать частицы β нерелятивистскими (о переходном тормозном излучении в случае, когда обе сталкивающиеся частицы ультрарелятивистские, см. [44]). В случае нерелятивистских частиц β величина $|v'_\alpha| = |v_\beta - v_\alpha|$ совпадает с относительной скоростью частиц, а интегрирование по b' сводится к интегрированию по b (в связи с входящей в (5.40) δ -функцией $\delta((k - k'_0)(v_\beta - v_\alpha))$ вектор b должен быть перпендикулярным вектору $v_\beta - v_\alpha$). Итак,

$$\int \exp[-i(k_0 - k'_0)b] db = (2\pi)^2 \delta(k_{0,\perp} - k'_{0,\perp}), \quad (5.41)$$

где индекс $\perp$ указывает на то, что соответствующий вектор перпендикулярен $v_\beta - v_\alpha$. Для интенсивности излучения частиц α получаем

$$Q_\alpha^{\text{tr},b} = \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int Q_{p_\alpha, p_\beta}^{\text{tr},b}(\omega, \theta, \varphi) f_{p_\beta} \frac{d^3 p_\beta}{(2\pi)^3}, \quad (5.42)$$

где θ — угол между k и $v_\beta - v_\alpha$, а

$$\begin{aligned} Q_{p_\alpha, p_\beta}^{\text{tr},b}(\omega, \theta, \varphi) &= \frac{q_\alpha^2 q_\beta^2 \omega^2 \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{4\pi^4 c^2} \left(\delta_{ii'} - \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \right) \times \\ &\times \int S_{ijl}(\omega, k; k_0 v_\beta, k_0) S_{i'j'l'}(-\omega, -k; -k_0 v_\beta, -k_0) \times \\ &\times G_{ls}(k_0 v_\beta, k_0) G_{l's'}(-k_0 v_\beta, -k_0) v_{\beta,s} v_{\beta,s'} v_{\alpha,n} v_{\alpha,n'} \times \\ &\times G_{jn}(\omega - k_0 v_\beta, k - k_0) G_{j'n'}(-\omega + k_0 v_\beta, -k + k_0) \times \\ &\times \delta(\omega - k v_\alpha - k_0(v_\beta - v_\alpha)) dk_0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Здесь

$$|k| = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \omega / c. \quad (5.44)$$

При получении (5.43) мы для интегрирования по k^2 использовали $\delta(k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)/c^2)$.

3. Вероятность переходного тормозного излучения. При введении вероятности переходного тормозного излучения удобно отнести ее к единичному интервалу импульсов испущенных квантов $d\mathbf{k}(2\pi)^{-3}$ (нормированному на единичный фазовый объем $(2\pi\hbar)^3$) и к единичному интервалу передаваемого импульса $d\mathbf{k}_0(2\pi)^{-3}$ (с соответствующей нормировкой). Удобнее в данном случае использовать в (5.40) $\delta(k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)/c^2)$ для интегрирования по частотам (а не по k^2 , как в (5.43)). Вероятность $w_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta}^{\text{tr. b}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ переходного тормозного излучения определим так, чтобы мощность излучения частиц описывалась бы простой наглядной формулой

$$Q_\alpha^{\text{tr. b}} = \int \hbar \omega(\mathbf{k}) w_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta}^{\text{tr. b}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{f_{\mathbf{p}_\beta} d\mathbf{p}_\beta}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^6}. \quad (5.45)$$

Тогда из (5.40) получаем

$$w_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta}^{\text{tr. b}} = v_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta}^{\text{tr. b}} \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}_0 (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{v}_\alpha)), \quad (5.46)$$

где

$$v_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta}^{\text{tr. b}} = \frac{8(2\pi)^2 q_\alpha^2 q_\beta^2 (\delta_{ii'} - k_i k_{i'}/k^2)}{\hbar \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon(\omega) \right]_{\omega=\omega(\mathbf{k})}} \times \\ \times S_{ijl}(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}; \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) S_{i'j'l'}(-\omega(\mathbf{k}), -\mathbf{k}; -\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, -\mathbf{k}_0) \times \\ \times G_{ls}(\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) G_{jn}(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) G_{l's'}(-\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, -\mathbf{k}_0) \times \\ \times G_{j'n'}(-\omega(\mathbf{k}) + \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, -\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) v_{\beta, s} v_{\beta, s'} v_{\alpha, n} v_{\alpha, n'}. \quad (5.47)$$

Формула (5.45) имеет простую интерпретацию: для получения мощности излучения нужно вероятность излучения умножить на энергию излучаемого кванта и число излучателей, а затем проинтегрировать (просуммировать) по всем возможным состояниям излучателей и по всем возможным излучаемым и передаваемым импульсам. Вероятность (5.46) можно записать, введя матричный элемент $M_i^{\alpha\beta}$ для переходного тормозного излучения:

$$M_i^{\alpha\beta} = 2q_\alpha q_\beta S_{ijl}(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}; \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) v_{\beta, s} v_{\alpha, n} \times \\ \times G_{ls}(\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) G_{jn}(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, -\mathbf{k} + \mathbf{k}_0). \quad (5.48)$$

Тогда

$$w_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta}^{\text{tr. b}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{2(2\pi)^2 |[\mathbf{k} M^{\alpha\beta}]|^2 \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}_0 (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta))}{\hbar k^2 \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon(\omega) \right]_{\omega=\omega(\mathbf{k})}}. \quad (5.49)$$

4. Интерференция обычного и переходного тормозного излучения. Общая теория тормозного излучения должна, как уже под-

черкивалось, учитывать как обычное тормозное излучение, так и переходное тормозное излучение и их интерференцию друг с другом. Для этого нужно суммировать токи (5.30) и (5.5), причем учесть ток (5.5), создаваемый не только частицей α , но и частицей β (если одна из частиц β , например, является тяжелой, то ее обычное тормозное излучение мало и током (5.5) для частицы β можно пренебречь). В формуле (5.5) частица β была покоящейся (что, впрочем, отражено в том, что поле $E^{\alpha\beta}$ подставлялось в форме (5.4), соответствующей покоящейся частице).

В общем случае движущейся частицы β (причем с необходимой точностью ее скорость можно считать постоянной и равной v_β) из (5.5) получаем

$$\delta j_{i,\omega,\mathbf{k}} = \frac{q_\beta}{(2\pi)^3} \int \Lambda_{ij}^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) G_{jl}(\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) v_{\beta,l} \times \\ \times \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{b}] \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}_0 (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{v}_\alpha)) d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (5.50)$$

Сравнивая (5.50) с (5.31), мы можем ввести матричный элемент обычного тормозного излучения частицы

$$M_i^\alpha = q_\beta (2\pi)^3 \Lambda_{ij}^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) G_{jl}(\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) v_{\beta,l}. \quad (5.51)$$

Ток, описывающий тормозное излучение частицы β (т. е. связанный с отклонением траектории частицы β от прямолинейной), будет определяться выражением, сходным с (5.50), и соответствующий матричный элемент обычного тормозного излучения частицы β будет иметь вид

$$M_i^\beta = q_\alpha (2\pi)^3 \Lambda_{ij}^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; \omega - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) G_{jl}(\omega - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) v_{\alpha,l}. \quad (5.52)$$

В соответствие с этим, полная вероятность тормозного излучения будет равна

$$w_{\mathbf{p}\alpha,\mathbf{p}\beta}^b(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{2(2\pi)^2 |\mathbf{k} \mathbf{M}^b|^2}{\hbar k^2 \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon(\omega) \right]_{\omega=\omega(\mathbf{k})}} \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}_0 (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{v}_\alpha)), \quad (5.53)$$

где

$$\mathbf{M}^b = \mathbf{M}^\alpha + \mathbf{M}^\beta + \mathbf{M}^{\alpha\beta}. \quad (5.54)$$

Трем членам в (5.54) соответствуют три графика (см. рис. 15, б, 16, б), изображающих соответствующие процессы излучения. Следует отметить симметрию матричного элемента переходного тормозного излучения $\mathbf{M}^{\alpha\beta}$ относительно зарядов α и β , что видно непосредственно из рис. 16, б.

Кажущаяся несимметричность матричного элемента (5.48) исчезает, если вспомнить об отмеченной выше симметрии нелинейных коэффициентов S_{ijl} относительно замены $\mathbf{k}_0$ на $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ и ω_0 на $\omega - \omega_0$. Физический смысл такой замены ясен из графиче-

ского изображения процесса, описываемого $M^{\alpha\beta}$, на рис. 16, б. Как видно из этого графика, в случае переходного тормозного излучения имеется два виртуальных кванта, причем через $\hbar k_0$ можно обозначить импульс как виртуального кванта, испускаемого частицей β , так и виртуального кванта, испускаемого частицей α . Если импульс виртуального кванта, испускаемого частицей α , обозначим через $\hbar k_0$, а частоту — через $\hbar \omega_0$, то, в силу закона сохранения импульса в вершине, импульс второго виртуального кванта будет равен $\hbar(k - k_0)$ и энергия будет равна $\hbar(\omega - \omega_0)$. Поэтому указанная замена $k_0 \rightleftharpoons k - k_0$; $\omega_0 \rightleftharpoons \omega - \omega_0$ соответствует замене обозначения импульсов виртуальных квантов. Формально же матричный элемент S_{ijl} можно записать и симметричным образом, если использовать свойства симметрии коэффициентов нелинейных токов (см. также (3.192)):

$$S_{ijl}(\omega(k), k; k_0 v_\beta, k_0) = S_{ijj}(\omega(k), k; \omega(k) - k_0 v_\beta, k - k_0) = \\ = S_{ilj}(\omega(k), k; (k - k_0) v_\alpha, k - k_0). \quad (5.55)$$

В последнем равенстве (5.55) использован закон сохранения энергии при тормозном излучении (5.37). С учетом (5.37) можно также получить

$$G_{jn}(\omega(k) - k_0 v_\beta, k - k_0) = G_{jn}((k - k_0) v_\alpha, k - k_0). \quad (5.56)$$

Таким образом, матричный элемент (5.48) записывается в форме

$$M_i^{\alpha\beta} = q_\alpha q_\beta S_{ijl}(\omega(k), k; k_0 v_\beta, k_0) G_{js}(k_0 v_\beta, k_0) \times \\ \times G_{ln}((k - k_0) v_\alpha, k - k_0) v_{\beta,s} v_{\alpha,n} + \\ + q_\alpha q_\beta S_{ilj}(\omega(k), k; (k - k_0) v_\alpha, k - k_0) v_{\beta,s} v_{\alpha,n} \times \\ \times G_{ls}(k_0 v_\beta, k_0) G_{jn}((k - k_0) v_\alpha, k - k_0). \quad (5.57)$$

При замене $k_0 \rightleftharpoons k - k_0$ и $\alpha \rightleftharpoons \beta$ второй член (5.57) переходит в первый член (5.57).

Формула (5.53) записана в общем случае для излучения поперечных электромагнитных волн в средах, в которых диэлектрическая проницаемость зависит только от частоты $\epsilon = \epsilon(\omega)$. Однако легко видеть, что результаты расчета пригодны и для излучения поперечных волн в любых однородных изотропных средах с учетом пространственной дисперсии. Действительно, нелинейные отклики S_{ijl} до сих пор не конкретизировались, но пространственная дисперсия (зависимость от k и k_0) учитывалась. Поэтому единственное, что нужно изменить в (5.53) при учете пространственной дисперсии в изотропной среде, — это $\epsilon(\omega)$, а именно записать

$$\epsilon(\omega) \rightarrow \epsilon^t(\omega, k) \quad (5.58)$$

и учесть, что $\omega(k)$ уже будет решением уравнения

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^t(\omega, k) = 0. \quad (5.59)$$

Формула (5.53) допускает также и простое обобщение на любые анизотропные среды с пространственной дисперсией. Правда, при этом надо для таких сред знать коэффициенты нелинейных токов S_{ijl} . Кроме того, если анизотропия связана, например, с внешним магнитным полем, то выведенные выше коэффициенты $\Lambda_{ij}^{\alpha\beta}$ должны быть также видоизменены. Действительно, в магнитном поле в отсутствие волн частицы движутся по винтовым линиям (а не прямолинейно) и Λ_{ij} описывают токи, связанные с отклонением движения частиц под действием волн от простого вращения по винтовым линиям. Наконец, видоизменения коснутся и функции Грина $G_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, которая только в изотропной среде может быть записана в виде суммы функций Грина поперечного поля и функции Грина продольного поля. В этом смысле только в изотропной среде можно говорить о продольных и поперечных виртуальных волнах. В анизотропной среде такое деление, вообще говоря, невозможно.

Будем считать, что все искомые величины S_{ijl} , Λ_{ij} и G_{ij} известны. В анизотропной среде возможны различные ветви колебаний (волн) $\omega^\sigma(\mathbf{k})$, являющиеся решением дисперсионного уравнения. Каждая из них имеет свою поляризацию (единичный вектор поляризации $\mathbf{e}_\mathbf{k}^\sigma$). Возможно тормозное излучение любой из этих волн, причем

$$w_{\mathbf{p}\alpha, \mathbf{p}\beta}^{\mathbf{b}} = \frac{2(2\pi)^2 |\mathbf{e}_\mathbf{k}^\sigma (M^\alpha + M^\beta + M^{\alpha\beta})|^2}{\hbar \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^\sigma(\omega, \mathbf{k}) \right]_{\omega=\omega^\sigma(\mathbf{k})}} \delta(\omega^\sigma(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha + \mathbf{k}_0(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)), \quad (5.60)$$

где

$$\varepsilon^\sigma(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) e_{i,\mathbf{k}}^{\sigma*} e_{j,\mathbf{k}}^\sigma. \quad (5.61)$$

Стоит отметить, что формула (5.48) описывает суммарное излучение для двух поляризаций электромагнитных поперечных волн в изотропной среде (только для суммы двух поляризаций, но не каждой из них по отдельности, входит векторное произведение $|\llbracket \mathbf{kM} \rrbracket|^2$). Если мы интересуемся излучением каждой из поляризаций, то и в изотропной среде нужно использовать формулу (5.60). Формула (5.60) при соответствующем выборе $\omega^\sigma(\mathbf{k})$ и $\mathbf{e}_\mathbf{k}^\sigma = \mathbf{k}/k$ описывает и тормозное излучение продольных волн в изотропной среде. Полученные формулы для тормозного излучения носят совершенно общий характер. Ограничения связаны лишь с использованием квазиклассического приближения ($\hbar\omega(\mathbf{k}) \ll \mathcal{E}$, $\hbar k \ll p$). Эти ограничения при исследовании переходного тормозного излучения обычно не являются сильными, так как переходное тормозное излучение имеет, как правило, заметную интенсивность только для достаточно низких частот (исключения составляют только очень плотные среды, когда $\hbar\omega_{pe} \sim m_e c^2$).

§ 5.4. Переходное тормозное излучение ультрарелятивистских зарядов и диполей на покоящемся заряде

1. Вероятность переходного тормозного излучения ультрарелятивистского заряда. В области низких частот для ультрарелятивистских легких частиц, сталкивающихся с покоящимся тяжелым зарядом, из-за эффекта плотности в обычном тормозном излучении доминирующим, как оказывается, становится переходное тормозное излучение. Естественно, переходное излучение становится основным и в случае, если тяжелый релятивистский ион сталкивается с другим тяжелым покоящимся ионом. Мы здесь рассмотрим только переходное тормозное излучение, пренебрегая (не учитывая) обычным тормозным излучением. Считая, что $\mathbf{v}_\beta = 0$, получим закон сохранения энергии при тормозном излучении в виде

$$\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha = -\mathbf{k}_0\mathbf{v}_\alpha. \quad (5.62)$$

Заметим, что по форме этот закон сохранения совпадает с тем, который фигурировал для переходного излучения или переходного рассеяния. Это и понятно, так как различие фактически состоит лишь в характере распределения рассеивающихся волн (реальных или виртуальных) по передаваемым волновым векторам $\mathbf{k}_0$.

Вероятность переходного тормозного излучения запишем в виде

$$w_{\mathbf{p}_\alpha, 0}^{\text{tr. b}} = \frac{2(2\pi)^2 |\mathbf{k}\mathbf{M}^{\alpha\beta}|^2}{\hbar k^2 \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon(\omega) \right]_{\omega=\omega(\mathbf{k})}} \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha + \mathbf{k}_0\mathbf{v}_\alpha). \quad (5.63)$$

Подставив в (5.48) поле покоящегося заряда (5.4), получаем

$$M_i^{\alpha\beta} = \frac{2q_\alpha q_\beta (4\pi)^2 \omega(\mathbf{k}) S_{ijl}(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}; 0, \mathbf{k}_0) k_{0,l}}{c^2 k_0^2 \varepsilon(0, \mathbf{k}_0) [(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 - (\omega(\mathbf{k}))^2 \varepsilon(\omega(\mathbf{k}))/c^2]} \times \\ \times (v_{\alpha,j} - \omega(\mathbf{k})(k_j - k_{0,j})/k^2). \quad (5.64)$$

Конкретное выражение для $M_i^{\alpha\beta}$ может быть, таким образом, найдено, если известно S_{ijl} . Отметим, что здесь можно воспользоваться тем, что одно из полей является статическим ($\omega_0 = 0$). Будем считать, что $\omega \gg \omega_{\text{pe}}$. Тогда поляризуемость любой среды можно описывать плазменной формулой.

Разложим искомый ток по частотам (но не волновым числам $\mathbf{k}$):

$$\mathbf{j}_{i,\omega}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega(\varepsilon(\omega) - 1)}{4\pi} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = i\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{4\pi\omega} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}). \quad (5.65)$$

Здесь мы пренебрегли пространственной дисперсией в ε (высокие частоты) и использовали плазменную формулу $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2$. Учтем, что электростатическое поле покоящегося иона возмущает

электронную концентрацию на δN ($N = N_0 + \delta N$). С этим возмущением и связан нелинейный ток

$$\mathbf{j}_\omega^{nl}(\mathbf{r}) = i \frac{\omega_{pe}^2 \delta N(\mathbf{r})}{4\pi\omega N_0} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}); \quad \omega_{pe}^2 = \frac{4\pi N_0 e^2}{m_e}. \quad (5.66)$$

Возмущение δN зависит от расстояния до иона, т. е. $\delta N = \delta N(\mathbf{r})$. Используя разложение

$$\delta N(\mathbf{r}) = \int \delta N_{\mathbf{k}_0} \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}) d\mathbf{k}_0 \quad (5.67)$$

и учтя, что для двух произвольных $A(\mathbf{r})$ и $B(\mathbf{r})$

$$(AB)_{\mathbf{k}} = \int A_{\mathbf{k}_0} B_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} d\mathbf{k}_0, \quad (5.68)$$

получаем

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{nl} = \frac{i\omega_{pe}^2}{4\pi\omega N_0} \int \delta N_{\mathbf{k}_0} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0} d\mathbf{k}_0 = - \frac{ie}{\omega m_e} \int \delta \rho_{\mathbf{k}_0} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0} d\mathbf{k}_0, \quad (5.69)$$

где $-e$ — заряд частиц, создающих поляризацию в среде, а

$$\delta \rho_{\mathbf{k}_0} = -e \delta N_{\mathbf{k}_0}. \quad (5.70)$$

Выразим $\delta \rho_{\mathbf{k}_0}$ через напряженность поля $\mathbf{E}_{\mathbf{k}_0}$, используя уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = 4\pi \delta \rho, \quad (5.71)$$

$$i\mathbf{k}_0 \mathbf{E}_{\mathbf{k}_0} = 4\pi \delta \rho_{\mathbf{k}_0} = i\mathbf{k}_0 \mathbf{E}_{\mathbf{k}_0} (1 - \varepsilon(0, \mathbf{k}_0)). \quad (5.72)$$

Подставив (5.72) в (5.69), мы получим искомый нелинейный ток. Надо при этом помнить, что по его определению (симметричность при замене $\mathbf{k}_0 \rightleftharpoons \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$) надо взять полусумму соответствующих выражений. Второй член этой полусуммы равен нулю, так как поле $\mathbf{E}_{\omega-\omega_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0}$ является поперечным, а в (5.72) входит лишь продольное поле. Таким образом, появляется коэффициент 1/2, который сокращается, в конечном счете, с коэффициентом 2 в (5.48). Итак,

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{nl} = - \frac{e}{8\pi m_e} \int (\varepsilon(0, \mathbf{k}_0) - 1) (\mathbf{k}_0 \mathbf{E}_{\mathbf{k}_0}) \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0} d\mathbf{k}_0. \quad (5.73)$$

Это позволяет записать искомый коэффициент S_{ijl} нелинейного тока в виде

$$S_{ijl}(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}; 0, \mathbf{k}_0) = - \frac{e\delta_{ij}k_{0l}}{8\pi m_e \omega(\mathbf{k})} (\varepsilon(0, \mathbf{k}_0) - 1). \quad (5.74)$$

Итак, мы получаем матричный элемент переходного тормозного излучения в следующей форме:

$$\mathbf{M}^{\alpha\beta} = - \frac{4\pi q_\alpha q_\beta e (\varepsilon(0, \mathbf{k}_0) - 1) (\mathbf{v}_\alpha + \mathbf{k}_0 \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})/k^2)}{m_e c^2 \varepsilon(0, \mathbf{k}_0) (|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|^2 - k^2)}. \quad (5.75)$$

Здесь отброшен член, параллельный $\mathbf{k}$, так как он не дает вклада в векторное произведение $[\mathbf{k}\mathbf{M}^{\alpha\beta}]$, входящее в вероятность тормозного излучения, и, кроме того, использовано дисперсионное соотношение

$$(\omega(\mathbf{k}))^2 \varepsilon(\omega(\mathbf{k}))/c^2 = k^2. \quad (5.76)$$

Матричный элемент $\mathbf{M}^{\alpha\beta}$ имеет, в общем, тот же порядок величины, что и матричный элемент обычного тормозного излучения. Однако существуют и отличия, которые видны уже из (5.75), и они играют принципиальную роль. Во-первых, в (5.75) входит масса m_e частиц среды, создающих поляризацию, а масса M_α излучающих частиц, вообще, не входит. Это, конечно, является общей чертой для всех переходных процессов излучения, включая переходное рассеяние и переходное тормозное излучение. Во-вторых, иная зависимость от зарядов частиц ($q_\alpha q_\beta e$, а не $q_\alpha^2 q_\beta$, как в обычном тормозном излучении) приводит к следующим следствиям. Для обычного тормозного излучения одинаковых нерелятивистских частиц матричный элемент, пропорциональный $q_\alpha q_\beta (q_\alpha/M_\alpha - q_\beta/M_\beta)$, обращается в нуль. Для переходного же тормозного излучения этого не происходит (матричный элемент пропорционален $q_\alpha q_\beta e$, а мощность излучения пропорциональна $q_\alpha^2 q_\beta^2 e^2$). В-третьих, при переходном тормозном излучении электронов и позитронов на тяжелых ионах знаки матричных элементов, естественно, противоположны, т. е. если интерференция переходного и обычного тормозного излучения уменьшает общее сечение в случае электронов, то она увеличит его в случае позитронов.

При описании обычного тормозного излучения мы уже использовали конкретное выражение (5.16) для $\varepsilon(0, \mathbf{k}_0)$, соответствующее модели экранировки (5.17). Подставив (5.16) в (5.75), получаем

$$\mathbf{M}^{\alpha\beta} = - \frac{q_\alpha q_\beta 4\pi e (v_\alpha + \mathbf{k}_0 \omega(\mathbf{k})/k^2)}{m_e (1 + k_0^2 d^2) ((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 - k^2) c^2}. \quad (5.77)$$

Вероятность переходного тормозного излучения принимает тогда вид

$$w_{p\alpha,0}^{\text{tr.b}} = \frac{(2\pi)^6 q_\alpha^2 q_\beta^2 e^2 \delta(\omega(\mathbf{k}) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) v_\alpha)}{\hbar \pi^2 m_e^2 k^2 \omega(\mathbf{k}) c^4 (1 + k_0^2 d^2)^2 ((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 - k^2)^2} \left([\mathbf{k} v_\alpha] + \frac{[\mathbf{k} \mathbf{k}_0] \omega(\mathbf{k})}{k^2} \right)^2. \quad (5.78)$$

2. Сравнение интенсивности обычного и переходного тормозного излучения. Переходное тормозное излучение ультрарелятивистских частиц на покоящихся тяжелых частицах (ионах, например), в отличие от обычного тормозного излучения, не оказывается сильно направленным вперед. Результат интегрирования по углам мощности излучения, выражаемой формулами (5.45) и

(5.78), в общем случае имеет вид (см. [43]):

$$Q_{\alpha}^{\text{tr.b}} = \int_0^{\infty} Q_{\alpha}^{\text{tr.b}}(\omega) d\omega = \int \hbar \omega(\mathbf{k}) w_{\mathbf{p}_{\alpha},0}^{\text{tr.b}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\beta} \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^6}; \quad (5.79)$$

$$Q_{\alpha}^{\text{tr.b}}(\omega) = \frac{2q_{\alpha}^2 q_{\beta}^2 e^2 \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{m_e^2 c^3 v_{\alpha} d^4} \int_0^{\infty} \frac{d\kappa^2}{\{\kappa^2 + (\omega^2/v_{\alpha}^2) [1 - (v_{\alpha}^2/c^2) \varepsilon(\omega)]\}^2} \times \\ \times \frac{(c^2/\omega^2 \varepsilon(\omega)) [\kappa^2 + (\omega^2/v_{\alpha}^2) (1 - \varepsilon(\omega) v_{\alpha}^2/c^2)^2 - \kappa^2 v_{\alpha}^2/2c^2]}{(\kappa^2 + \omega^2/v_{\alpha}^2)^2} \times \\ \times \left[\frac{1/d^2 + \kappa^2 + (1 + \varepsilon(\omega) v_{\alpha}^2/c^2) \omega^2/v_{\alpha}^2}{4(\omega/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \sqrt{\kappa^2 + \omega^2/v_{\alpha}^2}} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{1/d^2 + \kappa^2 + (1 + \varepsilon(\omega) v_{\alpha}^2/c^2) \omega^2/v_{\alpha}^2 + 2(\omega/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \sqrt{\kappa^2 + \omega^2/v_{\alpha}^2}}{1/d^2 + \kappa^2 + (1 + \varepsilon(\omega) v_{\alpha}^2/c^2) \omega^2/v_{\alpha}^2 - 2(\omega/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)} \sqrt{\kappa^2 + \omega^2/v_{\alpha}^2}} - 1 \right] + \\ + \frac{2\varepsilon(\omega) \omega^2 \kappa^2 v_{\alpha}^2/c^4}{(\kappa^2 + \omega^2/v_{\alpha}^2)^2} \left\{ \left[\frac{1}{d^2} + \kappa^2 + \left(1 + \varepsilon(\omega) \frac{v_{\alpha}^2}{c^2} \right) \frac{\omega^2}{v_{\alpha}^2} \right]^2 - \right. \\ \left. - 4 \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \left(\kappa^2 + \frac{\omega^2}{v_{\alpha}^2} \right) \right\}^{-1},$$

$$\kappa = \mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}_{0,\perp}. \quad (5.80)$$

Мы ограничимся тем, что обсудим приближенные формулы при $\omega \gg \omega_{\text{pe}}$, $\mathcal{E}_{\alpha} \gg M_{\alpha} c^2$ в ряде предельных случаев (в различных областях частот) и сравним их с формулами для обычного тормозного излучения. Наибольшей величины спектральная плотность мощности переходного тормозного излучения $Q_{\alpha}^{\text{tr.b}}(\omega)$ достигает при $\omega \ll c/d$, т. е. для длин волн, больших радиуса экранирования. В этом случае поляризация, окружающая покоящиеся ионы, излучает когерентно; при этом из (5.79), (5.80) получаем

$$Q_{\alpha}^{\text{tr.b}}(\omega) = \frac{16q_{\alpha}^2 q_{\beta}^2 e^2 N_{\beta}}{3m_e^2 c^4} \left[\ln \frac{c}{\omega d \sqrt{(M_{\alpha} c^2/\mathcal{E}_{\alpha})^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2}} - 1 \right]. \quad (5.81)$$

Этот результат можно получить и непосредственно из (5.78), (5.79). Для этого удобно в (5.79) перейти к интегрированию по $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$. Используя $k_{1z} = \omega(\mathbf{k})/v_{\alpha}$ (z по $\mathbf{v}$), $\mathbf{k}_{1\perp} \equiv \kappa$, $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 - k^2 = k_1^2 - k^2 = \kappa^2 - k^2 + (\omega(\mathbf{k}))^2/v_{\alpha}^2 \approx \kappa^2 + (\omega^2/c^2) [(M_{\alpha} c^2/\mathcal{E}_{\alpha})^2 + \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]$, $1 + k_0^2 d^2 \approx 1 + \kappa^2 d^2$, $[\mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}] + [\mathbf{k}\mathbf{k}_0] \omega(\mathbf{k})/k^2 \approx [\kappa\mathbf{k}] \omega(\mathbf{k})/k^2$, после интегрирования по κ^2 и углу между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}_{\alpha}$ получаем вновь формулу (5.81). Формулу (5.81) нужно сравнивать с формулой (5.24а) для обычного тормозного излучения. Выпишем ее здесь для удобства еще раз:

$$Q_{\alpha}^{\text{or.b}}(\omega) = \frac{16q_{\alpha}^4 q_{\beta}^2 N_{\beta} [\ln(\kappa_{\text{max}} d) - 1/2]}{3M_{\alpha}^2 c^4 [1 + (\mathcal{E}_{\alpha}/M_{\alpha} c^2)^2 \omega_{\text{pe}}^2/\omega^2]}. \quad (5.82)$$

Из этого сравнения видно, во-первых, что в переходном тормозном излучении, описываемом выражением (5.81), отсутствует эффект плотности в том смысле, что нет множителя перед знаком логарифма, падающего с частотой ($\propto \omega^2$) при $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2$. Подлогарифмическое выражение (5.81), однако, меняется с частотой и достигает максимального значения при $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2$; при этом

$$Q_\alpha^{\text{tr.b}}(\omega) = \frac{16q_\alpha^2 q_\beta^2 e^2 N_\beta}{3m_e^2 c^4} \left(\ln \frac{c}{\omega_{pe} d} - 1 \right). \quad (5.83)$$

Во-вторых, численное значение логарифма в (5.83) обычно несколько меньше, чем в (5.82). Наконец, в-третьих, при $M_\alpha = m_e$ и $q_\alpha = -e$ множители перед логарифмом в (5.83) и (5.82) совпадают, если не учитывать эффект плотности в (5.82), описываемый фактором

$$F = \frac{1}{1 + (\mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2)^2 \omega_{pe}^2 / \omega^2}. \quad (5.84)$$

Но в области $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2$ этот множитель как раз мал:

$$F \approx (\omega^2 / \omega_{pe}^2) (M_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha)^2 \ll 1. \quad (5.85)$$

Небольшое различие в логарифмах, естественно, не может «перевесить» малый множитель F . Это означает, что спектральная мощность переходного тормозного излучения при $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2$ пающего превосходит спектральную мощность обычного тормозного излучения. При

$$(c/d)(\mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2)^2 \gg \omega \gg c/d \quad (5.86)$$

переходное тормозное излучение начинает падать как $1/\omega^2$ [43]:

$$Q_\alpha^{\text{tr.b}}(\omega) = \frac{2q_\alpha^2 q_\beta^2 e^2 N_\beta}{m_e^2 c^2 \omega^2 d^2} \left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{2} [(M_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2 / \omega^2]} - \frac{1}{2} \right\}. \quad (5.87)$$

Но все же при $M \neq m_e$, $q_\alpha = Ze$ оно может превосходить обычное тормозное излучение, если

$$\omega \ll \omega_{pe} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_\alpha}{M_\alpha c^2} \frac{M_\alpha}{Z m_e} \frac{c}{\omega_{pe} d}} \ll \omega_{pe} \frac{\mathcal{E}_\alpha}{M_\alpha c^2}, \quad (5.88)$$

что выполняется при

$$\frac{\mathcal{E}_\alpha}{M_\alpha c^2} \gg \frac{c}{\omega_{pe} d} \frac{M_\alpha}{m_e Z}. \quad (5.89)$$

Наконец, при

$$\omega \gg (c/d)(\mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2)^2, \quad (5.90)$$

когда для обычного тормозного излучения справедлива формула Бете — Гайтлера (см. (5.246)), для переходного тормозного излу-

чения получаем

$$Q_{\alpha}^{\text{tr. b}}(\omega) = \frac{2q_{\alpha}^2 q_{\beta}^2 e^2 N_{\beta}}{3m_e^2 \omega^4 d^4} \frac{1}{[(M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^2 + \omega_{\text{pe}}^2 / \omega^2]^2}, \quad (5.91)$$

т. е. спектральная плотность мощности $Q_{\alpha}^{\text{tr. b}}(\omega)$ падает с частотой как $1/\omega^4$ *) и оказывается всегда малой по сравнению со спектральной мощностью обычного тормозного излучения для $M_{\alpha} = m_e$, $Z = 1$.

В общем случае при $M_{\alpha} = m_e$, $q_{\alpha} = -e$ в полной спектральной мощности излучения имеется провал при

$$c/d \ll \omega \ll \omega_{\text{pe}} \mathcal{E} / m_e c^2, \quad (5.92)$$

если, конечно, выполнено неравенство (5.89) для $M_{\alpha} = m_e$, $Z = 1$. В случае выполнения неравенства, противоположного (5.89), возникает область интерференции переходного и обычного тормозного излучения при

$$\omega_{\text{pe}} \mathcal{E} / m_e c^2 < \omega < c/d. \quad (5.93)$$

В области же $\omega \ll \omega_{\text{pe}} \mathcal{E} / m_e c^2$ тормозное излучение становится переходным.

Все последние сравнения касаются случая $M_{\alpha} = m_e$. Если же $M_{\alpha} \gg m_e$, то очевидно, что обычное тормозное излучение содержит дополнительную малость $(m_e/M_{\alpha})^2$ и переходное тормозное излучение будет доминировать в значительно более широком частотном интервале.

Стоит обратить внимание также на то, что переходное тормозное излучение заметно возрастает с уменьшением экранировки и особенно велико в средах, где статическая диэлектрическая проницаемость $\epsilon(0, \mathbf{k})$ мала (такая ситуация возможна, если существует область, в которой $\epsilon(0, \mathbf{k})$ может менять знак и, следовательно, проходит через нуль).

3. Переходное тормозное излучение электрических и магнитных диполей. Возможны различные случаи столкновений: столкновения заряженных частиц с диполями, диполей между собой и т. п. Во всех случаях отклонения траекторий от прямолинейных уменьшаются с ростом мультипольности сталкивающихся частиц. Для появления переходного тормозного излучения источники могут двигаться прямолинейно, не меняя своей траектории. Как мы видели раньше, переходное излучение электрических и магнитных диполей и переходное рассеяние на электрических и магнитных диполях обладает рядом особенностей, связанных с тем, что более высокие частоты представлены с большим весом в общей интенсивности излучения.

*) Выполнение неравенства (5.90) обычно влечет за собой и выполнение неравенства $\omega \gg \omega_{\text{pe}} \mathcal{E}_{\alpha} M_{\alpha} c^2$ (это имеет место в плазме, когда $d = v_T / \omega_{\text{pe}}$).

Ограничимся лишь некоторыми замечаниями общего характера, касающимися переходного тормозного излучения диполей. Плотность тока, создаваемого электрическим диполем $\mathbf{p}$, движущимся со скоростью $\mathbf{v}$, будет определяться выражением

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{\mathbf{p}} = \mathbf{v} (2\pi)^{-3} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \{ (\mathbf{k}\mathbf{v}) (\mathbf{p}\mathbf{v}) (1/v^2) \sqrt{1 - v^2/c^2} + (\mathbf{k}\mathbf{p} - (\mathbf{k}\mathbf{v}) (\mathbf{p}\mathbf{v})/v^2) \}. \quad (5.94)$$

Здесь $\mathbf{p}$ — дипольный момент в собственной системе отсчета. Легко видеть, что если исключить случай почти строгой ориентации $\mathbf{p}$ вдоль $\mathbf{v}$, когда работает фактор лоренцевского сокращения $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, то в излучении релятивистского диполя, пролетающего около неподвижного заряда, появится дополнительный фактор порядка $\omega^2 \mathbf{p}^2 / q^2 c^2$. Это значит, что при $\omega \ll c/d$ спектральная мощность переходного тормозного излучения пропорциональна ω^2 и станет постоянной при $\omega \gg c/d$. Падение с частотой спектральной мощности переходного тормозного излучения начнется лишь при $\omega \gg (c/d)(\mathcal{E}/Mc^2)^2$. Если $\mathbf{p}_L^\alpha$ — дипольный момент в лабораторной системе отсчета, то вероятность переходного тормозного излучения диполя на заряде можно получить из вероятности переходного тормозного излучения заряда на заряде заменой

$$q_\alpha^2 \rightarrow ((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{p}_L^\alpha)^2. \quad (5.95)$$

В задаче о переходном тормозном излучении при столкновении между собой двух диполей $\mathbf{p}_L^\alpha$ и $\mathbf{p}_L^\beta$ нужно еще произвести замену

$$q_\beta^2 \rightarrow (\mathbf{k}_0 \mathbf{p}_L^\beta)^2. \quad (5.96)$$

В переходном тормозном излучении релятивистского квадрупольного неподвижного заряда появится уже дополнительный множитель, пропорциональный ω^4 . Это значит, что даже при $\omega \gg \gg (c/d)(\mathcal{E}/Mc^2)^2$ спектр переходного тормозного излучения будет плоским, излучаться будут очень высокие частоты вплоть до тех, длина волны которых порядка характерного размера квадрупольного. Аналогичные заключения можно сделать для магнитных диполей и квадрупольных. Мы ограничимся этими общими замечаниями, так как детальная количественная теория переходного тормозного излучения диполей сейчас еще не развита.

§ 5.5. Индуцированное переходное тормозное излучение

1. Затухание и раскачка электромагнитных волн из-за индуцированного тормозного излучения. Физическая картина для индуцированного тормозного излучения та же, что и в случае излучения В.—Ч. и переходного рассеяния. Рассмотрим внешнюю электромагнитную волну, частота и волновое число которой принадлежат к области частот и волновых чисел волн, возникающих при спонтанном тормозном излучении. Воздействие волны на из-

лучающие частицы сводится к частичной группировке (на длине волны) частиц в сгустки и к когерентному их излучению, т. е. увеличению интенсивности излучения в расчете на одну частицу. Поскольку степень когерентности пропорциональна амплитуде волны, то и увеличение мощности излучения на одну частицу пропорционально амплитуде волн, что и представляет собой индуцированный эффект. Возможны как поглощение, так и раскачка волн. Знак эффекта определяется функцией распределения излучающих частиц. Здесь мы ограничимся простейшим рассмотрением индуцированного тормозного излучения путем использования метода коэффициентов Эйнштейна [42]. Для этих целей удобна введенная выше вероятность тормозного излучения $w_{p_\alpha, p_\beta}^b(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$. Вводим вероятности индуцированного тормозного излучения и тормозного поглощения, пропорциональные интенсивности излучения или $N_{\mathbf{k}}$ — числу квантов волн.

Далее, из равенства вероятностей прямых и обратных переходов и баланса между индуцированными и спонтанными процессами в условиях теплового равновесия (это просто повторение рассуждений Эйнштейна) находим, что вероятность индуцированного излучения и равная ей вероятность индуцированного поглощения равны вероятности спонтанного излучения $w_{p_\alpha, p_\beta}^b(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$, умноженной на $N_{\mathbf{k}}$.

Изменение числа квантов в единицу времени из-за процессов индуцированного тормозного излучения и поглощения будет определяться следующим уравнением баланса:

$$\left(\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt}\right)_{\text{ind}} = N_{\mathbf{k}} \int w_{p_\alpha, p_\beta}^b(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \{ (f_{p_\beta} - f_{p_\beta - \hbar \mathbf{k}_0}) f_{p_\alpha} + (f_{p_\alpha} - f_{p_\alpha - \hbar \mathbf{k} + \hbar \mathbf{k}_0}) f_{p_\beta} \} \frac{d\mathbf{p}_\alpha d\mathbf{p}_\beta d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^9}. \quad (5.97)$$

Учитывая $\hbar k_0 \ll p_\beta$, $\hbar |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \ll p_\alpha$, получаем

$$\left(\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt}\right)_{\text{ind}} = \hbar N_{\mathbf{k}} \int w_{p_\alpha, p_\beta}^b(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \left\{ \left(\mathbf{k}_0 \frac{\partial f_{p_\beta}}{\partial \mathbf{p}_\beta} \right) f_{p_\alpha} + \left((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \frac{\partial f_{p_\alpha}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right) f_{p_\beta} \right\} \frac{d\mathbf{p}_\alpha d\mathbf{p}_\beta d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^9}. \quad (5.98)$$

Спонтанное изменение числа квантов получим, проинтегрировав изменение числа квантов с функцией распределения частиц:

$$\left(\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt}\right)_{\text{sp}} = \int w_{p_\alpha, p_\beta}^b(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) f_{p_\alpha} f_{p_\beta} \frac{d\mathbf{p}_\alpha d\mathbf{p}_\beta d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^9}. \quad (5.99)$$

В условиях теплового равновесия

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{T}{\hbar \omega(\mathbf{k})}, \quad \frac{\partial f_{p_{\alpha, \beta}}}{\partial \mathbf{p}_{\alpha, \beta}} = -\frac{v_{\alpha, \beta}}{T} f_{p_{\alpha, \beta}} \quad (5.100)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt}\right)_{\text{ind}} = - \int \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{k}_0 (\mathbf{v}_{\beta} - \mathbf{v}_{\alpha})}{\omega(\mathbf{k})} w_{\mathbf{p}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\beta}}^b(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) f_{\mathbf{p}_{\alpha}} f_{\mathbf{p}_{\beta}} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha} d\mathbf{p}_{\beta} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^9}. \quad (5.101)$$

Из закона сохранения энергии при тормозном излучении (5.32) убеждаемся в том, что, действительно, при тепловом равновесии осуществляется баланс индуцированных и спонтанных процессов:

$$\left(\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt}\right)_{\text{ind}} + \left(\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt}\right)_{\text{sp}} = 0. \quad (5.102)$$

В случае достаточно больших интенсивностей ($N_{\mathbf{k}} \gg T/\hbar\omega(\mathbf{k})$) доминируют индуцированные эффекты и, следовательно,

$$\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt} = 2\gamma_{\mathbf{k}}^b N_{\mathbf{k}}, \quad (5.103)$$

где

$$\gamma_{\mathbf{k}}^b = \frac{1}{2} \int \hbar w_{\mathbf{p}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\beta}}^b(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \left\{ \left(\mathbf{k}_0 \frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\beta}}}{\partial \mathbf{p}_{\beta}} \right) f_{\mathbf{p}_{\alpha}} + \right. \\ \left. + \left((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\alpha}}}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \right) f_{\mathbf{p}_{\beta}} \right\} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha} d\mathbf{p}_{\beta} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^9}. \quad (5.104)$$

Величина $\gamma_{\mathbf{k}}^b$ при $\gamma_{\mathbf{k}}^b < 0$ описывает поглощение (реабсорбцию тормозных квантов). В случае же $\gamma_{\mathbf{k}}^b > 0$ возникает неустойчивость.

Можно показать, что для изотропных частиц (в частности, и неравновесных) $\gamma_{\mathbf{k}}^b < 0$, т. е. всегда возникает поглощение [111] *) при наличии, например, пучков частиц или других отклонений в изотропии распределения частиц возможна раскачка электромагнитных волн. Интерес к теории такой тормозной неустойчивости связан также с тем, что она может возникать для весьма высоких частот, заметно превышающих оптические частоты.

2. Тормозная неустойчивость ультрарелятивистских электронов. Рассмотрим тормозную неустойчивость ультрарелятивистских электронных пучков при их прохождении через газ неподвижных ионов. Вначале обсудим тормозную неустойчивость из-за обычного тормозного излучения, но с учетом эффекта плотности. Ограничимся достаточно низкими частотами $\omega \ll (c/d)(\mathcal{E}_{\alpha}/M_{\alpha}c^2)^2$, но все

*) Этот результат обобщает известное ранее (см. [111a]) положение о том, что плазменные волны всегда затухают на любых неравновесных, но изотропно распределенных частицах.

же удовлетворяющими неравенству $\omega \gg \omega_{pe}$. Если $d = v_T/\omega_{pe}$ *), то указанные неравенства совместны при выполнении условия

$$(\mathcal{E}_\alpha/M_\alpha c^2)^2 \gg v_T/c, \quad (5.105)$$

которое для ультрарелятивистских частиц с $\mathcal{E}_\alpha \gg M_\alpha c^2$ легко выполняется, так как обычно $v_T \ll c$.

Пучок ультрарелятивистских частиц считаем одномерным, а ионы покоящимися. Тогда удобно ввести функцию распределения $f_{\mathcal{E}_\alpha}$ ультрарелятивистских частиц по энергиям, причем ее связь с ранее введенной функцией f_{p_α} легко устанавливается из условия нормировки (здесь $\mathcal{E}_\alpha \approx cp_z$, z направлено вдоль скорости пучка v_α)

$$\int f_{p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty f_{\mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha = N_b, \quad (5.106)$$

где N_b — концентрация частиц пучка.

В инкременте (5.104) существен только второй член с $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times \frac{\partial f_{p_\alpha}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_{p_\alpha}}{\partial \mathcal{E}_\alpha} = \omega(\mathbf{k}) \frac{\partial f_{p_\alpha}}{\partial \mathcal{E}_\alpha}$, и, следовательно, инкремент определяется вероятностью тормозного излучения, проинтегрированной по всем передаваемым импульсам $\mathbf{k}_0$:

$$w_{p_\alpha}^{or.b}(\mathbf{k}) = \int w_{p_\alpha,0}^{or.b}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^3}. \quad (5.107)$$

Имеем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{or.b} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \hbar \omega(\mathbf{k}) w_{p_\alpha,0}^{or.b}(\mathbf{k}) N_\beta \frac{\partial f_{\mathcal{E}_\alpha}}{\partial \mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha. \quad (5.108)$$

Вероятность (5.107) можно найти непосредственно из (5.23):

$$w_{p_\alpha,0}^{or.b}(\mathbf{k}) = \frac{8\pi q_\alpha^4 q_\beta^2 (M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 \{[(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/(\omega(\mathbf{k}))^2]^2 + \theta^4\}}{\hbar (\omega(\mathbf{k}))^3 M_\alpha^2 c^2 [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/(\omega(\mathbf{k}))^2]^4} \times \\ \times [\ln(\kappa_{\max}^2 d^2) - 1]. \quad (5.109)$$

Подставив (5.109) в (5.108) и проинтегрировав по частям, получаем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{or.b} = \frac{8\pi q_\alpha^4 q_\beta^2 N_\beta}{(\omega(\mathbf{k}))^2 M_\alpha^2 c^2} [\ln(\kappa_{\max}^2 d^2) - 1] \int_0^\infty \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha}\right)^2 \frac{f_{\mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha}{\mathcal{E}_\alpha} \times \\ \times \{[(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/(\omega(\mathbf{k}))^2] (3(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/(\omega(\mathbf{k}))^2) + \theta^4\} \times$$

*) Величина v_T в плазме — это средняя тепловая скорость частиц, в твердотельной вырожденной плазме — это величина порядка скорости электронов на поверхности Ферми; если же экранировка осуществляется связанными электронами (тормозное излучение на нейтральных атомах или молекулах), то равенство $d = v_T/\omega_{pe}$ может рассматриваться просто как определение величины v_T .

$$\begin{aligned} & \times [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/(\omega(\mathbf{k}))^2 + \theta^2] - 4(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 \times \\ & \times [((M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/(\omega(\mathbf{k}))^2 + \theta^4)] [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \theta^2 + \\ & + \omega_{pe}^2/(\omega(\mathbf{k}))^2]^{-5}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Неустойчивость наиболее сильно проявляется в области, где существен эффект плотности, т. е. при $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2$. Если считать, что θ^2 порядка $(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2$, то при $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2$ инкремент $\gamma_k > 0$ растет с ростом частоты:

$$\gamma_k^{or.b} = \frac{8\pi q_\alpha^4 q_\beta^2 N_\beta (\omega(\mathbf{k}))^2}{M_\alpha^3 c^3 \omega_{pe}^4} [\ln(\kappa_{\max}^2 d^2) - 1] \int_0^\infty f_{\mathcal{E}_\alpha} \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^3 d\mathcal{E}_\alpha. \quad (5.111)$$

Для пучка электронов ($M_\alpha = m_e$, $q_\alpha = -e$) с узким разбросом по энергиям с $\mathcal{E}_\alpha \approx \mathcal{E}_0$, сталкивающихся с ионами ($q_\beta = Ze$, $N_\beta = N_i$), в квазинейтральной среде ($N_e = ZN_i$, $\omega_{pe}^2 = 4\pi N_e e^2/m_e = 4\pi N_i Z e^2/m_e$) получим оценку ($N_b = \int f_{\mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha$ — концентрация пучка)

$$\gamma_k^{or.b} \approx \frac{e^2 (\omega(\mathbf{k}))^2 N_b}{2\pi m_e c^3 N_i} \left(\frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_0} \right)^3 [\ln(\kappa_{\max}^2 d^2) - 1]. \quad (5.112)$$

При больших частотах $\omega \gg \omega_{pe} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2$

$$\begin{aligned} \gamma_k^{or.b} \approx & \frac{8\pi q_\alpha^4 q_\beta^2 N_\beta}{(\omega(\mathbf{k}))^2 M_\alpha^2 c^2} [\ln(\kappa_{\max}^2 d^2) - 1] \int_0^\infty \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^2 \frac{f_{\mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha}{\mathcal{E}_\alpha} \times \\ & \times \left[\theta^2 - \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^2 \right]^3 \left[\theta^2 + \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^2 \right]^{-5}. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Если для низких частот $\omega \ll \omega_{pe} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2$ неустойчивость ($\gamma_k > 0$) возникала для любых углов, то здесь для высоких частот $\omega \gg \omega_{pe} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2$ неустойчивость возникает для $\theta^2 > (M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2$, причем максимальный инкремент достигается при $\theta^2 = \theta_{\max}^2 = 4(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2$; при больших θ^2 инкремент падает с ростом θ^2 .

Для электронного пучка $M_\alpha = m_e$, $q_\alpha = -e$ с узким разбросом по энергиям $\mathcal{E}_\alpha \approx \mathcal{E}_0$ получаем для столкновений с ионами ($N_\beta = N_i$, $\omega_{pe}^2 = 4\pi N_i Z e^2/m_e$)

$$\gamma_k = \frac{27e^2 \omega_{pe}^4 N_b}{3125 (2\pi) m_e c^3 (\omega(\mathbf{k}))^2 N_i} \frac{\mathcal{E}_0}{m_e c^2} [\ln(\kappa_{\max}^2 d^2) - 1]. \quad (5.114)$$

Этот инкремент падает с ростом частоты, тогда как (5.112) растет с ростом частоты. Поэтому можно оценить максимум инкремента

по частоте. Он достигается при $\omega(\mathbf{k}) \approx 0,3\omega_{pe}\mathcal{E}_0/m_e c^2$. Для этой частоты

$$\gamma_{\mathbf{k},\max} \approx 0,1 \frac{e^2 N_b \omega_{pe}^2}{2\pi m_e c^3 N_i} \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_0} [\ln(\kappa_{\max}^2 d^2) - 1]. \quad (5.115)$$

Величина ω_{pe}^2 пропорциональна Z . Поэтому для тяжелых ионов и больших Z инкремент (5.115) может быть значительным.

3. Поглощение волн из-за индуцированного переходного тормозного излучения. Как мы видели, в области низких частот в спонтанном излучении доминирует переходное тормозное излучение. Эффекты индуцированного переходного тормозного излучения также представляют интерес в области низких частот.

Рассмотрим ту же задачу о прохождении пучка релятивистских частиц через газ покоящихся тяжелых частиц (ионов). Из (5.78) получаем ($k \ll 1/d$)

$$w_{p\alpha,0}^{\text{tr.b}}(\mathbf{k}) = \frac{8\pi q_\alpha^2 q_\beta^2 e^2}{\hbar c m_e^2 (\omega(\mathbf{k}))^3} \left\{ \ln \frac{c^2}{\omega^2 d^2 [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]} - 2 \right\}. \quad (5.116)$$

При этом мы считали, что $\mathbf{k}$ почти параллельно $\mathbf{v}$, $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)_z = \omega(\mathbf{k})/v_\alpha \approx \omega(\mathbf{k})/c$; $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)_\perp = \boldsymbol{\kappa}$; $[\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha] + [\mathbf{k}\mathbf{k}_0]\omega(\mathbf{k})/k^2 \approx -[\boldsymbol{\kappa}\mathbf{k}]\omega(\mathbf{k})/k^2$; $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 - k^2 = \kappa^2 - k^2 + (\omega(\mathbf{k}))^2/v_\alpha^2 \approx \kappa^2 + [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]\omega^2 c^2$. Если $\kappa^2 \gg [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]\omega^2/c^2$, то подынтегральное выражение начинает быстро убывать и, следовательно, $1 + k_0^2 d^2 \approx 1 + \kappa^2 d^2$.

Инкремент $\gamma_{\mathbf{k}}$ индуцированного переходного тормозного излучения определяется выражением типа (5.108) и может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k}}^{\text{tr.b}} &= \frac{1}{2} \int \hbar \omega(\mathbf{k}) w_{p\alpha}^{\text{tr.b}}(\mathbf{k}) N_\beta \frac{\partial f_{\mathcal{E}_\alpha}}{\partial \mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha = \\ &= \frac{4\pi q_\alpha^2 q_\beta^2 e^2 N_\beta}{(\omega(\mathbf{k}))^2 m_e^2 c} \int_0^\infty \left\{ \ln \frac{c^2}{\omega^2 d^2 [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]} - 2 \right\} \frac{\partial f_{\mathcal{E}_\alpha}}{\partial \mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Интегрируя в (5.117) по частям, получаем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\text{tr.b}} = - \frac{8\pi q_\alpha^2 q_\beta^2 e^2}{(\omega(\mathbf{k}))^2 m_e^2 c} N_\beta \int_0^\infty \frac{(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 f_{\mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha}{[(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \omega_{pe}^2/(\omega(\mathbf{k}))^2] \mathcal{E}_\alpha}. \quad (5.118)$$

Это показывает, что индуцированное переходное тормозное излучение приводит к реабсорбции излучения. В случае $q_\alpha = e$, $q_\beta =$

$=Ze, \mathcal{E} \approx \mathcal{E}_0, \omega(\mathbf{k}) \approx 0,3\omega_{pe}\mathcal{E}_0/m_e c^2$ из (5.118) следует оценка

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\text{tr.b}} \approx -0,08 \frac{e^2 \omega_{pe}^2 N_b}{2\pi m_e c^3 N_i} \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_0}; \quad \frac{\mathcal{E}_0}{m_e c^2} \ll \frac{c\omega_{pe}}{d}, \quad (5.119)$$

т. е. поглощение (5.119) в $\ln(\kappa_{\max} d)$ раз меньше раскачки (5.115) и не может ей мешать. С уменьшением частоты инкремент (5.112) падает.

Так как по предположению $\omega \gg \omega_{pe}$, то на пределе применимости (при $\omega \sim \omega_{pe}$) формулы (5.112) инкремент (5.112) будет равен

$$\gamma_{\mathbf{k},\min}^{\text{or.b}} \approx \frac{e^2 \omega_{pe}^2 N_b}{2\pi m_e c^3 N_i} \left(\frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_0} \right)^3 [\ln(\kappa_{\max}^2 d^2) - 1]. \quad (5.120)$$

Вместе с тем декремент (5.118) при $\omega(\mathbf{k}) \ll \omega_{pe}\mathcal{E}_0/M_a c^2$ от частоты не зависит. Поэтому оценка (5.119) верна и при $\omega \ll \omega_{pe}\mathcal{E}/m_e c^2$ *). В этом пределе (5.120), вообще, меньше (5.119); однако наличие большого логарифма в (5.120) показывает, все-таки, что может доминировать раскачка, т. е. иметь место неустойчивость **). Конечно, при всех этих оценках мы игнорировали другие механизмы поглощения электромагнитных волн. Для реализации описанной неустойчивости (если $\gamma_{\mathbf{k}} > 0$) нужно еще, чтобы значение $\gamma_{\mathbf{k}}$ превосходило вклад, определяющий затухание волны из-за неучтенных здесь механизмов поглощения. Тормозная неустойчивость проявляется более ярко в плазме в сильных магнитных полях или в релятивистской плазме (см. гл. 6).

*) При этом коэффициент 0,08 в (5.119) нужно заменить на 1.

**) При сравнении (5.119) с (5.115) нужно также иметь в виду, что (5.119) справедливо лишь, если $\mathcal{E}/m_e c^2 \ll \omega_{pe} c/d$; при больших энергиях $\mathcal{E}/m_e c^2 \gg \omega_{pe} c/d$ поглощение из-за переходного тормозного эффекта сильно подавляется.

ГЛАВА 6

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, РАССЕЯНИЯ И ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛАЗМЕ

§ 6.1. Основные особенности процессов переходного излучения, рассеяния и тормозного излучения в плазме

1. Общие представления. В плазме процессы переходного излучения и рассеяния играют особую роль [73]. Можно без преувеличения сказать, что современная физика плазмы в значительной степени базируется на представлениях о переходных процессах. Правда, не все три типа переходных процессов, рассмотренных выше (переходное излучение, переходное рассеяние и переходное тормозное излучение), в равной степени использовались в физике плазмы. Наибольшее внимание уделялось процессам переходного рассеяния и в особенности процессам индуцированного переходного рассеяния. Этот процесс в физике плазмы иногда называют также нелинейным затуханием Ландау [112], хотя такая терминология явно неудачна, так как процесс не обязательно соответствует затуханию (возможно усиление) и не связан с затуханием Ландау (соответствующим индуцированному излучению и поглощению В.—Ч. продольных волн). Причины, по которым другие процессы, а именно, процессы переходного излучения и переходного тормозного излучения в плазме, привлекали несколько меньшее внимание, различны. Что касается переходного излучения, то создать достаточно резкие границы в плазме не всегда просто. Эффект же переходного тормозного излучения был рассмотрен сравнительно недавно.

Отвлекаясь от этих исторических моментов, нужно отметить, что уже из общих соображений ясно, что все процессы излучения, в которых не требуется изменения траекторий частиц (например, в отсутствие магнитного поля эти траектории остаются прямолинейными), в плазме должны играть очень большую роль. Последнее связано, главным образом, с тем, что плазму часто с большой точностью можно считать бесстолкновительной. Роль парных столкновений мала при $\omega \gg \nu_e$, где ν_e — эффективное число столкновений. В плазме $\nu_e \sim \sigma N_e v_{Te} \sim (e^4/T_e^2) \sqrt{T_e/m_e} N_e$, где

T_e — электронная температура в энергетических единицах, $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$ — средняя тепловая скорость электронов. Для $\omega \sim \omega_{pe} = \sqrt{4\pi N_e e^2/m_e}$ условие «бесстолкновительности» принимает вид

$$\mathfrak{R} = N_e d_e^3 \gg 1, \quad (6.1)$$

где $d_e = v_{Te}/\omega_{pe}$ — дебаевский радиус. Физический смысл этого условия, которое может быть записано в форме

$$N_e^{1/3} e^2 \ll T_e, \quad (6.2)$$

ясен также, если вспомнить, что $e^2 N_e^{1/3}$ — это средняя энергия кулоновского взаимодействия между зарядами (среднее расстояние между ними порядка $N_e^{1/3}$), а T_e — средняя кинетическая энергия.

Фактически условия (6.1), (6.2) выполняются в плазме с очень большим запасом. Так, в лабораторных установках для удержания плазмы в целях создания управляемой термоядерной реакции $\mathfrak{R} \sim 10^5 - 10^6$, на Солнце (в его атмосфере) $\mathfrak{R} \sim 10^8$, в межзвездной среде $\mathfrak{R} \sim 10^9 - 10^{11}$ и т. д. Правда, для твердотельной плазмы условие (6.1) уже нарушается, но мы такую плазму здесь не рассматриваем (к тому же твердотельная плазма обычно вырождена, а роль v_{Te} играет скорость на поверхности Ферми).

Бесстолкновительность плазмы (точнее, соблюдение условия $\omega \gg v_e$) приводит к тому, что в отсутствие внешнего магнитного поля частицы плазмы (электроны и ионы) большую часть времени движутся равномерно и прямолинейно и, следовательно, основную роль могут играть процессы излучения и рассеяния, которые не требуют ускорения частиц — изменения их скорости по величине или направлению (т. е. изменения траектории). Именно поэтому столь важны процессы переходного излучения, рассеяния и переходного тормозного излучения, а также излучения В.—Ч. Правда, для электромагнитных волн в плазме без магнитного поля условие излучения В.—Ч. для отдельных частиц не выполняется, так как $\epsilon(\omega) \approx 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 < 1$, но оно может выполняться для продольных электростатических волн. При наличии внешнего магнитного поля каждая из частиц в первом приближении движется по спирали. Это, в общем, не меняет заключения о том, что основную роль в плазме также могут играть процессы излучения и рассеяния, которые не требуют изменения траекторий частиц (в данном случае движения по спирали). Важно, что излучение и рассеяние могут осуществляться на всей траектории частицы без заметного изменения характера ее движения.

Другим существенным фактором, приводящим к большой роли переходных процессов излучения и рассеяния в плазме, является то, что плазма бывает очень часто неустойчивой; в таких условиях даже очень малые отклонения в распределениях частиц от равновесных вызывают лавинообразное нарастание различных колебаний и волн. Этот эффект тесно связан с отмеченной бесстолкно-

тельностью плазмы. В ряде случаев достаточно лишь относительных отклонений распределений частиц от равновесных порядка $1/\mathcal{N}$, чтобы возникла неустойчивость (к примеру, неустойчивость пучка частиц в плазме). Существенно также, что большинство колебаний, возбуждаемых при развитии неустойчивостей, сопровождается изменением концентрации частиц и других параметров плазмы (эти изменения концентрации особенно велики для волн малых фазовых скоростей, которые возбуждаются легче всего). Другими словами, возбуждаемые волны представляют собой волны диэлектрической проницаемости.

Часто в результате развития неустойчивости в плазме возбуждаемые в ней волны и колебания могут носить случайный характер. Тогда их можно описывать интенсивностями без учета фазовых соотношений. Вместо интенсивностей можно вводить число квантов соответствующих волн N_k , подобно тому, как это было сделано выше при описании индуцированных процессов. Кстати, высокий уровень различных колебаний в плазме приводит к тому, что индуцированные процессы останутся доминирующими.

Другой специфической особенностью плазмы является большая роль продольных электростатических колебаний. Электростатические колебания, как правило, связаны как с колебаниями плотности плазмы, так и с колебаниями ее потенциала. Если такие колебания носят случайный характер, то плазма становится средой со случайными неоднородностями концентрации плазмы и случайными неоднородностями электростатических полей (а следовательно, и их потенциала).

Класс неустойчивостей, связанных с малыми отклонениями в распределении частиц от равновесных, иногда называют кинетическим. Этот класс неустойчивостей очень широк и охватывает наиболее важные неустойчивости, такие как пучковая неустойчивость, неустойчивость плазмы во внешних электрических полях, приводящая к ее аномальному сопротивлению, и т. п. [73]. Развитие физики этих неустойчивостей, связанное, в последние годы, с так называемой сильной турбулентностью [80], привело к пониманию того, что процессы переходного рассеяния и излучения играют даже значительно более важную роль для динамики сильной турбулентности (см. ниже), чем это представлялось ранее. Впрочем, и ранее было ясно, что в динамике даже слабой турбулентности процессы индуцированного переходного рассеяния являются определяющими [73].

Другим классом неустойчивостей плазмы являются магнитогидродинамические неустойчивости. Как правило, в существующих экспериментальных установках удается избежать наиболее опасных магнитогидродинамических неустойчивостей. Однако развитие физики плазмы последних лет привело к пониманию того, что полностью от них избавиться очень трудно, и если даже ликвидированы крупномасштабные магнитогидродинамические неустойчивости, то остаются мелкомасштабные. Последние обычно создают мелкомасштабные магнитные неоднородности, т. е. о плазме

нужно, как правило, говорить как о среде со случайными магнитными неоднородностями [113]. Процессы переходного рассеяния и излучения на таких магнитных неоднородностях играют важную роль в физике плазмы. Даже самая «спокойная» плазма токамаков, по-видимому, содержит достаточно высокий уровень мелко-масштабных магнитных неоднородностей, рассеяние электронов на которых приводит к аномально большой электронной теплопроводности [113а].

Сейчас известно по крайней мере два эффективных механизма возбуждения случайных магнитных полей.

Один из них — тот, который, по-видимому, наиболее существует в токамаках, — это процесс пересоединения магнитных силовых линий (подробнее — [114]). Процесс пересоединения магнитных силовых линий играет важную роль и в астрофизике [115, 115б]. В установках по магнитному удержанию плазмы, например, в токамаках, магнитные поля (с учетом внешних полей и магнитогидродинамических движений) носят довольно сложный характер, так что достаточно близко друг к другу могут подходить магнитные силовые линии различного направления. В установках по магнитному удержанию это отчасти связано с перекрещенностью («широм») силовых линий. Пример двух перекрещенных силовых линий изображен на рис. 18, а. В двух параллельных друг

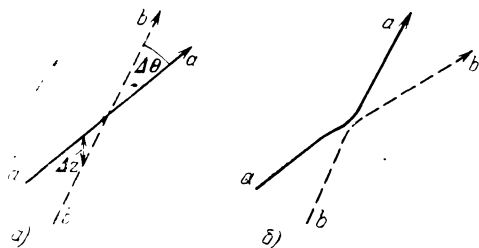


Рис. 18. Схематическое изображение пересоединения силовых линий a и b . а) Две силовые линии в разных плоскостях до пересоединения (Δz — расстояние между плоскостями); б) те же силовые линии после пересоединения.

другу плоскостях лежат две силовые линии разного направления. В верхней плоскости лежит силовая линия a , а в нижней — силовая линия b . Величина угла $\Delta\theta$ между силовыми линиями, отстоящими друг от друга на Δz (точнее, $d\theta/dz$), и определяет степень их перекрещенности. Если силовые линии близко подходят друг к другу, то возможно пересоединение, когда верхняя силовая линия будет продолжаться в нижней плоскости, а нижняя — в верхней (см. рис. 18, б). В результате процессов многократного пересоединения возбуждается компонента случайного магнитного поля (которая в приведенном нами примере соответствует магнитному полю, почти перпендикулярному плоскостям в месте пересоединения).

Магнитное пересоединение играет важную роль и в токовых слоях [114а, 115а], когда близко подходят силовые линии противоположных направлений.

Сейчас считается, что наблюдаемая в установках по магнитному удержанию плазмы аномально большая электронная теплопроводность объясняется рассеянием электронов на случайных магнитных полях, обязанных своим происхождением процессам перезамыкания магнитных силовых линий (наиболее ясные указания на это имеются для центральной части плазменного шнура [113]).

Процесс пересоединения магнитных силовых линий — это эффект довольно общего характера [115б] и поэтому появление магнитных неоднородностей в плазме — довольно распространенное явление.

Другое довольно универсальное явление, приводящее к появлению магнитных неоднородностей, связано с нелинейными свойствами интенсивных волн, воздействующих на плазму или возбужденных в ней из-за неустойчивости. Эти нелинейности приводят к возбуждению в плазме квазистатических магнитных полей [116, 117]. С такой ситуацией встретились еще в первых опытах по воздействию интенсивного излучения на плазму [118—120], когда было обнаружено, что интенсивное электромагнитное поле возбуждает сравнительно большие квазистатические магнитные поля. Само по себе явление возбуждения магнитных полей сильной волной может быть вызвано разнообразными причинами. Однако существует одно общее явление, которое указывает на то, что возбуждение магнитных полей различного типа волнами в плазме должно носить весьма распространенный характер [117, 116, 121]. Дело в том, что волны в плазме часто заставляют частицы совершать движения по довольно сложным траекториям, которые, в частных случаях, могут быть эллипсами или окружностями (рис. 19). Токи, создаваемые отдельными частицами, движущимися по этим эллипсам, компенсируются (ср. с рассмотрением диамагнитного эффекта). Если, однако, имеется неоднородность фазы волны в пространстве, то возможно появление огибающего квазистатического тока, который создает магнитное поле. При появлении магнитного поля траектории частиц видоизменяются и огибающий ток может либо усиливаться, либо уменьшаться. «Выживают» и лавинообразно нарастают такие неоднородности в распределении фаз волн, для которых появляется обратная связь, т. е. возбуждаемое магнитное поле увеличивает неоднородность фаз, что усиливает огибающий ток, а следовательно, усиливает магнитное поле и т. д.

Все перечисленные эффекты приводят к тому, что в плазме наряду с неоднородностями концентрации и потенциала могут существовать и неоднородности магнитных полей. Часто эти неоднородности носят характер случайных неоднородностей.

2. Продольные волны в плазме. Особую роль в плазме, как известно, играют продольные электростатические колебания. Мы

здесь кратко напомним их основные характеристики в случае, когда внешнее магнитное поле отсутствует. Особую роль играют ленгмюровские и ионно-звуковые волны. Они удовлетворяют дисперсионному уравнению для продольных волн

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 0. \quad (6.3)$$

Ленгмюровские волны (в дальнейшем обозначаются как l -волны)

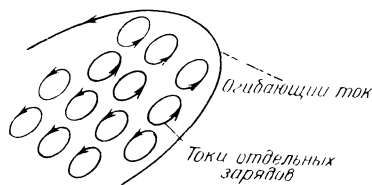


Рис. 19. Схематическое изображение образования огибающего тока при неоднородном распределении фаз движения частиц в поле внешней волны.

имеют наиболее простой вид при выполнении неравенства

$$\omega^l \gg kv_{Te}; \quad v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}, \quad (6.4)$$

где, напомним, T_e — температура электронов, а m_e — их масса. При выполнении условия (6.4) для бесстолкновительной плазмы имеем

$$\varepsilon^l(\omega, k) \approx 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 - 3k^2v_{Te}^2\omega_{pe}^2/\omega^4, \quad (6.5)$$

$$\omega_{pe}^2 = 4\pi N_e e^2/m_e \quad (6.6)$$

и, следовательно, спектр ленгмюровских волн описывается дисперсионным соотношением

$$\omega^l(k) \approx \omega_{pe} + 3k^2v_{Te}^2/\omega_{pe}. \quad (6.7)$$

Ионно-звуковые волны (в дальнейшем обозначаются как s -волны) могут распространяться без сильного затухания при выполнении неравенств

$$kv_{Ti} \ll \omega^s \ll kv_{Te}; \quad (6.8)$$

$$v_{Ti} = \sqrt{T_i/m_i}; \quad T_e \gg T_i. \quad (6.9)$$

При этом

$$\varepsilon^l(\omega, k) \approx 1 + \omega_{pe}^2/(k^2v_{Te}^2) - \omega_{pi}^2/\omega^2, \quad (6.10)$$

$$\omega_{pi}^2 = \sqrt{4\pi N_i e^2/m_i}. \quad (6.11)$$

Спектр ионно-звуковых волн описывается соотношением

$$\omega^s(k) = \frac{kv_s}{\sqrt{1 + k^2v_{Te}^2/\omega_{pe}^2}}; \quad v_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}. \quad (6.12)$$

Схематическое изображение спектров l - и s -волн дано на рис. 20.

Важная роль этих типов волн в плазме и их эффективное возбуждение (l -волн, например, пучками частиц; s -волны легко воз-

буждаются токами) привели к тому, что переходное рассеяние этих волн было рассмотрено сравнительно давно [122], однако связь между переходным излучением и переходным рассеянием в то время еще не была ясна, да и общая теория переходного рассеяния [40] построена не была (сам термин «переходное рассеяние» был введен в [40]). Конкретно в [122] была рассмотрена задача о переходном рассеянии ленгмюровских волн с малой фазовой скоростью $\omega_0 \ll k_0 c$ на ультрарелятивистских электронах и ионах с $\mathcal{E} \gg Mc^2$. В дальнейшем переходное рассеяние l -волн было

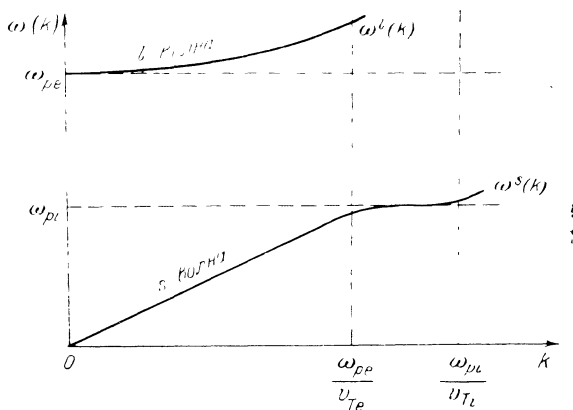


Рис. 20. Схематическое изображение зависимости частоты от волнового числа для продольных волн изотропной плазмы (l — ленгмюровские волны, s — ионно-звуковые волны).

рассмотрено на электронах и ионах любых скоростей и, в частности, на перелятивистских электронах и ионах. Было рассмотрено и индуцированное переходное рассеяние l -волн [73]. При этом индуцированное переходное рассеяние l -волн на ионах является (в случае рассеяния l -волны в l -волну) основным и наиболее важным нелинейным процессом, определяющим распределение l -волн по их волновым числам. Что касается s -волн, то их индуцированное рассеяние на ионах рассматривалось еще в [123] (см. [112]). Правда, при этом термин переходное рассеяние также не использовался; кроме того, рассматривался не процесс переходного рассеяния, а суммарный эффект томсоновского и переходного индуцированного рассеяния. Как было выяснено в дальнейшем [73], интерференция между томсоновским и переходным рассеянием (о котором подробно говорилось в гл. 4) делает общее сечение рассеяния s -волн на ионах в $T_i/T_e \ll 1$ раз меньшим томсоновского сечения. Развита в [40] общая теория переходного рассеяния способствовала пониманию физической природы обсуждаемых процессов рассеяния.

При дальнейшем бурном развитии теории плазмы переходное рассеяние фактически учитывалось для большинства мод плазмы, как в случае наличия внешних магнитных полей, так и в случае

их отсутствия. При этом, однако, в большинстве исследований сам процесс спонтанного рассеяния не рассматривался, а изучался лишь процесс индуцированного рассеяния. Его можно исследовать, и не используя сечения для рассеяния, а рассматривая соответствующий нелинейный процесс в плазме [124]. При этом, естественно, несколько в тени остается физический механизм, лежащий в основе нелинейного взаимодействия. Впрочем, в [73] приведены вероятности переходного рассеяния любых плазменных мод, называемые там вероятностями нелинейного рассеяния (этот термин, как нам кажется, имеет также право на «существование», поскольку в общей теории переходного рассеяния показано, что процесс переходного рассеяния описывается нелинейной вершиной S_{ij}). Вероятности, приведенные в [73], позволяют непосредственно вычислить мощность спонтанного переходного рассеяния любой плазменной волны на отдельной частице. О спонтанном переходном рассеянии в плазме см. [40], а также [129]. Укажем здесь на ряд обзоров, в которых имеются сводки результатов по переходному рассеянию частиц в плазме: [130, 73, 112, 124, 125, 128] (для нерелятивистских частиц) и [122, 126, 127] (для ультрарелятивистских частиц).

Как указывалось, индуцированное рассеяние в плазме называют еще нелинейным затуханием Ландау. Однако этот термин сейчас используется все реже после того, как в [128a] (см. [73]) было дано общее доказательство того, что нелинейное затухание Ландау, при расчете которого ранее использовалась нелинейная теория плазмы, сводится к индуцированному рассеянию (включая переходное и томсоновское рассеяние и их интерференцию).

Мы уделили здесь внимание истории вопроса о переходном рассеянии в плазме потому, что этот процесс наиболее интенсивно исследовался. О переходном излучении и переходном тормозном излучении см. ниже.

3. О переходном излучении поперечных электромагнитных волн в плазме. Изложенные выше (в гл. 2) результаты по переходному излучению частиц, в которых использовалась плазменная формула для диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$, $\omega_{pe}^2 = 4\pi N e^2 / m_e$, непосредственно применимы к плазме. Если для произвольных сред таким выражением для $\epsilon(\omega)$ можно пользоваться только в пределе высоких частот, то в плазме в отсутствие внешних магнитных полей и при пренебрежении эффектами пространственной дисперсии этим выражением для $\epsilon(\omega)$ можно пользоваться при $\omega \geq \omega_{pe}$. Переходному излучению частиц в плазме посвящено большое число работ (ссылки см. в [22]). Однако общее решение задачи с учетом пространственной дисперсии для излучения поперечных электромагнитных волн дает поправки порядка v_{Te}^2 / c^2 (см. [29]) к решениям, приведенным в гл. 2 для случая, когда пространственной дисперсией пренебрегается. Кроме того, в реальных экспериментах (например, в установках по маг-

нитному удержанию) границы плазмы не являются резкими и теоретические расчеты, предполагающие резкость границ, не могут быть непосредственно использованы. В случае же непосредственного контакта плазмы с поверхностью твердых тел в реальных экспериментах возникают сложные вопросы, касающиеся переходного слоя, так называемых плазменных бланкетов [149]. Поэтому, казалось бы, наибольший интерес могли бы представить задачи о переходном излучении на естественных резких границах, самопроизвольно возникающих в плазме, таких, например, как ударные волны, токовые слои и т. п. Однако такие задачи также имеют много специфических особенностей, связанных со структурой полей, действующих в пределах фронтов. Мы ограничимся здесь поэтому этими общими замечаниями о характере переходного излучения электромагнитных волн в плазме.

4. О переходном излучении продольных плазменных волн. Для переходного излучения продольных плазменных волн роль пространственной дисперсии велика. Для описания излучения заряда можно пользоваться формулами (3.174), (3.160). Здесь мы опять-таки ограничимся некоторыми общими замечаниями, касающимися специфики задачи. Во-первых, заметим, что фазовые скорости продольных волн в плазме могут быть достаточно малыми. Так, для ленгмюровских волн в изотропной плазме минимальная фазовая скорость волн может быть порядка $v_{\text{те}}$, а для ионно-звуковых волн она еще меньше — порядка $v_s = v_{\text{те}} \sqrt{m_e/m_1}$. Поэтому уже для зарядов с $v > v_{\text{те}}$ для продольных волн выполнено условие излучения В.—Ч. и, следовательно, при $v > v_{\text{те}}$ задачу о переходном излучении нужно решать в той постановке, которая обсуждалась в гл. 3 (§ 3.2), а именно, нужно либо рассматривать излучение прозрачной плазменной пластинки, либо учитывать поглощение продольных волн. Выходящее из пластинки, окруженной плазмой, излучение продольных волн будет содержать излучение В.—Ч. продольных волн, собранное либо с толщи пластинки, либо с оптической толщи (считается, что плотность плазмы различна внутри и вне пластинки). Если же плазменная пластинка окружена вакуумом или другой средой, в которой распространение продольных волн невозможно, то на границах пластинки происходит конверсия продольных волн, возникающих в результате излучения В.—Ч. внутри пластинки, в электромагнитные волны, которые могут распространяться вне пластинки. Во-вторых, нужно отметить, что в однородной плазме могут существовать продольные волны, длина волны которых весьма велика (k мало). Для таких волн даже весьма размытые скачки плотности плазмы могут стать меньше зоны формирования переходного излучения продольных волн.

5. Вероятности переходного рассеяния продольных волн в изотропной плазме. Общая теория переходного рассеяния, изложенная в гл. 4, применима для любых нормальных волн. Для

плазмы особый интерес представляют продольные волны. Мы остановимся поэтому на процессах переходного рассеяния продольных волн более подробно. Если не учитывать пространственную дисперсию, то диэлектрическая проницаемость задается формулой (4.1). Мощность излучения продольных волн можно найти по изменению энергии продольного поля:

$$Q^r = Q^{sc} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \hat{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 2\pi^2 \int \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}(t) \hat{\varepsilon}^{(0)} \frac{\partial}{\partial t} \times \\ \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) d\mathbf{k} = \frac{q^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int \frac{|\omega| |\varepsilon^{(1)}(\omega)|^2 \delta(\varepsilon^{(0)}(\omega))}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 |\varepsilon^{(0)}(\omega - \omega_0)|^2} \times \\ \times \delta(\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}) d\mathbf{k}. \quad (6.13)$$

В § 4.3 было указано, как учитывается пространственная дисперсия. В данном случае в (6.13) нужно, во-первых, вместо $\varepsilon^{(0)}(\omega - \omega_0)$ подставить $\varepsilon^l(\omega - \omega_0, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)$, где $\varepsilon^l(\omega, k)$ — продольная диэлектрическая проницаемость плазмы. Во-вторых, $\varepsilon^{(1)}(\omega)$ должно быть заменено на $\varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$. Будем считать, что все волны в рассматриваемом процессе являются продольными, т. е. продольными будут как рассеиваемая волна, так и рассеянная волна; кроме того, и виртуальная волна будет продольной (см. рис. 16, а). В этом случае тензор $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ (см. (4.95)) должен быть свернут с единичными векторами продольных волн, соответственно с $\mathbf{k}/k$, $\mathbf{k}_0/k_0$ и $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)/|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|$ ($E_i^{(0)} = (k_{0,i}/k_0) E^{(0)}$).

Итак,

$$\varepsilon^{(1)}(\omega) \rightarrow \frac{8\pi}{\omega} S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \frac{k_i}{k} \frac{k_{0,l}}{k_0} \frac{k_j - k_{0,j}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|} E^{(0)}. \quad (6.14)$$

Таким образом, с учетом пространственной дисперсии формула (6.13) приобретает вид

$$Q^{sc} = 16\pi q^2 |E^{(0)}|^2 \int \frac{|S(\omega(k), \mathbf{k}; \omega(k_0), \mathbf{k}_0)|^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 |\varepsilon^l(\omega(k) - \omega(k_0), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)|^2} \times \\ \times \left[\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon^l(\omega, k) \right]_{\omega=\omega(k)} \delta(\omega(k) - \omega(k_0) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}) d\mathbf{k}, \quad (6.15a)$$

где

$$S(\omega(k), \mathbf{k}; \omega(k_0), \mathbf{k}_0) = \mathbf{k} \mathbf{S}(\omega(k), \mathbf{k}; \omega(k_0), \mathbf{k}_0)/k, \quad (6.15b)$$

$$S_i(\omega(k), \mathbf{k}; \omega(k_0), \mathbf{k}_0) =$$

$$= S_{ijl}(\omega(k), \mathbf{k}; \omega(k_0), \mathbf{k}_0) k_{0,l} (k_j - k_{0,j})/k_0 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|. \quad (6.15b)$$

В (6.15) отброшен член, описывающий одновременное излучение двух волн с частотами $\omega(k)$ и $\omega(k_0)$, который возникает, если учесть, что

$$\delta(\varepsilon^l(\omega, k)) = \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon^l(\omega, k) \right]_{\omega=\omega(k)}^{-1} (\delta(\omega - \omega(k)) + \delta(\omega + \omega(k))) \quad (6.16)$$

и не отбрасывать второй член в числителе (6.16). Мощность излучения сразу двух волн также легко выписывается.

Если падающие волны являются случайными, то их рассеяние происходит независимо и надо в (6.15) просуммировать по всем гармоникам случайного поля, т. е. сделать замену

$$\frac{1}{2} |E^{(0)}|^2 = \overline{\sin^2(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t - \varphi_0)} |E^{(0)}|^2 = \int |E^{(0)}|_{\mathbf{k}_0}^2 d\mathbf{k}_0. \quad (6.17)$$

Для того чтобы ввести вероятность рассеяния на один падающий квант продольных волн (см. (4.152)), нужно выразить $|E^{(0)}|_{\mathbf{k}_0}$ через число квантов $N_{\mathbf{k}_0}$, используя выражение для энергии продольного поля

$$\int \left(\omega_0 \frac{\partial}{\partial \omega_0} \varepsilon^l(\omega_0, k_0) \right)_{\omega_0=\omega(k_0)} \frac{|E^{(0)}|_{\mathbf{k}_0}^2}{8\pi} d\mathbf{k}_0 = \int \frac{\hbar \omega(k_0)}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{k}_0} d\mathbf{k}_0. \quad (6.18)$$

В результате получим вероятность переходного рассеяния продольных волн в продольные же волны ($l \rightarrow l, s \rightarrow s$) в виде

$$w_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{32q^2 |S(\omega(k), \mathbf{k}; \omega(k_0), \mathbf{k}_0)|^2}{\pi (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 |\varepsilon^l(\omega - \omega_0, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)|^2} \times \\ \times \frac{(2\pi)^6 \delta(\omega(k) - \omega(k_0) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v})}{(\omega(k))^2 \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon^l(\omega, k) \right]_{\omega=\omega(k)} \left[\frac{\partial}{\partial \omega_0} \varepsilon^l(\omega_0, k_0) \right]_{\omega_0=\omega(k_0)}}. \quad (6.19a)$$

Стоит здесь привести, также для сравнения, вероятность рассеяния продольных волн в электромагнитные через виртуальную продольную волну, получаемую из (4.64), (4.95) с учетом (6.15б), (6.15в):

$$w_p^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{32q^2 |[\mathbf{k} S(\omega(k), \mathbf{k}; \omega(k_0), \mathbf{k}_0)]|^2}{\pi (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 k^2 |\varepsilon^l(\omega - \omega_0, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)|^2} \times \\ \times \frac{(2\pi)^6 \delta(\omega^t(k) - \omega(k_0) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v})}{\left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^t(\omega, k) \right]_{\omega=\omega^t(k)} \left[\frac{\partial}{\partial \omega_0} \varepsilon^l(\omega_0, k_0) \right]_{\omega_0=\omega(k_0)}}. \quad (6.19б)$$

Эта вероятность отличается от вероятности излучения продольных волн только тем, что вместо скалярного произведения S на волновой вектор излучаемой волны входит векторное произведение и вместо $\left[\omega^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon^l(\omega, k) \right]_{\omega=\omega(k)} = \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^l(\omega, k) \right]_{\omega=\omega(k)}$ в знаменателе соответствующей вероятности входит $\left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^t(\omega, k) \right]_{\omega=\omega^t(k)}$.

6. Вероятность переходного тормозного излучения продольных волн. Рассмотрим теперь вероятность переходного тормозного излучения в случае, когда излучаемая волна является продольной;

продольными являются также обе виртуальные волны (см. рис. 16. б).

Тогда (см. (4.60))

$$G_{ij}^l(\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) v_{\beta,j} = - \frac{4\pi i k_{0,i}}{k_0^2 \varepsilon^l(\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, k_0)} \quad (6.20)$$

и, следовательно, согласно (5.48)

$$M_i^{\alpha\beta} = - \frac{32 q_\alpha q_\beta S_{ijl}(\omega(k), \mathbf{k}; \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0) \pi^2 k_{0,l} (k_j - k_{0,j})}{k_0^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 \varepsilon^l(\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, k_0) \varepsilon^l((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\alpha, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)} \quad (6.21)$$

Согласно (5.60) вероятность переходного тормозного излучения будет описываться следующей формулой:

$$w_{\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta}^{\text{tr.b}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{2(4\pi)^6 q_\alpha^2 q_\beta^2 |S(\omega(k), \mathbf{k}; \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta, \mathbf{k}_0)|^2}{\hbar (\omega(k))^2 k_0^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 |\varepsilon^l((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\alpha, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)|^2} \times \\ \times \delta(\omega(k) - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_\beta - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\alpha) \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon^l(\omega, k) \right]_{\omega=\omega(k)}^{-1} |\varepsilon^l(\mathbf{k} \mathbf{v}_\beta, k_0)|^{-2}, \quad (6.22)$$

где величина S вновь описывается формулой (6.15б). Таким образом, как вероятность переходного рассеяния, так и вероятность переходного тормозного излучения определяются величиной $|S|^2$.

7. Вероятность переходного рассеяния на случайных магнитных полях. Статистической характеристикой случайных магнитных полей является коррелятор $|H|_{\omega, \mathbf{k}}^2$, определяемый для однородной в среднем и стационарной в среднем среды с помощью соотношения

$$\langle \delta H_{i, \omega, \mathbf{k}} \delta H_{j, \omega', \mathbf{k}'} \rangle = |H|_{\omega, \mathbf{k}}^2 (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (6.23)$$

Здесь знак $\langle \rangle$ описывает усреднение по статистическому ансамблю. Появление $\delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ в (6.23) является следствием уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$ или $\mu(k_i H_{i, \omega, \mathbf{k}}) = 0$. Следует отметить, что в общем случае $\omega \neq 0$ случайные магнитные поля могут быть выражены через случайные электрические поля при помощи уравнения Максвелла $\mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}} = [\mathbf{k} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}] / \omega$. Однако чаще всего интерес представляют квазистатистические магнитные поля, когда $\omega \rightarrow 0$ (или ω достаточно мало). В этом случае удобнее с самого начала не вводить случайных электрических полей и рассматривать только случайные магнитные поля. Наряду с ними мы будем считать существующими в системе некие электрические поля $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$ (они не связаны с $\delta \mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}}$). Мы будем считать, что как квазистатистические магнитные поля, так и электрические поля $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$ слабо возмущают траектории частиц плазмы. Тем не менее их воздействие на частицы плазмы изменяет (или создает дополнительные) токи плазмы. Эти токи будем раскладывать в ряд как по $\delta \mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}}$, так и по $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$. Нас будет инте-

ресовать нелинейный ток, пропорциональный первой степени $\delta H_{\omega, \mathbf{k}}$ и первой степени $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$:

$$j_{i, \omega, \mathbf{k}}^{nl} = \int \tilde{S}_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \delta H_{l, \omega_0, \mathbf{k}_0} E_{j, \omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0} d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (6.24)$$

Подставив в (6.24) поле равномерно движущегося заряда

$$E_{j, \omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0} = G_{js}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \delta(\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}) v_s q / (2\pi)^3 \quad (6.25)$$

и спроектировав $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{nl}$ на единичный вектор излучаемой волны $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\sigma$, мы можем найти среднее значение квадратичных комбинаций нелинейного тока, используя при усреднении соотношение (6.23):

$$\langle (\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\sigma \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{nl}) (\mathbf{e}_{-\mathbf{k}}^{nl} \mathbf{j}_{-\omega', -\mathbf{k}}^{nl}) \rangle = q^2 \int |\mathbf{k}_0 \Lambda(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)|^2 \times \\ \times \delta(\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}) \delta(\omega - \omega') d\omega_0 d\mathbf{k}_0 / k_0^2 (2\pi)^6, \quad (6.26)$$

$$\Lambda_l(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = e_{i, \mathbf{k}}^\sigma S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) G_{js}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) v_s. \quad (6.27)$$

Мощность рассеяния определяется следующим выражением:

$$\langle Q^{sc} \rangle = \frac{(2\pi)^6}{\pi} \int_0^\infty \omega d\omega \int_{-\infty}^\infty d\omega' \int \langle (\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{nl} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\sigma) (\mathbf{j}_{-\omega', -\mathbf{k}}^{nl} \mathbf{e}_{-\mathbf{k}}^\sigma) \rangle \times \\ \times \delta(\omega - \omega^\sigma(\mathbf{k})) \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 (e_{i, \mathbf{k}}^{\sigma*} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) e_{j, \mathbf{k}}^\sigma) \right]_{\omega = \omega^\sigma(\mathbf{k})}^{-1} d\mathbf{k}. \quad (6.28)$$

Отсюда, согласно определению вероятности рассеяния (4.151), получаем

$$w_p^{sc}(\mathbf{k}) = \frac{q^2 (2\pi)^3}{\pi \hbar} \int |H|_{\omega_0, \mathbf{k}_0}^2 |\mathbf{k}_0 \Lambda(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)|^2 \times \\ \times \frac{\delta(\omega(\mathbf{k}) - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}) d\omega_0 d\mathbf{k}_0}{k_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 (e_{i, \mathbf{k}}^{\sigma*} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) e_{j, \mathbf{k}}^\sigma) \right]_{\omega = \omega^\sigma(\mathbf{k})}}. \quad (6.29)$$

Эта вероятность описывает переходное рассеяние магнитных неоднородностей как в поперечные, так и в продольные волны.

Для статических магнитных неоднородностей

$$|H|_{\omega_0, \mathbf{k}_0}^2 = |H|_{\mathbf{k}_0}^2 \delta(\omega_0) \quad (6.30)$$

и переходное рассеяние магнитных неоднородностей в продольные волны медленными частицами (когда виртуальная волна тоже предполагается продольной) будет описываться следующей вероятностью:

$$w_p^{sc}(\mathbf{k}) = \frac{16\pi (2\pi)^3 q^2}{\hbar (\omega(k))^2 \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon^l(\omega, k) \right]_{\omega = \omega(k)}} \int |H|_{\mathbf{k}_0}^2 d\mathbf{k}_0 \times \\ \times \frac{|\mathbf{k}_0 \tilde{S}(\omega(k), \mathbf{k}; 0, \mathbf{k}_0)|^2 \delta(\omega(k) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v})}{k_0^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 |\varepsilon^l(\omega(k), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)|^2}, \quad (6.31)$$

где

$$\tilde{S}_l(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = \tilde{S}_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) k_i (k_j - k_{0,j}) / k |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|. \quad (6.32)$$

Таким образом, конкретное выражение для интересующих нас вероятностей полностью определяется коэффициентами нелинейных токов плазмы S_{ijl} и $\tilde{S}_{ijl}$.

§ 6.2. Нелинейные токи в плазме

1. Нелинейные токи в однородной плазме без магнитного поля.

В отличие от других сред, для которых расчеты нелинейных восприимчивостей (коэффициентов S_{ijl} , $\tilde{S}_{ijl}$) достаточно сложны и могут быть проведены лишь при использовании определенных модельных представлений, в бесстолкновительной плазме ($\mathcal{R} \gg 1$) точный расчет нелинейных восприимчивостей не вызывает особых затруднений, во всяком случае, принципиальных (правда, в ряде случаев расчеты очень громоздки). Ограничимся здесь простейшими примерами, когда отсутствуют внешние поля, плазма однородна и столкновениями частиц между собой пренебрегается. В этом случае можно использовать бесстолкновительное кинетическое уравнение для функции распределения частиц α :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{p\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f_{p\alpha} + e_\alpha \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} f_{p\alpha} = 0, \quad (6.33)$$

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{H}] / c. \quad (6.34)$$

Заряды частиц среды обозначаем буквой e_α (заряды частиц, участвующих в процессах излучения, по-прежнему обозначаются через q). Для компонент Фурье функции распределения $f_{p\alpha, \omega, \mathbf{k}}$ уравнение (6.33) принимает вид

$$f_{p\alpha, \omega, \mathbf{k}} = \frac{e_\alpha}{i(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha)} \int \mathbf{F}_{\alpha, \omega_0, \mathbf{k}_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} f_{p\alpha, \omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0} d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (6.35)$$

Это уравнение решаем по теории возмущений, подставляя в первую часть (6.35) в качестве нулевого приближения выражение

$$f_{p\alpha, \omega, \mathbf{k}}^{(0)} = f_{p\alpha} \delta(\omega) \delta(\mathbf{k}). \quad (6.36)$$

Через $f_{p\alpha}$ без индекса (0) здесь обозначаем невозмущенную функцию, что в дальнейшем не будет вызывать недоразумений, так как следующие приближения по $e_\alpha \mathbf{F}_\alpha$ будут иметь соответственно индексы (1), (2) и т. д. Имеем

$$f_{p\alpha, \omega, \mathbf{k}}^{(1)} = \frac{e_\alpha}{i(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha)} \mathbf{F}_{\alpha, \omega, \mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} f_{p\alpha}, \quad (6.37)$$

$$f_{p\alpha, \omega, \mathbf{k}}^{(2)} = \frac{e_\alpha^2}{i(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha)} \int \mathbf{F}_{\alpha, \omega_0, \mathbf{k}_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \frac{1}{i[\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\alpha]} \times \\ \times \mathbf{F}_{\alpha, \omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} f_{p\alpha} d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (6.38)$$

Искомый нелинейный ток равен

$$j_{i,\omega,k}^{nl} = \sum_{\alpha} \int e_{\alpha} v_{\alpha,i} f_{p_{\alpha},\omega,k}^{(2)} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3} = \\ = \int S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) E_{l,\omega_0,\mathbf{k}_0} E_{j,\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (6.39)$$

Учитывая, что $H_{\omega,k} = [\mathbf{k}\mathbf{E}_{\omega,k}]/\omega$, и симметризуя S_{ijl} путем замены $\omega_0, \mathbf{k}_0$ на $\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ и замены l на j , получаем

$$S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int \frac{v_{\alpha,i} e_{\alpha}^3}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}} \left\{ \left[\delta_{ls} \left(1 - \frac{\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_{\alpha}}{\omega_0} \right) + \frac{k_{0,s} v_{\alpha,l}}{\omega_0} \right] \times \right. \\ \times \frac{\partial}{\partial p_{\alpha,s}} \frac{1}{\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_{\alpha}} \times \\ \times \left[\delta_{jn} \left(1 - \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_{\alpha}}{\omega - \omega_0} \right) + \frac{(k_n - k_{0,n}) v_{\alpha,j}}{\omega - \omega_0} \right] \frac{\partial}{\partial p_{\alpha,n}} + \\ + \left[\delta_{js} \left(1 - \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_{\alpha}}{\omega - \omega_0} \right) + \frac{(k_s - k_{0,s}) v_{\alpha,j}}{\omega - \omega_0} \right] \frac{\partial}{\partial p_{\alpha,s}} \times \\ \left. \times \frac{1}{\omega_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_{\alpha}} \left[\delta_{ln} \left(1 - \frac{\mathbf{k}_0 \mathbf{v}_{\alpha}}{\omega_0} \right) + \frac{k_{0,n} v_{\alpha,l}}{\omega_0} \right] \frac{\partial}{\partial p_{\alpha,n}} \right\} f_{p_{\alpha}} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3}. \quad (6.40)$$

В частном случае, когда существует лишь один сорт частиц*), свертка последних индексов S_{ijl} с продольными единичными векторами $\mathbf{k}_0/k_0$ и $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)/|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|$ дает (суммирование по α опускаем):

$$S_i = S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) k_{0,l} (k_j - k_{0,j})/k_0 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| = \\ = - \frac{e_{\alpha}^3}{2k_0 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|} \int \frac{v_{\alpha,i}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}} \left\{ \mathbf{k}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \frac{1}{\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_{\alpha}} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} + \right. \\ \left. + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \frac{1}{\omega_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_{\alpha}} \mathbf{k}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \right\} f_{p_{\alpha}} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3}. \quad (6.41)$$

Часто представляет интерес случай, когда каждая из частот ω и ω_0 удовлетворяет неравенству

$$\omega, \omega_0 \gg (k, k_0) v_{T\alpha}; \quad v_{T\alpha} = \sqrt{T_{\alpha}/m_{\alpha}}, \quad (6.42)$$

но разность частот $\omega - \omega_0$ удовлетворяет противоположному неравенству

$$\omega - \omega_0 \ll |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| v_{T\alpha}. \quad (6.43)$$

Для слабозатухающих ленгмюровских волн неравенства (6.42), (6.43) всегда выполнены.

*) Такая ситуация возможна и при выполнении условия квазинейтральности, так как компоненты S зависят не только от концентрации N_{α} и зарядов e_{α} , но и от масс частиц m_{α} .

При выполнении (6.42), (6.43) второй член (6.41) мал и для нерелятивистских температур, когда в интеграле (6.41) можно положить $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$, получаем

$$S \approx \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2 k_0}{2\omega m_{\alpha} k_0 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|} \int \frac{1}{\omega - \omega_0 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_{\alpha}} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\alpha}}}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3}. \quad (6.44)$$

Используем теперь выражение для линейной продольной диэлектрической проницаемости, которое легко находится из (6.37):

$$\epsilon^{l(\alpha)}(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{k^2} \int \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}} \mathbf{k} \frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\alpha}}}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3}. \quad (6.45)$$

Отсюда и из (6.44) следует, что

$$S(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} k_0 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{8\pi k_0 \omega m_{\alpha}} (\epsilon^{l(\alpha)}(\omega - \omega_0, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|) - 1). \quad (6.46)$$

В частном случае, когда все поля (включая поле рассеянной волны) продольны, получаем

$$S(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = \frac{k S(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)}{k} = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} k k_0 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{8\pi k k_0 \omega m_{\alpha}} (\epsilon^{l(\alpha)}(\omega - \omega_0, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|) - 1). \quad (6.47)$$

Из формулы (6.41) можно получить также матричный элемент $S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; 0, \mathbf{k}_0)$, фигурировавший в теории переходного тормозного излучения ультрарелятивистских частиц (см. (5.64)). В этом случае основной вклад дает уже второй член в (6.41) ($\omega_0 = 0$, $\omega \gg k v_{T\alpha}$) и

$$k_{0,l} S_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; 0, \mathbf{k}_0) \approx \sum_{\alpha} \frac{1}{2} e_{\alpha}^3 \int \frac{v_{\alpha,i}}{\omega} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha,j}} \frac{1}{k_0 v_{\alpha}} \mathbf{k}_0 \frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\alpha}}}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3} = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} k_0^2}{8\pi m_{\alpha} \omega} (\epsilon^{l(\alpha)}(0, k_0) - 1) \delta_{ij}. \quad (6.47a)$$

Это соответствует результату (5.74), полученному из других соображений; при этом в данном случае в (6.47a) существен лишь один член $\alpha = e$, $e_{\alpha} = -e$, $m_{\alpha} = m_e$, т. е. в (5.74)

$$\epsilon(0, \mathbf{k}_0) \rightarrow \epsilon^{l(e)}(0, k_0) \approx 1 + 1/(k_0^2 d_e^2), \quad (6.48)$$

где

$$d_e = v_{Te}/\omega_{pe}, \quad v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}, \quad d \rightarrow d_e. \quad (6.49)$$

2. Нелинейные токи в плазме в сильных магнитных полях. В очень сильных магнитных полях движение частиц плазмы становится почти одномерным — вдоль магнитных силовых линий. Хотя частицы и имеют компоненты импульса поперек поля (вра-

щаются по винтовым линиям), поперечное по отношению к полю движение частиц не играет существенной роли, если

$$\omega \ll |e_\alpha| H_0 c / \mathcal{E}_\alpha = \omega_{H\alpha}, \quad (6.50)$$

$$k_\perp v_{T\alpha} \ll \omega_{H\alpha}. \quad (6.51)$$

В лабораторной плазме эти неравенства выполняются обычно для достаточно низкочастотных волн. Однако в окрестности пульсаров, где H_0 может достигать величины порядка $10^{12} - 10^{13}$ Гс, условия (6.50), (6.51) выполняются в очень широком интервале частот.

Мы рассмотрим случай, когда движение частиц можно практически считать одномерным и использовать одномерное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial z} + e_\alpha E \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial p_\alpha} = 0; \quad p_\alpha = \frac{\mathbf{p}_\alpha H_0}{H_0}, \quad E = \frac{\mathbf{E} H_0}{H_0}. \quad (6.52)$$

Такое уравнение соответствует также нулевому приближению в дрейфовом уравнении. Выделенное направление (вдоль $\mathbf{H}$) примем за ось z ($i=3$). Тогда не равным нулю будет только матричный элемент $S \equiv S_{333}$:

$$\begin{aligned} S = & -\frac{1}{2} \sum_\alpha e_\alpha^3 \int \frac{v_\alpha}{\omega - k_z v_\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left[\frac{1}{\omega - \omega_0 - (k_z - k_{0,z}) v_\alpha} \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial p_\alpha} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega_0 - k_{0,z} v_\alpha} \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial p_\alpha} \right] \frac{dp_\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2} \sum_\alpha e_\alpha^3 \omega \int \frac{dv_\alpha}{dp_\alpha} \frac{1}{\omega - k_z v_\alpha} \times \\ & \times \frac{1}{(\omega - \omega_0 - (k_z - k_{0,z}) v_\alpha)(\omega_0 - k_{0,z} v_\alpha)} \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{2\pi}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Здесь v_α — скорость частиц вдоль z ; формула (6.53) пригодна для любых распределений, в частности, и ультрарелятивистских скоростей частиц; нормировка функции распределения в (6.53) определяется соотношением

$$N_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{p\alpha} dp_\alpha}{2\pi}. \quad (6.54)$$

Хотя частицы в рассматриваемом приближении движутся строго по магнитному полю, волны могут, естественно, распространяться в любом направлении. Поэтому в (6.53) у волновых векторов поставлены индексы z , указывающие на то, что это — проекции волновых векторов на магнитное поле

$$k_z = \mathbf{k} \mathbf{H}_0 / H_0. \quad (6.55)$$

Для нерелятивистских распределений $dv_\alpha/dp_\alpha \approx 1/m_\alpha$ и при $\omega, \omega_1 \gg (k, k_1) v_{T\alpha}$ получаем

$$S = \sum_\alpha \frac{e_\alpha (k_z - k_{0,z})}{8\pi \omega_0 m_\alpha} (\epsilon^{(\alpha)} (\omega - \omega_0, k_z - k_{0,z}) - 1), \quad (6.56)$$

где

$$\varepsilon^{(\alpha)}(\omega, k_z) = 1 + \frac{4\pi e_\alpha^2}{k_z} \int \frac{1}{\omega - k_z v_\alpha} \frac{\partial f_{p_\alpha}}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{2\pi}. \quad (6.57)$$

Этот результат соответствует (6.46), если в (6.46) положить $k = k_z$. При $\omega - \omega_0 \ll |k_z - k_{0,z}| v_{T\alpha}$ получаем из (6.56)

$$S = \sum_\alpha \frac{e_\alpha \omega_{pz}^2}{8\pi \omega_0 m_\alpha v_{T\alpha}^2 (k_z - k_{0,z})}; \quad \omega_{pz}^2 = \frac{4\pi N_\alpha e_\alpha^2}{m_\alpha}. \quad (6.58)$$

Этот матричный элемент описывает переходное рассеяние. Матричный элемент, входящий в тормозное излучение, соответствует выполнению других соотношений: $\omega_0 = 0$, $\omega \gg k v_{T\alpha}$. Из (6.53) в этом случае следует ($p_\alpha \approx m_\alpha v_\alpha$):

$$S = - \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{2\omega} \int \frac{1}{k_{0,z} v_\alpha} \frac{\partial f_{p_\alpha}}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{2\pi} \approx \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3 N_\alpha}{2\omega k_{0,z} T_\alpha m_\alpha}. \quad (6.59)$$

Причина, по которой в сильном магнитном поле в (6.59) входит только проекция волнового вектора на магнитное поле, состоит в том, что разделение зарядов происходит вдоль $\mathbf{H}_0$ и экранируются только поля, направленные по $\mathbf{H}_0$.

Для релятивистских частиц в общем случае $dv_\alpha/dp_\alpha = (m_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha)^3 / m_\alpha$ и в тех же условиях, при выполнении которых получена формула (6.58), имеем (при $\mathcal{E}_\alpha \gg m_\alpha c^2$)

$$\begin{aligned} S &= - \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{2m_\alpha \omega_0 (k_z - k_{0,z})} \int_{m_\alpha c^2}^{\infty} \left(\frac{m_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^3 \frac{\partial f_{\mathcal{E}_\alpha}}{\partial \mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha = \\ &= - \sum_\alpha \frac{3e_\alpha^3}{2m_\alpha^2 \omega_0 c^3 (k_z - k_{0,z})} \int_{m_\alpha c^2}^{\infty} \left(\frac{m_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^4 f_{\mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Здесь $f_{\mathcal{E}_\alpha}$ — функция распределения частиц по энергиям:

$$N_\alpha = \int \frac{f_{p_\alpha} dp_\alpha}{2\pi} = \int_{m_\alpha c^2}^{\infty} f_{\mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha. \quad (6.61)$$

Формула (6.60) выведена в предположении, что нерелятивистских частиц нет ($f_{\mathcal{E}_\alpha} = 0$ при $\mathcal{E}_\alpha = m_\alpha c^2$).

Для максвелловского распределения

$$f_{p_\alpha} \approx (\pi N_\alpha / T_\alpha) \exp(-\mathcal{E}_\alpha / T_\alpha); \quad T_\alpha \gg m_\alpha c^2 \quad (6.62)$$

основной вклад в интеграл (6.60) дают нерелятивистские частицы,

и тогда получаем приближенно

$$S \approx \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3 N_{\alpha}}{2\omega_0 (k_z - k_{0,z}) m_{\alpha} T_{\alpha}^2} \int_{m_{\alpha} c^2}^{\infty} \left(\frac{m_{\alpha} c^2}{\mathcal{E}_{\alpha}} \right)^3 d\mathcal{E}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3 N_{\alpha} c^2}{4\omega_0 T_{\alpha}^2 (k_z - k_{0,z})}. \quad (6.63)$$

В случае $\omega_0 = 0$, $\omega \gg |k_z| v_{T\alpha}$ имеем для распределения при отсутствии нерелятивистских частиц

$$S = - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{2\omega k_{0,z} m_{\alpha}^2 c^3} \int_{m_{\alpha} c^2}^{\infty} \left(\frac{m_{\alpha} c^2}{\mathcal{E}_{\alpha}} \right)^4 f_{\mathcal{E}_{\alpha}} d\mathcal{E}_{\alpha}; \quad (6.64)$$

и, наконец, для максвелловского распределения (6.62) получаем

$$S = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3 N_{\alpha} c^2}{4\omega k_{0,z} T_{\alpha}^2}. \quad (6.65)$$

3. Нелинейные токи при наличии случайных магнитных полей. Рассмотрим случай, когда внешнее магнитное поле отсутствует, но имеется случайное магнитное поле, статистические свойства которого описываются выражением (6.23). Будем использовать теорию возмущений в уравнении (6.33), считая, что $\mathbf{F}_{\alpha}$ состоит из двух компонент — одной, $\mathbf{F}_{\alpha, \omega, \mathbf{k}}^H$, связанной со случайным магнитным полем:

$$\mathbf{F}_{\alpha, \omega, \mathbf{k}}^H = [\mathbf{v}_{\alpha} \delta \mathbf{H}_{\omega, \mathbf{k}}] / c, \quad (6.66)$$

и другой, $\mathbf{F}_{\alpha}^E$, связанной с электрическим полем плазменных волн:

$$\mathbf{F}_{\alpha}^E = \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} (1 - \mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha} / \omega) + \mathbf{k} (\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}) / \omega. \quad (6.67)$$

Нелинейный ток, пропорциональный как первой степени $\mathbf{F}_{\alpha}^H$, так и первой степени $\mathbf{F}_{\alpha}^E$, определяется следующим значением:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{p}_{\alpha}, \omega, \mathbf{k}}^{(2)} = & - \frac{e_{\alpha}^2}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}} \int \left[\left[\frac{\mathbf{v}_{\alpha}}{c} \delta \mathbf{H}_{\omega_0, \mathbf{k}_0} \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \times \right. \\ & \times \frac{1}{\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_{\alpha}} \mathbf{F}_{\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0}^E \frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\alpha}}}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} + \mathbf{F}_{\omega_0, \mathbf{k}_0}^E \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \times \\ & \left. \times \frac{1}{\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_{\alpha}} \left[\frac{\mathbf{v}_{\alpha}}{c} \delta \mathbf{H}_{\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0} \right] \frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\alpha}}}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \right] d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} j_{i, \omega, \mathbf{k}}^{nl} = & \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int v_{\alpha, i} f_{\mathbf{p}_{\alpha}, \omega, \mathbf{k}}^{(2)} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3} = \\ = & \int \tilde{S}_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \delta H_{l, \omega_0, \mathbf{k}_0} E_{j, \omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0} d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Это дает искомую функцию

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = & - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{c} \int \frac{v_{\alpha,i}}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha}} \times \\ & \times \left\{ e_{mnl} v_{\alpha,n} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha,m}} \frac{1}{\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_{\alpha}} \left[\delta_{js} \left(1 - \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_{\alpha}}{\omega - \omega_0} \right) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{(k_s - k_{0,s}) v_{\alpha,i}}{\omega - \omega_0} \right] \frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\alpha}}}{\partial p_{\alpha,s}} + \left[\delta_{ij} \left(1 - \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_{\alpha}}{\omega - \omega_0} \right) + \right. \\ & + \left. \left. \frac{(k_s - k_{0,s}) v_{\alpha,j}}{\omega - \omega_0} \right] \frac{\partial}{\partial p_{\alpha,s}} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_{\alpha}} e_{nml} v_m \frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\alpha}}}{\partial p_{\alpha,n}} \right\} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3}. \quad (6.70) \end{aligned}$$

Здесь e_{nmj} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга, так что

$$[\mathbf{ab}]_i = e_{inm} a_n b_m. \quad (6.71)$$

В частном случае статических магнитных полей ($\omega_0 = 0$) основным становится второй член (6.70). Однако он обращается в нуль в случае, если $f_{\mathbf{p}_{\alpha}}$ зависит только от энергии частиц (отсутствует анизотропия). Действительно, в этом случае

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\alpha}}}{\partial p_{\alpha,n}} = v_n \frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\alpha}}}{\partial \mathcal{E}_{\alpha}}; \quad e_{nml} v_n v_m = 0. \quad (6.72)$$

Итак, в условиях, когда функция распределения частиц не является только функцией от энергии частиц (а зависит, например, от их углов) и, кроме того, $\omega \gg kv_{T\alpha}$, получаем ($v_{\alpha} \ll c$):

$$\tilde{S}_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{c\omega m_{\alpha}} \delta_{ij} e_{mnl} \int v_{\alpha,n} \frac{1}{k_0 v_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha,m}} f_{\mathbf{p}_{\alpha}} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3}. \quad (6.73)$$

В случае максвелловского распределения или любого другого распределения, когда $f_{\mathbf{p}_{\alpha}}$ зависит только от $\mathcal{E}_{\alpha}$, при $\omega \gg kv_{T\alpha}$ получаем

$$\tilde{S}_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{c\omega^2} \int v_{\alpha,i} v_{\alpha,n} e_{mnl} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha,m}} \frac{\partial f_{\mathbf{p}_{\alpha}}}{\partial p_{\alpha,j}} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{(2\pi)^3}. \quad (6.74)$$

Для нерелятивистских частиц имеем окончательно

$$\tilde{S}_{ijl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \approx - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3 e_{ijl} N_{\alpha}}{c\omega^2 m_{\alpha}^2}. \quad (6.75)$$

§ 6.3. Переходное рассеяние на нерелятивистских частицах изотропной плазмы

1. Спонтанное рассеяние продольных волн в плазме. Будем считать скорости частиц плазмы нерелятивистскими. Часто встречающаяся в экспериментах ситуация соответствует наличию на-

ряду с тепловыми (максвелловскими) частицами также и небольшой доли неравновесных надтепловых частиц, имеющих скорости, существенно большие средних тепловых, но все же нерелятивистские скорости. Распределенные по Максвеллу электроны с температурой T_e и ионы с температурой T_i (причем, вообще говоря, $T_e \neq T_i$) называем тепловыми, а неравновесные частицы — быстрыми или надтепловыми. Считаем, что для всех частиц $v \ll c$ и, в частности, $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e} \ll c$, $v_{Ti} = \sqrt{T_i/m_i} \ll c$.

Рассмотрим вначале случай, когда надтепловые быстрые частицы отсутствуют. Условие рассеяния (являющееся, на квантовом языке, как мы видели в гл. 4, следствием квантовых законов сохранения энергии импульса при рассеянии)

$$\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_0) = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\alpha \quad (6.76)$$

показывает, что изменение частоты волны при рассеянии на нерелятивистской частице хотя и не равно нулю, но, как правило, мало (исключение могут составить лишь волны с весьма большими значениями k_0 , рассеивающиеся на быстрых надтепловых частицах; см. ниже). Действительно, если рассеиваемая волна является ленгмюровской, то для нее $\omega(k_0) \approx \omega_{pe}$, $k_0 v_{Te} \ll \omega_{pe}$, и, следовательно, условие (6.76) разрешает рассеяние на тепловых электронах ленгмюровской волны в другую ленгмюровскую волну; при этом величина волнового числа $|\mathbf{k}|$ рассеянной волны может быть любой (в области их слабого затухания), так как при заданном $|\mathbf{k}|$ всегда можно найти угол вектора $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ с v_e , для которого соотношение (6.76) выполняется. При рассеянии на тепловых ионах также происходит рассеяние ленгмюровских волн в ленгмюровские, однако величина волнового числа $|\mathbf{k}|$ рассеянной волны уже должна быть достаточно близкой к величине волнового числа рассеиваемой волны $|\mathbf{k}_0|$ (т. е. разность частот $\omega(k) - \omega(k_0)$ должна быть достаточно малой). Действительно, при рассеянии на тепловых ионах левая часть (6.76) мала, т. е. $|\mathbf{k}|$ близко к $|\mathbf{k}_0|$ и, следовательно, правая часть (6.76) порядка $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_i \sim k_0 v_{Ti}$, т. е. $\omega(k) - \omega(k_0) = 3v_{Te}^2(k^2 - k_0^2)/2\omega_{pe} \approx k_0 \times (k - k_0) 3v_{Te}^2/\omega_{pe}$; $k - k_0 \sim 3\omega_{pe} v_{Ti}/v_{Te}^2$. Если же происходит рассеяние ленгмюровских волн в электромагнитные, то частота электромагнитных волн должна быть весьма близкой к ω_{pe} . В этом случае для электромагнитных волн $\omega(k) = kc/\sqrt{1 - \omega_{pe}^2/(\omega(k))^2}$, и при $kc \ll \omega_{pe}$ $\omega(k) \approx \omega_{pe} + k^2 c^2/2\omega_{pe}$ и условие (6.76) имеет вид

$$k^2 c^2 - 3k_0^2 v_{Te}^2 = 2\omega_{pe}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\alpha. \quad (6.77)$$

Если рассеяние происходит на электронах, то оказывается, что $k \ll k_0$ и правая часть (6.77) имеет порядок $2k_0 v_{Te} \omega_{pe} \gg k_0^2 v_{Te}^2$ (для слабого затухания ленгмюровских волн необходимо выполнение неравенства $k v_{Te} \ll \omega_{pe}$), т. е. в (6.77) можно пренебречь вторым членом левой части. Итак, $kc \sim \sqrt{2\omega_{pe} k_0 v_{Te}}$, $(\omega(k) - \omega_{pe})/\omega_{pe} \sim k_0 v_{Te}/\omega_{pe} \ll 1$. Если рассеяние происходит на ионах,

то, опять-таки, $k \ll k_0$, но правая часть (6.77) имеет уже порядок $2\omega_{pe}k_0v_{T1}$ и будет меньше второго члена левой части (6.77), если $k_0 \gg \omega_{pe}v_{T1}/v_{Te}^2$. Тогда $k \approx \sqrt{3}k_0v_{Te}/c \ll k_0$, а излучаемая частота $\omega(k)$ будет также близкой к ω_{pe} , $(\omega(k) - \omega_{pe})/\omega_{pe} = 3k_0^2v_{Te}^2/2\omega_{pe}^2 \ll 1$. Таким образом, плазма, в которой возбуждены достаточно интенсивные ленгмюровские колебания, должна из-за их рассеяния на тепловых частицах излучать электромагнитные волны на частоте, близкой к ω_{pe} .

Рассеяние ионно-звуковых волн возможно как в ионно-звуковые, так и в ленгмюровские и электромагнитные. Однако, если для рассеяния ионно-звуковых волн в ионно-звуковые соотношения (6.76) выполняется либо с существенным изменением величины волнового числа (для рассеяния на электронах), либо с малым его изменением (для рассеяния на понах, когда $(k - k_0)/k_0 \sim \sqrt{T_1/T_e} \ll 1$), то рассеяние ионно-звуковых волн в ленгмюровские или электромагнитные разрешено только на электронах и для весьма коротковолновых ионно-звуковых колебаний. Действительно, из (6.66) имеем $\omega(k_0)$, $k v_{Te} \ll \omega(k)$, т. е. $\omega(k) = -k_0 v_e \sim k_0 v_{Te}$, $\omega(k) > \omega_{pe}$, $k_0 > \omega_{pe}/v_{Te}$.

Вероятность рассеяния ленгмюровских волн в электромагнитные можно получить из уравнения (6.196), подставив в него конкретное выражение для S из (6.46). Имеем:

$$w_{p\alpha}^{sc}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{(2\pi)^3 q_\alpha^2 e^2 [\mathbf{k}\mathbf{k}_0]^2 \varepsilon^{l(e)}(\omega(k) - \omega(k_0), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|) - 1}{\omega_{pe}^2 m_e^2 k_0^2 \varepsilon^l(\omega(k) - \omega(k_0), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)^2} \times \\ \times \delta(\omega(k) - \omega(k_0) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_\alpha). \quad (6.78)$$

Здесь учтено, что в выражение для S основной вклад вносят электроны плазмы (индекс (e) в числителе в выражении для ε^l). Вкладом ионов в числителе (6.78) можно пренебречь из-за их большой массы ($1/m_\alpha$ в (6.46)). В знаменатель (6.78) входит полная продольная диэлектрическая проницаемость, учитывающая вклады как электронов, так и ионов плазмы. Входящий в (6.78) множитель, зависящий от диэлектрических проницаемостей, обозначим буквой $F_{0,\alpha}$ ($-e$ — заряд электрона)

$$F_{0,\alpha} = \frac{q_\alpha}{e} \frac{\varepsilon^{l(e)}(\omega(k) - \omega(k_0), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|) - 1}{\varepsilon^l(\omega(k) - \omega(k_0), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)}. \quad (6.79)$$

В предельных случаях множитель $F_{0,\alpha}$ оказывается практически постоянным.

Так, при выполнении неравенства $|\omega(k) - \omega(k_0)| \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| v_{T1}$, которое в силу соотношения (6.76) означает, что $v \gg v_{T1}$, вкладом ионов в знаменатель (6.79) можно пренебречь и, учтя, что $\omega_{pe} \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| v_{Te}$ или $\varepsilon^{l(e)}(\omega(k) - \omega(k_0), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|) \gg 1$, получим

$$F_{0,\alpha} \approx q_\alpha/e; \quad v \gg v_{T1}. \quad (6.80)$$

В другом предельном случае $v \ll v_{T1}$ нужно учесть, что (Ze — за-

ряд ионов плазмы)

$$\varepsilon^{(e)}(\omega(k) - \omega(k_0), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|) - 1 \approx \approx \frac{T_i}{T_e Z} [\varepsilon^{(i)}(\omega(k) - \omega(k_0), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|) - 1]; \quad (6.81)$$

$$ZN_i = N_e; \quad (6.82)$$

и, следовательно,

$$F_{0,\alpha} \approx q_\alpha / [e(1 + T_e Z / T_i)]. \quad (6.83)$$

При $T_e = T_i$ имеем

$$F_{0,\alpha} \approx q_\alpha / [e(1 + Z)]. \quad (6.84)$$

Полная интенсивность спонтанного переходного рассеяния, согласно (6.78), будет равна

$$Q_\alpha^{\text{sc}} = \int \frac{e^2 [\mathbf{k}\mathbf{k}_0]^2 |F_{0,\alpha}|^2 \hbar \omega(k_0) N_{\mathbf{k}_0} \delta(\omega(k) - \omega(k_0) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) v_\alpha) d\mathbf{k} d\mathbf{k}_0}{k^2 k_0^2 \omega_p^2 m_e^2 (2\pi)^3} \quad (6.85)$$

Далее, в (6.85) интегрирование по $k = |\mathbf{k}|$ может быть заменено на интегрирование по $\omega(k)$, если учесть, что

$$k^2 dk = \frac{k}{2} dk^2 = \frac{k}{2c^2} d[\varepsilon(\omega(k)) (\omega(k))^2] = \frac{(\omega(k))^2 \sqrt{\varepsilon(\omega(k))}}{c^3} d\omega(k). \quad (6.86)$$

Здесь $\varepsilon(\omega(k))$ — значение $\varepsilon(\omega, 0)$ при $\omega = \omega(k)$; $\varepsilon(\omega(k)) \approx 1 - \omega_{pe}^2 / (\omega(k))^2$.

Интегрирование по $\omega(k)$ производится с помощью δ -функции, а интегрирование по углам дает $8\pi/3$. Итак:

$$Q_\alpha^{\text{sc}} \approx \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^3} |F_{0,\alpha}|^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} W_0; \quad \varepsilon(\omega_0) = \varepsilon(\omega(k_0)), \quad (6.87)$$

где

$$W_0 = \int \frac{\hbar \omega(k_0) N_{\mathbf{k}_0} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^3} \quad (6.88)$$

— полная энергия рассеиваемых ленгмюровских колебаний. Если падающая волна монохроматическая, т. е.

$$E = E^{(0)} \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t - \varphi_0), \quad (6.89)$$

то

$$W_0 = \frac{\overline{E^2}}{4\pi} = \frac{(E^{(0)})^2}{8\pi}. \quad (6.90)$$

В этом случае

$$Q_\alpha^{\text{sc}} = \frac{q_\alpha^2 e^2}{3m_e^2 c^3} |F_{0,\alpha}|^2 (E^{(0)})^2 \sqrt{\varepsilon(\omega_0)}. \quad (6.91)$$

Тот же результат следует и из общей формулы переходного рассеяния (4.64). Интенсивность рассеяния зависит от полной энергии ленгмюровских волн W_0 только в том случае, если множитель F_0 можно считать постоянным и не зависящим от $\mathbf{k}_0$.

Результаты (6.87), (6.91) не учитывают обычного (томсоновского) рассеяния и его интерференции с переходным рассеянием и в этом отношении, строго говоря, описывают процесс рассеяния только для частиц с $M_\alpha \rightarrow \infty$. Практически же выражение (6.91) с хорошей точностью применимо для любых нерелятивистских ионов. Учесть обычное томсоновское рассеяние можно, если иметь в виду, что мощность томсоновского рассеяния на частице заряда q_α и массы M_α равна

$$Q_\alpha^T = \frac{q_\alpha^4 (E^{(0)})^2 V \varepsilon(\omega_0)}{4c^3 M_\alpha^2}. \quad (6.92)$$

С учетом интерференции между томсоновским и переходным рассеянием полная мощность рассеяния на частице с массой M_α и зарядом q_α может быть выражена через мощность томсоновского рассеяния на электронах:

$$Q_e^T = \frac{e^4 (E^{(0)})^2 V \varepsilon(\omega_0)}{3c^3 m_e^2}. \quad (6.93)$$

Имеем

$$Q_\alpha^{\text{sc}} = Q_e^T |F_\alpha|^2, \quad (6.94)$$

где

$$F_\alpha = F_{0,\alpha} + \frac{m_e}{M_\alpha} \frac{q_\alpha^2}{e^2}. \quad (6.95)$$

Для электронов $F_e = 1 + F_{0,e}$, т. е. слагаемое $F_{0,e}$ учитывает в данном случае отличие полного сечения рассеяния от томсоновского сечения рассеяния. Для ионов $m_e \ll M_\alpha$ и $F_\alpha \approx F_{0,\alpha}$. Формула (6.94) получена для рассеяния продольных ленгмюровских волн в поперечные электромагнитные волны. Однако она сохраняется и в случае рассеяния ленгмюровских волн в ленгмюровские же волны. В этом случае лишь мощность томсоновского рассеяния Q_e^T ленгмюровских волн в ленгмюровские отличается от (6.93) численным множителем $1/2$. Действительно, вероятность рассеяния ленгмюровских волн в ленгмюровские, согласно (6.19а), отличается от вероятности (6.19б), описывающей рассеяние ленгмюровских волн в электромагнитные, заменой квадрата векторного произведения $[\mathbf{k}\mathbf{k}_0]^2$ на квадрат скалярного произведения $(\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2$. Интеграл по углам от квадрата векторного произведения отличается от интеграла по углам от квадрата скалярного произведения в два раза. В общем же случае при рассеянии ленгмюровских волн в ленгмюровские (с учетом интерференции переходного и томсоновского рассеяния) в общей интенсивности рассеяния появляется тот же самый множитель F_α (см. (6.95)).

Поскольку при $q_\alpha^2 = e^2$ и $v \gg v_{Ti}$ $|F_0| \approx 1$, а при $q_\alpha^2 = e^2$ и $v \ll v_{Ti}$ $|F_0| \sim 1$, формула (6.94) подчеркивает тем самым то обстоятельство, что переходное рассеяние на ионах (в частности, на ионах плазмы — для них $M_\alpha = m_i$) по порядку величины соответствует томсоновскому рассеянию на электронах. Для многозарядных ионов $q = Ze$; $Z \gg 1$ (напомним, что заряд электрона равен $-e$). Мощность переходного рассеяния для $T_e \approx T_i$ отличается от мощности томсоновского рассеяния на электронах незначительно ($F_0 \approx Z/(1 + T_e Z/T_i) \approx T_i/T_e \approx 1$).

Вместе с тем, полная мощность рассеяния на электронах, согласно (6.94), (6.95), будет существенно меньше мощности томсоновского рассеяния ($F_0 < 0$). Действительно, только очень медленные электроны с $v \ll v_{Ti}$ будут иметь сечение рассеяния, сравнимое с томсоновским. Полагая $M_\alpha = m_e$, $q_\alpha = -e$, $N_i = ZN_e$, в этом случае получаем

$$F = 1 - \frac{1}{1 + T_e Z/T_i} = \frac{1}{1 + T_i/T_e Z}. \quad (6.96)$$

Этот результат записан для случая, когда для всех ионов плазмы $q_i = Ze$, $N_i = ZN_e$ (условие квазинейтральности). При $T_e = T_i$, $Z = 1$ отсюда следует $F = 1/2$ и $Q_i^{sc} = 1/4 Q_e^T$. Для электронов с $v \gg v_{Ti}$, согласно (6.80), получаем $F \approx 0$. Мощность рассеяния все же строго не равна нулю, так как результат $F = 0$ следует из приближенного выражения для F_0 , которое в свою очередь получено из приближенного выражения для S (первое приближение по малому параметру $k_0 v_{Te}/\omega_{pe}$). При учете членов следующего порядка по $k v_{Te}/\omega_{pe}$ получаем $F \sim k_0 v_{Te}/\omega_{pe}$, т. е. мощность рассеяния ленгмюровских волн на электронах меньше мощности томсоновского рассеяния в $k_0^2 v_{Te}^2/\omega_{pe}^2 \ll 1$ раз.

Среднюю мощность рассеяния для тепловых электронов можно определить как мощность рассеяния, усредненную по максвелловскому распределению электронов. Такая мощность будет всегда много меньше мощности томсоновского рассеяния, поскольку относительная доля электронов с $v \ll v_{Ti}$, когда мощность рассеяния порядка Q_e^T , мала, а для основной части электронов с $v \gg v_{Ti}$ мощность рассеяния мала. Этот эффект подавления рассеяния на электронах является следствием интерференции томсоновского и переходного рассеяния. Он наиболее ярко выражен для частот $\omega \sim \omega_{pe}$. Для $\omega \gg \omega_{pe}$ при рассеянии уже электромагнитных волн в электромагнитные (ленгмюровские) волны не могут иметь частоты $\omega \gg \omega_{pe}$ эффект интерференции и подавления рассеяния выражен слабо и может быть существенным, только если разность частот рассеянной и рассеиваемой волн достаточно мала.

Интересно, что для позитрона ($q_\alpha = e$, $M_\alpha = m_e$) томсоновское и переходное рассеяние (причем последнее происходит в плазме, состоящей из электронов и ионов) усиливают друг друга.

В случае $v \ll v_{Ti}$:

$$F = \frac{2 + T_e Z / T_i}{1 + T_e Z / T_i}. \quad (6.97)$$

Так, при $T_e = T_i$, $Z = 1$ имеем $F = 3/2$, т. е.

$$Q_p^{sc} \approx 9/4 Q_e^T. \quad (6.98)$$

Естественно, рассеяние на позитронах будет подавлено в антиплазме (составленной, например, из позитронов и антипротонов).

Для рассеяния на позитронах в электронно-ионной плазме при $v \gg v_{Ti}$ имеем $F \approx 2$ и, следовательно,

$$Q_p^{sc} \approx 4 Q_e^T. \quad (6.99)$$

Эти примеры иллюстрируют большую роль процессов переходного рассеяния в плазме (о других подробностях см. [130, 73, 112, 122, 123, 128, 127]).

2. Индуцированное рассеяние продольных волн в плазме. Процессы индуцированного рассеяния продольных волн (например, l -волн) в волны того же типа (тоже l -волны), как уже отмечалось, соответствуют нелинейным процессам. Для ленгмюровских колебаний основным нелинейным процессом для относительно малых амплитуд (критерий см. ниже) является их индуцированное рассеяние на ионах плазмы. Вероятность этого процесса, как указывалось, отличается от (6.78) тем, что входит скалярное, а не векторное произведение волновых векторов рассеянной и рассеиваемой волны, т. е.

$$w_{pi}^{sc,1,1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{(2\pi)^3 q_i^2 e^2 (\mathbf{k} \mathbf{k}_0)^2}{\omega_p^2 m_e^2 k^2 k_0^2} |F_0|^2 \delta(\omega(k) - \omega(k_0) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_i). \quad (6.100)$$

Нелинейное уравнение, описывающее соответствующий индуцированный процесс, для равновесных (распределенных по Максвеллу) ионов имеет вид

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{n1} = \frac{1}{N_{\mathbf{k}}} \left(\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt} \right)_{ind} = - \int w_{pi}^{sc,1,1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{\mathbf{k}_0} \frac{\omega^1(k) - \omega^1(k_0)}{T_i} \times \\ \times \frac{f_{\mathbf{p}_i} d\mathbf{k}_0 d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^6}. \quad (6.101)$$

Легко видеть, что (6.101) описывает постепенное уменьшение частоты l -квантов, а следовательно, и их волнового числа. Нелинейные уравнения типа (6.101) неоднократно использовались для анализа динамики уменьшения частот волн и нахождения распределения интенсивности (или $N_{\mathbf{k}}$) по волновым числам k в условиях квазистационарного потока волн по волновым числам (частотам). В последнем случае предполагается, что в некоторой области волновых чисел k имеется источник колебаний (напри-

мер, пучок частиц, генерирующий колебания) и в некоторой области волновых чисел имеется сток колебаний (поглощение). В промежуточной области, где нет источника и стока колебаний и «работает» только нелинейное взаимодействие, справедливо уравнение (6.101). По аналогии с колмогоровской турбулентностью несжимаемых жидкостей эту область иногда называют инерционной, а спектр колебаний — колмогоровским. Для ленгмюровских колебаний был найден колмогоровский спектр $N_k \sim 1/k^2$ (см. [73]).

Для ионно-звуковых колебаний также может быть записано уравнение типа (6.101). Однако их линейная раскачка или затухание $\gamma_k^{(0)}$, связанные с эффектом индуцированного излучения В.—Ч. для s -волн, должны при этом учитываться наряду с нелинейным эффектом:

$$\frac{1}{N_k} \frac{dN_k}{dt} = \gamma_k^{(0)} - \int w_{p_i}^{sc.s,s}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) N_{k_0} (\omega^s(k) - \omega^s(k_0)) f_{p_i} \frac{dk_0 dp_i}{T_i (2\pi)^6}. \quad (6.102)$$

Процесс индуцированного рассеяния ионно-звуковых колебаний в ионно-звуковые же колебания на ионах плазмы является также основным нелинейным процессом, как и в случае ленгмюровских колебаний (рассеяние на электронах мало [215]). Вероятность рассеяния $w_{p_i}^{sc.s,s}$ определяется как переходным, так и томсоновским рассеянием, причем их взаимная компенсация (интерференция) уменьшает вероятность рассеяния по сравнению с томсоновской вероятностью в T_i/T_e раз [73].

Нелинейное уравнение типа (6.102) интенсивно использовалось для определения спектра ионно-звуковых колебаний в условиях, когда их раскачка связана с наличием тока в плазме [123]. При этом был найден спектр [123]

$$N_k \sim \frac{1}{k^4} \ln \frac{k_0}{k}, \quad (6.103a)$$

где k_0 — константа интегрирования. Этот спектр был экспериментально проверен в ряде работ (в случае, когда ток возникает на фронте ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля [131, 131a]). Спектр (6.103) использовался в [132] для определения аномального сопротивления плазмы току (закон Ома в плазме при возбуждении током ионно-звуковых колебаний). Уравнение типа (6.102) использовалось и для определения спектра других типов колебаний плазмы, как тех, которые могут играть роль в аномальном сопротивлении (например, ионно-циклотронных волн), так и тех, которые приводят к эффективному рассеянию частиц и их аномальной пространственной диффузии (вистлеры, альвфеновские и магнитозвуковые волны); а также тех, которые могут приводить к эффективному нагреву плазмы (нижнегибридные и др. волны) и т. п. (см. [73, 112, 124, 125]).

3. Образование конденсата колебаний. Одним из важных следствий эффектов рассеяния колебаний в плазме является возможность возникновения так называемого конденсата колебаний. Для тех колебаний, поглощение которых мало, необходимо использовать уравнение (6.101), которое сохраняет полное число квантов (на каждый поглощенный квант в процессе рассеяния приходится один испущенный квант). С другой стороны, процессы рассеяния приводят к «покраснению» квантов (уменьшению их частоты), так как энергия волн отдается частицам плазмы, на которых происходит рассеяние. Уменьшение частоты может привести к накоплению колебаний при малых значениях волновых чисел k_0 , если с уменьшением частоты $\omega(k_0)$ уменьшается и значение k_0 . Это имеет место, например, для ленгмюровских колебаний, где этот эффект выражен особенно сильно, поскольку относительно небольшое уменьшение частоты ленгмюровских волн может привести к значительному уменьшению k_0 . Это связано с тем, что дисперсионная поправка $3k_0^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe}$ к частоте ω_{pe} для ленгмюровских колебаний мала. Покраснение ленгмюровских квантов (уменьшение их частоты) мало меняет их полную плотность энергии, но уменьшает k_0 , в результате чего колебания скапливаются в области больших длин волн без значительного изменения их первоначальной энергии. В принципе, в отсутствие других процессов, накопление колебаний должно продолжаться до тех пор, пока все они не будут иметь значения k_0 , близкие к нулю, т. е. возникает так называемый конденсат колебаний. Рассматриваемые процессы чисто классические и к бозе-конденсации отношения не имеют. При накоплении достаточно большой энергии в области малых k_0 вступают в игру тоже классические (неквантовые) процессы, которые приводят к рассасыванию конденсата. Однако весьма заметное накопление колебаний в области малых значений k_0 , до вступления в игру процессов, приводящих к размыванию конденсата, представляет собой реальное явление, имеющее важные физические следствия. Сейчас подробно изучены свойства не только ленгмюровского конденсата, но и конденсата других плазменных колебаний, например, так называемых нижнегибридных колебаний.

Среди механизмов, рассасывающих ленгмюровский конденсат, известны два — это, во-первых, модуляционная неустойчивость (см. ниже) и, во-вторых, индуцированное переходное рассеяние длинноволновых ленгмюровских колебаний, образующих конденсат, на неоднородностях концентрации плазмы (т. е. процесс, обратный рассеянию неоднородности концентрации на электроне с испусканием ленгмюровской волны). Неоднородности концентрации могут существовать в плазме как независимо (например, из-за наличия ионно-звуковых колебаний), так и образоваться благодаря упомянутой модуляционной неустойчивости.

Физика модуляционной неустойчивости (см. [133—135]) состоит в том, что для интенсивных достаточно длинноволновых колебаний становится энергетически выгоднее неоднородное рас-

пределение энергии колебаний в пространстве с образованием областей пониженной плотности плазмы, в которых сосредотачивается энергия волн.

Критерий модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн имеет вид

$$\frac{|E|^2}{4\pi n_0 T_e} > k_0^2 d_e^2; \quad d_e = \frac{v_{Te}}{\omega_{pe}}. \quad (6.1036)$$

В (6.1036) считается, что ширина спектра ленгмюровских колебаний Δk_0 порядка k_0 . Уменьшение k_0 в процессах переходного рассеяния, приводящее к концентрации колебаний при малых k_0 , должно на определенном этапе автоматически включать модуляционную неустойчивость, так как для достаточно малых k_0 критерий (6.1036) всегда выполняется. Образование разрежений плотности в плазме с запертыми в них колебаниями является в некотором смысле неотвратимым процессом. Можно сказать, что при любом достаточно мощном вводе энергии в плазму в ней должны самопроизвольно возникать неоднородности концентрации, которые должны поддерживаться развивающейся модуляционной неустойчивостью. С этими проблемами самопроизвольного образования сильно неоднородной плазмы сейчас встречаются в условиях лазерно-плазменного или пучково-плазменного взаимодействия. Здесь мы хотели обратить внимание на то, что в такой плазме очень существенную роль должны играть процессы переходного рассеяния возникших в плазме сильных неоднородностей концентрации на быстрых частицах плазмы. Существенным моментом является также то, что модуляционная неустойчивость, согласно существующим представлениям [136, 137], должна в конечном счете приводить также к генерации быстрых частиц в плазме. Физика такой генерации весьма проста. Уменьшение размеров разрежений плотности δN , происходящее из-за развития модуляционных возмущений, означает увеличение эффективных значений волновых чисел $k_0 \sim 1/r_0$ возмущений плотности (r_0 — характерный пространственный размер неоднородности плотности). Это происходит до тех пор, пока k_0 не станут сравнимы с $1/d_e$ и не возникнет интенсивного поглощения Ландау. При этом энергия поглощается на самых быстрых частицах распределения, так как они первыми «встречаются» с потоком энергии колебаний в сторону больших значений k_0 . В результате образуются «хвосты» распределения — быстрые электроны, которые получают основную долю вкладываемой в плазму энергии (об экспериментальном доказательстве последнего утверждения см. [138]). Часто экспериментально наблюдаются также и быстрые ионы, которые ускоряются, по-видимому, амбиполярными электрическими полями, возникающими в плазме при генерации быстрых электронов. Если энергия вкладывается в нижнегибридные волны, также происходит генерация как быстрых (надтепловых) ионов, так и быстрых надтепловых электронов (см., например, [139]).

Таким образом, при достаточно большой мощности ввода энергии в плазму можно ожидать появления цепи процессов, инициированных переходным рассеянием коллективных плазменных волн на тепловых частицах плазмы, которые почти с необходимостью приводят к появлению в плазме сильных неоднородностей концентрации и быстрых надтепловых частиц. Тогда весьма существенным становятся процессы переходного рассеяния неоднородностей («волн») концентраций плазмы на быстрых частицах. При этом в качестве рассеянной волны может фигурировать длинноволновое колебание, принадлежащее к конденсату. Индуцированное рассеяние такого типа приводит к эффективному поглощению колебаний конденсата на неоднородностях концентрации.

4. Переходное рассеяние быстрых надтепловых частиц на неоднородностях концентрации плазмы. Среди возможных процессов переходного рассеяния быстрых частиц на неоднородностях концентрации (спонтанных и индуцированных) мы обсудим здесь два. Рассмотрим, во-первых, излучение плазмы на частотах, заметно превышающих ω_{pe} (излучение плазмы на частотах, близких к ω_{pe} , обязано переходному рассеянию на тепловых частицах). Так как неоднородности концентрации (в особенности те, которые создаются модуляционной неустойчивостью) движутся обычно с нерелятивистскими скоростями $\omega_0 \ll k_0 c$ и, кроме того, быстрые частицы тоже являются нерелятивистскими ($v_{Te} \ll v \ll c$), то закон сохранения энергии и импульса при рассеянии быстрых частиц на неоднородностях (6.76) дает

$$\omega \approx \pm k_0 v. \quad (6.104)$$

Максимальная излучаемая частота может быть оценена из соотношений

$$k_{0, \max} \sim \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}}, \frac{\omega_{pi}}{v_{Ti}}; \quad \omega_{\max} \sim k_{0, \max} v_{\max} \sim \omega_{pe} \frac{v_{\max}}{v_{Te}}. \quad (6.105)$$

Поскольку $v_{\max} \gg v_{Te}$ по условию (частицы надтепловые — быстрые), значение $\omega_{\max}$ действительно оказывается существенно превосходящим ω_{pe} .

Излучение плазмы при наличии в ней интенсивных ленгмюровских колебаний наблюдалось экспериментально (см. [140]) на высоких частотах вплоть до частот порядка $10\omega_{pe}$ и связывалось в [140] с возникновением в плазме сильных неоднородностей концентрации и быстрых частиц. Во-вторых, возникает эффект переходного рассеяния быстрых частиц на неоднородностях концентрации плазмы с излучением длинноволновой ленгмюровской волны (см. [141]). Этот процесс играет важную роль в судьбе конденсата, так как во взаимодействие вступают, как уже отмечалось, длинноволновые колебания конденсата. Для поглощения волн конденсата играет роль индуцированное рассеяние.

Вначале мы рассмотрим спонтанный процесс рассеяния. Мы должны использовать тот же закон сохранения при рассеянии (6.104), положив однако (поскольку рассеянной волной является ленгмюровская волна), $\omega \approx \omega_{pe}$. Как правило, размер неоднородностей $\sim 1/k_0$ — много больше дебаевского радиуса (только минимальный их размер может достигать величин порядка дебаевского радиуса, см. (6.105)), т. е. $k_0 v_{Te} \ll \omega_{pe}$. Из (6.104) тогда следует

$$v/v_{Te} > \omega_{pe}/k_0 v_{Te} \gg 1, \quad (6.106)$$

т. е. в рассеянии участвуют только быстрые надтепловые частицы. Далее, основным в данном случае будет переходное рассеяние на электронах. Причиной того, что переходное рассеяние на электронах доминирует над томсоновским рассеянием на электронах, а также больше рассеяния на ионах, является резонансный характер переходного рассеяния на электронах. Действительно, мощность переходного рассеяния (см. (6.13) и (6.19)) содержит фактор $\epsilon'(\omega(k) - \omega(k_0), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)$ в знаменателе, причем

$$\begin{aligned} \epsilon'(\omega(k) - \omega(k_0), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|) &\approx \epsilon'(\omega(k), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|) \approx \\ &\approx 1 - \omega_{pe}^2/(\omega(k))^2 - 3v_{Te}^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2/\omega_{pe}^2 \approx -3k_0^2 v_{Te}^2/\omega_{pe}^2. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Здесь учтено, что $k \ll k_0$, $\omega(k) \approx \omega_{pe}$, $k_0 v_{Te} \ll \omega_{pe}$.

Таким образом, в знаменателе сечения переходного рассеяния возникает малый множитель

$$|\epsilon'(\omega(k) - \omega(k_0), |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|)|^2 \approx 9k_0^4 v_{Te}^4/\omega_{pe}^4 \ll 1. \quad (6.108)$$

Мощность рассеяния (излучения длинноволновых ленгмюровских волн при рассеянии быстрых частиц на неоднородностях концентрации) найдется из (6.19a), (6.15a):

$$Q^{sc} = \int Q_k^{sc} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (6.109)$$

$$Q_k^{sc} = 2\pi^2 \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{k_0^2} \int \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2}{k^2 k_0^2} \left(\frac{\omega_{pe}^4}{9k_0^4 v_{Te}^4} \right) \frac{|\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2}{N_0^2} \delta(\omega(k_0) - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_e) d\mathbf{k}_0. \quad (6.110)$$

Рассмотрим теперь индуцированный процесс переходного рассеяния. Для изотропно распределенных быстрых электронов индуцированный процесс (коэффициент реабсорбции рассеиваемых ленгмюровских волн) легко выражается через Q_k^{sc} :

$$\gamma_k^{sc} = \int Q_k^{sc} \frac{\partial f_{pe}}{\partial \mathcal{E}_e} \frac{d\mathbf{p}_e}{(2\pi)^3}, \quad (6.111)$$

где

$$\int \frac{f_{pe} d\mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} = N_{f,e}, \quad (6.112)$$

причем $N_{f,e}$ — концентрация быстрых частиц. Для изотропно рас-

пределенных неоднородностей концентраций ($|\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2$ зависит лишь от $|\mathbf{k}_0|$) коэффициент реабсорбции (6.111) может быть выражен через декремент затухания Ландау коротковолновых ленгмюровских колебаний (с волновым числом k_0):

$$\gamma_{\mathbf{k}_0}^L = \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{4\pi k_0^2} \int \delta(\omega(k_0) - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_e) \frac{\partial f_{pe}}{\partial \mathcal{E}_e} d\mathbf{p}_e. \quad (6.113)$$

Имеем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{sc} = \frac{1}{27} \int \gamma_{\mathbf{k}_0}^L \frac{\omega_{pe}^4}{k_0^4 v_{Te}^4} \frac{|\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2}{N_0^2} d\mathbf{k}_0. \quad (6.114)$$

Результат (6.114) был получен в [141] *).

В силу условия $\omega_{pe} \ll k_0 v_{Te}$ поглощение длинноволновых ленгмюровских колебаний конденсата на быстрых частицах весьма эффективно и приводит к диссипации конденсата за сравнительно короткое время. Приведенный здесь вывод формулы (6.114) отличается от того, который дан в [141], и имеет то преимущество, что явно указывает на независимость эффекта от типа флуктуаций концентрации (в [141] рассматривались флуктуации концентрации, обусловленные ионно-звуковыми колебаниями). Кроме того, здесь явно видно, что эффект, рассмотренный в [141], есть не что иное, как переходное рассеяние быстрых частиц на неоднородностях плазмы и, следовательно, любые «изначальные» неоднородности, не связанные с модуляционной неустойчивостью, должны приводить к аналогичным эффектам диссипации конденсата. Оценки показывают, что даже относительно небольшой уровень флуктуаций концентрации $\langle (\delta N)^2 \rangle \sim N_0^2 m_e / m_i$ предотвращает образование конденсата. Мы остановились на этих вопросах, поскольку проблема конденсата является сейчас одним из центральных вопросов физики плазмы.

Приведенными примерами не исчерпываются различные приложения теории переходного рассеяния в плазме. Дело в том, что эффекты переходного рассеяния, не зависящие от массы частиц, могут оказаться очень существенными и в процессах диффузии ионов, взаимодействия многозарядных ионов и примесей с колебаниями плазмы и т. п. Укажем, что эффекты переходного рассеяния дрейфовых волн на примесях использовались в [142] для объяснения того, почему велик коэффициент диффузии примесей поперек магнитного поля, и для интерпретации наблюдавшегося в эксперименте эффекта самоочищения плазмы от примесей. В работе [143] эффекты переходного рассеяния использовались для построения модели преимущественного уско-
рения многозарядных ионов в хромосферных вспышках на Солн-

* В [141] приведен множитель 1/9 вместо множителя 1/27, фигурирующего в (6.114).

це. Физика, лежащая в основе механизма переходного рассеяния, позволяет не только наглядно интерпретировать результаты [142] и [143], но и выявить общность рассматриваемых процессов, что также заслуживает внимания.

§ 6.4. Переходное рассеяние ультрарелятивистских частиц в плазме

1. Переходное рассеяние на неоднородностях концентрации.

Переходное рассеяние ультрарелятивистских частиц в плазме представляет интерес и для лабораторной плазмы, и особенно для космической плазмы. В лабораторной плазме имеется возможность использования переходного излучения для анализа характера неоднородностей. Переходное рассеяние релятивистских ионов представляет интерес как возможный механизм излучения ядерной компоненты космических лучей, так как интенсивность излучения ионов ядерной компоненты в процессах переходного рассеяния, в отличие от других известных механизмов излучения (например, синхротронного), не зависит от массы частиц. Самым существенным отличием переходного рассеяния ультрарелятивистских частиц от переходного рассеяния нерелятивистских частиц является возможность существенного изменения частоты и, в частности, ее увеличения (см. гл. 4 и формулу (4.13)). Для плазменных ленгмюровских колебаний $\omega_0 \approx \omega_{pe}$ и, следовательно, для максимальной излучаемой частоты ω_{max} получаем

$$\omega_{max} \approx 2k_0 c (\mathcal{E}/Mc^2)^2; \quad \omega_{pe} \ll k_0 c, \quad (6.115)$$

$$\omega_{max} \approx 2\omega_{pe} (\mathcal{E}/Mc^2)^2; \quad \omega_{pe} \gg k_0 c. \quad (6.116)$$

Формула (6.115) пригодна и для любых других плазменных мод, фазовые скорости которых ω_0/k_0 много меньше скорости света. Это непосредственно видно из выражения (6.115), не содержащего частоты ω_0 . Максимальное значение k_0 для некоторых плазменных мод может быть достаточно большим. Так, для ионнозвуковых колебаний $k_{0, max} \sim \omega_{pi}/v_{Ti}$ и, следовательно, ω_{max} , соответствующее этому значению k_0 , будет иметь порядок $2\omega_{pe}(c/v_{Te})(\mathcal{E}/Mc^2)^2$. Это показывает, что низкочастотные плазменные моды могут давать излучения на частотах, в c/v_{Te} раз больших (6.116).

В случае высоких частот $\omega \gg \omega_{pe}$ нелинейная константа $\epsilon^{(1)}$ может быть найдена приближенно, если считать, что

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi N_0 e^2}{m_e \omega^2} - \frac{4\pi \Delta N e^2}{m_e \omega^2}; \quad (6.117)$$

$$\epsilon^{(0)} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad \omega_{pe}^2 = \frac{4\pi N_0 e^2}{m_e}, \quad \epsilon^{(1)} = - \frac{2\pi \Delta N_0 e^2}{m_e \omega^2},$$

$$\Delta N = 1/2 \Delta N_0 \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t - \varphi_0). \quad (6.118)$$

Для продольных плазменных мод ΔN связано с $\mathbf{E}$ так:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= -4\pi e \Delta N; \quad i k_0 E_{\omega_0, \mathbf{k}_0} = -4\pi e \Delta N_{\omega_0, \mathbf{k}_0}, \\ E_{\omega_0, \mathbf{k}_0} &= (\mathbf{k}_0/k_0) E_{\omega_0, \mathbf{k}_0}.\end{aligned}\quad (6.119)$$

Переходное рассеяние ленгмюровских волн в рамках приближения (6.118) подробно исследовано численно в [122] как для электронов, так и для ионов; при этом для электронов учитывалось также обычное томсоновское рассеяние, связанное с колебаниями электронов в поле $\mathbf{E}$ ленгмюровской волны*). Для электронов в работе [122] прослежен переход от нерелятивистских к ультрарелятивистским энергиям и показано постепенное уменьшение роли интерференции между томсоновским и переходным рассеянием с ростом энергии электронов. Для ультрарелятивистских электронов основным эффектом становится томсоновское рассеяние. Связано это с тем, что полная мощность томсоновского рассеяния растет с ростом энергии частиц как $(\mathcal{E}/m_e c^2)^2$, т. е. $Q_e^{\text{sc}} \sim Q_e^{\text{T}} (\mathcal{E}/m_e c^2)^2$, где Q_e^{T} — мощность томсоновского рассеяния нерелятивистских электронов (см. (6.93)). Что касается переходного рассеяния, то оно, как отмечалось выше, для $\mathcal{E} \gg M c^2$ не зависит от энергии частиц и имеет порядок Q_e^{T} . Последнее объясняется тем, что основной вклад дают минимальные частоты спектра переходного излучения, которые слабо зависят от $\mathcal{E}/M c^2$. Для ионов ситуация иная, поскольку переходное рассеяние имеет опять-таки порядок Q_e^{T} , а томсоновское $Q_i^{\text{T}} \sim Q_e^{\text{T}} (m_e/m_i)^2 (\mathcal{E}/m_i c^2)^2$ ($Z=1$). Из сравнения этих двух соотношений следует, что переходное рассеяние будет доминиро-

*) Обычно томсоновским рассеянием называют такое рассеяние, которое происходит без существенного изменения частоты. В тех случаях, когда существенна квантовая отдача при излучении, обычный (не переходный) процесс рассеяния называют комптоновским. Для покоящейся частицы только квантовая отдача при излучении приводит к изменению частоты при рассеянии. Однако для ультрарелятивистской частицы существенное изменение частоты при рассеянии происходит и в случае, когда квантовая отдача пренебрежимо мала (что видно хотя бы из выражения (6.116), справедливое как для переходного, так и для обычного рассеяния ленгмюровских волн в электромагнитные). В этом случае в системе отсчета, связанной с самой частицей, рассеяние происходит без изменения частоты. Мы будем поэтому процесс рассеяния, связанный с колебаниями частиц в поле волны, в условиях, когда квантовой отдачей можно пренебречь, называть томсоновским рассеянием, хотя при этом, естественно, в случае ультрарелятивистских частиц в лабораторной системе отсчета происходит существенное изменение частоты при рассеянии.

Рассеяние быстрых (ультрарелятивистских) частиц на сравнительно мягких фотонах или, что эквивалентно, рассеяние мягких фотонов на ультрарелятивистских частицах, часто называют также обратным комптоновским рассеянием. Критерий пренебрежения квантовой отдачей $\hbar \omega_{\max} \ll \mathcal{E}$ для (6.116) имеет вид

$$\mathcal{E}/M c^2 \ll M c^2 / (2 \hbar \omega_{\text{pe}}),$$

что не противоречит условию $\mathcal{E} \gg M c^2$, если $2 \hbar \omega_{\text{pe}} \ll M c^2$.

вать над томсоновским вплоть до энергий

$$\mathcal{E}/Mc^2 < m_1/m_e. \quad (6.120)$$

Численные расчеты зависимости мощности переходного рассеяния ионов на ленгмюровских волнах от кинетической энергии ионов приведены в [122].

В работе [126] были рассчитаны мощности излучения, связанного с переходным рассеянием релятивистских ионов, для большинства мод плазменной турбулентности (таблица приведена в [127], с. 418). Результаты [126], [127] можно получить, если учесть эффекты пространственной дисперсии, описываемые соотношением (6.19). Мы ограничимся здесь рассмотрением соотношения, справедливого для любых изменений плотности ΔN , для которых $\omega_0 \ll k_0 c$ в приближении $\omega \gg \omega_{pe}$, когда для $\epsilon^{(1)}$ можно использовать выражение (6.118).

Распределение ядер (ионов) космических лучей обычно аппроксимируется степенной функцией

$$f_{\mathcal{E}} \sim \mathcal{E}^{-\gamma}; \quad \int_{Mc^2}^{\infty} f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E} = N_{c.r.} \quad (6.121)$$

Поэтому интерес в первую очередь представляет мощность излучения единицы объема плазмы, проинтегрированная по распределению (6.121),

$$\overline{Q^r(\omega)} = \int Q^{sc}(\omega) f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E}. \quad (6.122)$$

В случае, когда флуктуации концентрации ΔN являются случайными (см. (4.128а), (4.133)), переходное рассеяние в условиях (6.117), (6.118) (ср. (4.76), (4.77)) описывается соотношением (4.134)

$$Q^{sc}(\omega) = \frac{q^2 \omega_{pe}^4}{8c^2 \omega^2} \int_{k_{0,min}}^{\infty} \left(\ln \frac{k_0}{k_{0,min}} - 1 + \frac{k_{0,min}}{k_0} \right) \frac{|\delta N|_{k_0}^2 dk_0}{k_0 N_0^2}, \quad (6.123)$$

где, согласно (4.134),

$$k_{0,min} = (\omega/2c) [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]. \quad (6.124)$$

Пусть в спектре флуктуаций плотности имеется выделенный размер d_* , которому соответствует $k_{0*} = 2\pi/d_*$. Минимальное значение (6.124) равно $\omega_{pe} Mc/\mathcal{E}$ и должно быть меньше k_{0*} . Рассмотрим случай $\mathcal{E} \gg Mc\omega_{pe}/k_{0*}$ и $\omega \gg \omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$; тогда в (6.124) можно пренебречь членом ω_{pe}^2/ω^2 в квадратных скобках (он описывает отличие показателя преломления электромагнитных волн от единицы) и

$$k_{0,min}(\omega) \approx (\omega/2c)(Mc^2/\mathcal{E})^2. \quad (6.125)$$

Критерий излучения $k_{0,min}(\omega) < k_{0*}$ будет иметь вид

$$\mathcal{E}/Mc^2 > \sqrt{\omega/2k_{0*}c} = \mathcal{E}_{min}/Mc^2. \quad (6.126)$$

Это означает, что в мощность излучения (6.122) будут вносить вклад только поны (ядра) космических лучей с энергией, большей $\mathcal{E}_{\min}$, и, следовательно,

$$\int_{\mathcal{E}_{\min}} f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E} \propto 1/\mathcal{E}_{\min}^{\gamma-1} \propto 1/\omega^{(\gamma-1)/2}. \quad (6.127)$$

Вследствие наличия дополнительного множителя $1/\omega^2$ в (6.123) спектр мощности излучения (6.122) будет таким [126]:

$$\overline{Q^r(\omega)} \propto 1/\omega^{(3+\gamma)/2}. \quad (6.128)$$

Конкретные формулы для коэффициента пропорциональности в (6.128) через $N_{c,r}$ и $\langle(\delta N)^2\rangle$ легко получаются из приводимых здесь формул (см. [126]). Стоит обратить внимание на то, что $\overline{Q^r(\omega)}$ довольно круто падает с частотой. Укручение спектра некоторых космических радиоисточников в области малых частот (больших длин волн) действительно наблюдается [144]. Вопрос о том, можно ли этот эффект связывать с переходным рассеянием ионов, обсуждается ниже (в гл. 7, § 8.1, п. 2).

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда спектр неоднородностей весьма широк, так что минимальное значение k_{0*} в этом спектре много меньше $\omega_{pe}Mc/\mathcal{E}$. Будем считать также, что, как это часто имеет место, спектр круто нарастает с падением k_0 , например, по степенному закону:

$$|\delta N|_{k_0}^2 \propto 1/k_0^{\nu}. \quad (6.129)$$

В этом случае согласно (6.123) $Q^{sc}(\omega) \propto \omega^{-2} (k_{0,\min}(\omega))^{-\nu}$ и при $\omega \ll \omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$, $k_{0,\min}(\omega) \approx \omega_{pe}^2/2c\omega$, $Q^{sc}(\omega) \propto \omega^{\nu-2}$, а при $\omega \gg \omega_{pe}\mathcal{E}/Mc^2$ имеем $k_{0,\min}(\omega) \propto \omega$, т. е. $Q^{sc}(\omega) \propto \omega^{-\nu-2}$. Для $\nu > (\gamma-1)/2$ основной вклад дают частицы с $\mathcal{E}/Mc^2 \sim \omega/\omega_{pe}$; число таких частиц $\int f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E} \propto \omega^{-\gamma+1}$ и, следовательно,

$$\overline{Q^r(\omega)} \propto 1/\omega^{\gamma-1-\nu}. \quad (6.130)$$

Эта формула также дает довольно крутые спектры:

$$\overline{Q^r(\omega)} \propto 1/\omega^{\mu}; \quad \mu < (\gamma-1)/2. \quad (6.131)$$

Коэффициент пропорциональности в формуле (6.130) легко находится из приведенных выше формул. Формулы (6.130), (6.131) пригодны при выполнении неравенств

$$\omega \ll \omega_{pe}^2/k_{0*}c \quad (6.132)$$

и

$$\mathcal{E}/Mc^2 \ll \omega_{pe}/k_{0*}c. \quad (6.133)$$

2. Переходное рассеяние ультрарелятивистских частиц на случайных магнитных неоднородностях. Рассмотрим процесс переходного рассеяния ультрарелятивистских частиц на статиче-

ских магнитных неоднородностях, когда рассеянной волной является электромагнитная волна высокой частоты [145]. Этот процесс представляет интерес как один из возможных механизмов излучения космических лучей (протонов и ядер). Для действия этого механизма не требуется изменения траекторий частиц (они могут двигаться прямолинейно) и, следовательно, излучать могут тяжелые ядра. Магнитные неоднородности действительно наблюдаются в космическом пространстве. Есть и регулярное магнитное поле. Здесь мы будем предполагать, что частица, «рассеивающая» магнитные неоднородности в высокочастотные электромагнитные волны, движется с постоянной скоростью. Практически при наличии регулярного магнитного поля частица движется по винтовой линии, но мы будем интересоваться мелкомасштабными магнитными неоднородностями, характерные размеры которых много меньше радиуса кривизны частицы в регулярном магнитном поле. При этих предположениях из закона сохранения энергии (или на классическом языке — из доплеровского условия) при рассеянии

$$\omega(k) - \mathbf{k}\mathbf{v} = -\mathbf{k}_0\mathbf{v} \quad (6.134)$$

получаем

$$\omega(k)_{\max} = 2k_0 c (\mathcal{E}/Mc^2)^2, \quad (6.135)$$

где $2\pi/k_0$ — размер магнитной неоднородности.

Используя полученный выше результат (6.75) для нелинейного тока плазмы и формулу (6.29) для вероятности переходного рассеяния, а также следующее конкретное выражение для входящей в (6.27) функции Грина (пренебрегая для высокочастотных электромагнитных волн пространственной дисперсией)

$$G_{ls}(\omega(k), \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = \frac{4\pi i \omega(k) [\delta_{ls} - (k_l - k_{0,l})(k_s - k_{0,s})/k^2]}{c^2 [(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 - k^2]}, \quad (6.136)$$

получаем искомую вероятность рассеяния на статических магнитных неоднородностях в форме

$$w_p^{sc}(\mathbf{k}) = \frac{q^2 \omega_{pe}^4 e^2 (2\pi)^3}{\pi \hbar m_e^2 c^6 (\omega(k))^2 \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon(\omega) \right]_{\omega=\omega(k)}} \int \frac{|H|_{\mathbf{k}_0}^2 d\mathbf{k}_0}{[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 - k^2]^2} \times \\ \times \left\{ v_*^2 \frac{|\mathbf{k}\mathbf{k}_0|^2}{k^2 k_0^2} + 2 \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_0)(\mathbf{k}_0\mathbf{v}_*)(\mathbf{k}\mathbf{v}_*)}{k^2 k_0^2} \right\} \delta(\omega(k) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{v}), \quad (6.137)$$

где

$$\mathbf{v}_* = \mathbf{v} - \omega(k)(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)/k^2, \quad (6.138)$$

а $|H|_{\mathbf{k}_0}^2$ определяется соотношениями (6.23), (6.30). Из (6.137) получаем полную интенсивность переходного рассеяния в электромагнитные волны для случая изотропно распределенных

магнитных неоднородностей [145]:

$$Q^{sc} = \int \hbar \omega(k) w_p^{sc}(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{e^2 q^2 \omega_{pe}^4}{4m_e^2 c^4} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^4} \int_{k_0}^\infty \Phi(\xi) \frac{|H|_{k_0}^2 dk_0}{k_0}, \quad (6.139)$$

где

$$|H|_{k_0}^2 = 8\pi k_0^2 |H|_{k_0}^2; \quad (6.140)$$

причем среднее значение квадрата флуктуационного магнитного поля (поля магнитных неоднородностей) определяется в данном случае из соотношения

$$\langle (\delta H)^2 \rangle = 2 \int |H|_{k_0}^2 d\mathbf{k}_0 = \int_0^\infty |H|_{k_0}^2 dk_0. \quad (6.141)$$

Величина ξ в (6.139) равна

$$\xi = \frac{\omega}{2k_0 c} \left[\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] \equiv \frac{k_{0,\min}}{k_0} < 1 \quad (6.142)$$

и, наконец,

$$\Phi(\xi) = \xi - \ln \xi - 1. \quad (6.143)$$

Рассмотрим случай, когда магнитные неоднородности и ультрарелятивистские частицы распределены по степенным законам, т. е.

$$|H|_{k_0}^2 = \begin{cases} \langle (\delta H)^2 \rangle (\nu - 1) (k_{0*}/k_0)^\nu / k_0, & k_0 > k_{0*}, \\ 0, & k_0 < k_{0*}; \end{cases} \quad (6.144)$$

$$f_{\mathcal{E}} = \begin{cases} N_{c.r} (Mc^2/\mathcal{E})^\gamma (\gamma - 1)/Mc^2, & \mathcal{E} > Mc^2, \\ 0, & \mathcal{E} < Mc^2. \end{cases} \quad (6.145)$$

Здесь мы нормировали распределения, считая, что спектр магнитных неоднородностей обрывается на $k_0 = k_{0*}$, а спектр частиц «обрывается» на $\mathcal{E} = Mc^2$. Вводим спектральную плотность мощности излучения отдельной частицы $Q^{sc}(\omega)$:

$$Q^{sc} = \int_0^\infty Q^{sc}(\omega) d\omega, \quad (6.146)$$

и величину $\overline{Q^r(\omega)}$ — спектральную мощность излучения единицы объема, проинтегрированную по распределению (6.141):

$$\overline{Q^r(\omega)} = \int_{Mc^2}^\infty Q^{sc}(\omega) f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E}; \quad (6.147a)$$

получаем

$$\begin{aligned} \overline{Q^r(\omega)} = \frac{q^2 \omega_{pe}}{8\pi c} N_{c.r} \frac{\langle (\delta H)^2 \rangle}{N_e m_e c^2} \frac{(\gamma - 1)(\nu - 1) \Gamma(\gamma/2) \Gamma((2\nu - \gamma)/2)}{\nu^2 (\nu + 1) \Gamma(\nu)} \times \\ \times \left(\frac{2k_{0*} c}{\omega_{pe}} \right)^{\nu-1} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^{\gamma+3-\nu}. \end{aligned} \quad (6.147b)$$

Из этой формулы следует, что спектр излучения оказывается довольно круто падающим с частотой (так, для $\gamma = 2,7$ и $\nu = 1,7$ $Q^r \propto \omega^{-4}$). Величина $k_{0*} = 2\pi/L_0$ может быть выражена через L_0 — основной масштаб магнитных неоднородностей. С увеличением L_0 интенсивность излучения падает, как это видно из (6.147б). Если речь идет о магнитных неоднородностях, возбуждаемых из-за пересоединения магнитных силовых линий, то обычно $k_{j*}c/\omega_{pe} \sim 1$. То же порядковое соотношение имеет место при возбуждении магнитных неоднородностей интенсивным электромагнитным излучением, причем при этом $\nu \gg 1$. В этих условиях спектры излучения могут не столь сильно падать с ростом частоты.

3. Неустойчивость ультрарелятивистских пучков (относительно возбуждения высокочастотных электромагнитных волн) при их прохождении через плазму с магнитными неоднородностями. Индуцированное переходное рассеяние релятивистских частиц на магнитных неоднородностях может привести либо к затуханию электромагнитных волн, либо к их раскачке (неустойчивости). Для изотропно распределенных частиц возникает затухание. Для индуцированного эффекта рассеяния существенным является не значение вероятности, усредненной по углам испускаемых квантов (как это было в случае расчета $Q^{sc}(\omega)$), а лишь вероятность рассеяния в направлении усиливаемых (или поглощаемых) волн. Для волн, распространяющихся строго вдоль скорости ультрарелятивистской частицы, получаем из (6.137)

$$w_p^{sc}(\mathbf{k}) = \frac{q^2 \omega_{pe}^4 e^2 \pi^2}{\hbar m_e^2 (\omega(k))^7} \int |H|_{k_0}^2 (\xi^2 + 6 - \xi^{-2}) \delta(\omega(k) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}) d\mathbf{k}_0. \quad (6.148a)$$

Здесь использовано приближенное выражение для $\mathbf{v}_*$:

$$\mathbf{v}_* \approx \frac{\mathbf{k}_0 c^2}{\omega} - \frac{\mathbf{v}}{2} \left[\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] = \frac{k_0 c^2}{\omega} \left(\frac{\mathbf{k}_0}{k_0} - \xi \frac{\mathbf{v}}{c} \right). \quad (6.148б)$$

Вероятностью (6.148a) можно пользоваться для подсчета инкремента неустойчивости (или декремента затухания), если скорости всех частиц имеют одно и то же направление, т. е. имеется одномерный (без углового разброса) пучок частиц. При этом вероятность (6.148a) определяет только значение $\gamma_{\mathbf{k}}$ для электромагнитных волн, распространяющихся по пучку частиц. В случае изотропно распределенных магнитных неоднородностей мы получаем в этом случае $\gamma_{\mathbf{k}} < 0$, т. е. затухание волн. Действительно, для случая изотропных магнитных неоднородностей в соотношении (6.148a) входит интеграл по всем значениям k_0 от $k_{0, \min} = k_0 \xi$ ($\xi \leq 1$). Величину $\gamma_{\mathbf{k}}$ для одномерного пучка ультра-

релятивистских частиц запишем в виде ($\mathcal{E} \approx \text{ср}v/v$)

$$\gamma_k = \int_{Mc^2}^{\infty} w_p^{\text{sc}}(k) \hbar \omega(k) \frac{\partial f_{\mathcal{E}}}{\partial \mathcal{E}} d\mathcal{E}; \quad (6.149)$$

причем

$$N_b = \int_{Mc^2}^{\infty} f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E}, \quad (6.150)$$

где N_b — концентрация частиц пучка.

Подставив (6.148а) в (6.149) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{q^2 \omega_{\text{pe}}^4 e^2 \pi^2}{4m_e^2 (\omega(k))^5 c^2} \int_{Mc^2}^{\infty} \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \frac{f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\xi_{k_0}}^{\infty} (\xi^2 + 6 + \xi^{-2}) \frac{|H|_{k_0}^2 dk_0}{k_0^2} = \\ &= - \frac{q^2 \omega_{\text{pe}}^4 e^2 \pi^2}{4m_e^2 (\omega(k))^5 c^2} \int_{Mc^2}^{\infty} \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \left\{ \frac{8 |H|_{k_{0,\min}}^2}{k_{0,\min}} + 2 \int_{\xi_{k_0}}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi} - \xi \right) \frac{|H|_{k_0}^2 dk_0}{k_0^2 \xi^2} \right\} \frac{f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E}}{\mathcal{E}}, \end{aligned} \quad (6.151)$$

т. е. $\gamma_k < 0$.

В случае, когда магнитные неоднородности направлены вдоль скорости частиц пучка, вероятность рассеяния не содержит интеграла по k_0 ($\xi = 1$):

$$w_p^{\text{sc}}(k) = \frac{8q^2 e^2 \omega_{\text{pe}}^4 \pi^2}{\hbar m_e^2 (\omega(k))^7 c} \left[\frac{|H|_{k_{0,z}}^2}{k_{0,z}} \right]_{k_{0,z}=k_{0,\min}}. \quad (6.152)$$

Получаем

$$\gamma_k = \frac{8q^2 e^2 \omega_{\text{pe}}^4 \pi^2}{m_e^2 (\omega(k))^5 c^2} \int_{Mc^2}^{\infty} \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial k_{0,z}} \frac{|H|_{k_{0,z}}^2}{k_{0,z}} \right]_{k_{0,z}=k_{0,\min}} \frac{f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E}}{\mathcal{E}}. \quad (6.153)$$

Неустойчивость возникает в том случае, когда $\frac{\partial}{\partial k_{0,z}} |H|_{k_{0,z}}^2 \frac{1}{k_{0,z}}$ является положительной величиной для тех значений $k_{0,z}$, которые соответствуют рассматриваемому резонансу переходного рассеяния, т. е. для $k_{0,z} = \frac{\omega}{2c} \left[\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \right]$. Для спектра магнитных неоднородностей (6.144) имеет место затухание (т. е. $\gamma_k < 0$).

4. Томсоновское рассеяние на магнитных неоднородностях.

Если размер магнитных неоднородностей велик по сравнению с размером области формирования излучения частицы:

$$l_0 = \frac{2\pi}{k_{0*}} \gg \frac{c}{\omega_{\text{H}}} \frac{Mc^2}{\mathcal{E}} = \frac{Mc^2}{|e|H}; \quad H = \sqrt{\langle (\delta H)^2 \rangle}, \quad (6.154)$$

то для $\mathcal{E} \gg Mc^2$ имеет место синхротронное излучение частицы в случайном магнитном поле (см. [1], гл. 5).

Если же выполняется обратное неравенство

$$L_0 = \frac{2\pi}{k_{0*}} \ll \frac{c}{\omega_H} \frac{Mc^2}{\mathcal{E}}; \quad H = \sqrt{\langle (\delta H)^2 \rangle}, \quad (6.155)$$

то, проходя через каждую магнитную неоднородность, частица слабо отклоняется от траектории своего первоначального движения и излучение частиц на таких магнитных неоднородностях соответствует обычному томсоновскому рассеянию. Оно должно, вообще говоря, учитываться вместе с переходным рассеянием. Результаты предыдущего раздела справедливы только для тяжелых частиц, когда можно пренебречь излучением, связанным с возмущением траекторий частиц при их прохождении через магнитные неоднородности. Условия (6.155) и (6.154) содержат некое характерное k_{0*} спектра магнитных неоднородностей (см. (6.144)).

Стоит отметить, что условие (6.154) будет нарушаться с уменьшением L_0 (ростом k_{0*}) и падением напряженности магнитного поля. При выполнении условия (6.155) излучение по ряду параметров отличается от синхротронного излучения. Мы здесь рассмотрим излучение частиц при выполнении условия (6.155), пренебрегая переходным рассеянием (это, как оказывается, при больших энергиях оправдано для легких частиц, например, электронов). На мощности томсоновского рассеяния ультрарелятивистских частиц на магнитных неоднородностях может существенно сказываться эффект плотности (о роли эффекта плотности для синхротронного излучения см. [108—110] и [1], гл. 6). Эффект плотности в данном случае малосуществен при больших энергиях частиц, а именно при выполнении неравенства

$$\mathcal{E}/Mc^2 \gg \omega_{pe}/k_{0*}c. \quad (6.156)$$

Действительно, в этом случае излучаемая при рассеянии частота удовлетворяет соотношению

$$\omega \sim 2k_{0*}c \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 \gg \omega_{pe} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}, \quad (6.157)$$

т. е. в ξ можно пренебречь членом ω_{pe}^2/ω^2 по сравнению с членом $(Mc^2/\mathcal{E})^2$.

Спектр излучения, усредненный по степенному распределению частиц (6.121), такой же, как и для синхротронного излучения:

$$\overline{Q^r(\omega)} = \int_{Mc^2}^{\infty} Q^{sc}(\omega) f_{\mathcal{E}} d\mathcal{E} \propto \frac{1}{\omega^{(\gamma-1)/2}}. \quad (6.158)$$

Однако коэффициент пропорциональности, естественно, отличен от того, который имеет место для синхротронного излучения. Для

распределения магнитных неоднородностей (6.144) получаем [146]

$$\overline{Q^r(\omega)} = \frac{q^4 \langle (\delta H)^2 \rangle N_{c.r}}{3M^2 k_{0*} c^4} (\gamma - 1)(\nu - 1) \left(\frac{2k_{0*} c}{\omega} \right)^{(\gamma-1)/2} \times \\ \times \left[\frac{1}{\nu(\gamma-1)} + \frac{3(\nu+1)}{(\gamma+3)(\nu+2)^2} - \frac{4}{(\gamma+5)(\nu+3)} - \frac{6}{(\gamma+3)^2(\nu+2)} \right]. \quad (6.159)$$

При выполнении неравенства, обратного (6.156), эффект плотности сказывается существенно на спектре, причем [146]

$$\overline{Q^r(\omega)} \propto \frac{1}{\omega^{\nu-\nu-1}}. \quad (6.160)$$

Коэффициент пропорциональности может быть найден из соотношения

$$\overline{Q^r(\omega)} = \frac{q^4 \langle (\delta H)^2 \rangle N_{c.r}}{M^2 c^4 k_{0*}} \left(\frac{2k_{0*} c}{\omega} \right)^\nu \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^{\nu-2\nu-1} (\gamma - 1)(\nu - 1) \times \\ \times \frac{\Gamma((2\nu - \gamma + 1)/2) \Gamma((\gamma + 1)/2)}{\Gamma(\nu + 1)} \int_0^1 \Phi(\xi) \xi^\nu d\xi. \quad (6.161)$$

5. Процессы переходного рассеяния высших порядков. Остановимся теперь на вопросе о переходном рассеянии, обусловленном нелинейностями высших порядков, например, кубическими нелинейностями (переходное рассеяние, обсуждавшееся выше, связано с квадратичными нелинейностями)*). Может показаться, что этот вопрос является несколько искусственным, так как переходное рассеяние может реализоваться уже с помощью квадратичных нелинейностей. Однако существует класс сред, в которых квадратичные нелинейности либо малы, либо строго равны нулю. К числу последних нужно отнести, например, электронно-позитронную плазму. Действительно, квадратичный по полю нелинейный ток, естественно, является кубическим по заряду и в случае электронно-позитронной плазмы вклады электронов и позитронов в этот ток взаимно компенсируются (если электроны и позитроны имеют одинаковые распределения и плотности). Другим примером «среды», в которой квадратичные нелинейности отсутствуют, является вакуум (см. гл. 7). Переходное рассеяние описывается для кубических нелинейностей током

$$\delta j_{i,\omega,k}^{nl} = \int \Sigma_{ijls}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0; \omega'_0 \mathbf{k}'_0) E_{l,\omega_0,\mathbf{k}_0} E_{s,\omega'_0,\mathbf{k}'_0} \times \\ \times E_{j,\omega-\omega_0-\omega'_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0-\mathbf{k}'_0} d\omega_0 d\omega'_0 d\mathbf{k}_0 d\mathbf{k}'_0. \quad (6.162)$$

*) Говоря о квадратичных и кубических нелинейностях, мы имеем в виду разложение тока или поляризации среды по напряженностям полей; в лагранжиане это соответствует членам третьей и четвертой степени по напряженностям полей.

Физически это соответствует, например, случаю, когда две волны поляризации падают на заряд и превращаются в электромагнитную волну (рис. 21).

В плазме напряженность поля волн поляризации может быть выражена в первом приближении через изменение плотности δN , т. е. (6.162) можно записать в виде

$$\frac{4\pi i \omega}{c^2} \delta j_{i,\omega,\mathbf{k}}^{nl} = \frac{\omega^2}{c^2} \int \varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0; \omega'_0, \mathbf{k}'_0) \delta N_{\omega_0, \mathbf{k}_0} \delta N_{\omega'_0, \mathbf{k}'_0} \times \\ \times E_{j, \omega - \omega_0 - \omega'_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'_0} d\omega_0 d\omega'_0 d\mathbf{k}_0 d\mathbf{k}'_0 / N_0^2, \quad (6.163)$$

что, по сути дела, является определением $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ (нетрудно при этом, зная линейную связь поля и δN , связать $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ с компонентами



Рис. 21. Графическое изображение переходного рассеяния двух волн поляризации с превращением в электромагнитную волну.

Σ_{ijls}). Полученный ток сходен с тем, который фигурировал выше (см. (4.56)) в общей теории переходного рассеяния, причем роль $\varepsilon^{(1)}$ в (4.56) играет теперь $\varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0; \omega'_0, \mathbf{k}'_0) \delta N_{\omega_0, \mathbf{k}_0} \delta N_{\omega'_0, \mathbf{k}'_0} / N_0^2$, а вместо $E_{j, \omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0}$ входит $E_{j, \omega - \omega_0 - \omega'_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'_0}$. Дальнейшие

расчеты мало чем отличаются от тех, которые были проведены в § 4.3. Поэтому мы здесь приведем только результат для мощности переходного рассеяния ультрарелятивистской частицы в электронно-позитронной плазме со случайными статическими неоднородностями плотности (ср. с формулой (4.132)):

$$Q^{sc} = \frac{q^2 \omega_{pe}^4}{4c} \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2 [(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]^2} \times \\ \times \int \frac{|\delta N|_{\mathbf{k}_0}^2}{N_0^2} \frac{|N|_{\mathbf{k}'_0}^2}{N_0^2} \delta \left(\frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \theta^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] - (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}'_0) \mathbf{v} \right) d\mathbf{k}_0 d\mathbf{k}'_0. \quad (6.164)$$

По порядку величины полная мощность излучения из-за рассеяния равна

$$Q^{sc} \sim \frac{q^2 \omega_{pe}^2}{c} \left(\frac{\langle (\delta N)^2 \rangle}{N_0^2} \right)^2 \quad (6.165)$$

и лишь в $(\delta N^2/N_0^2)^2$ раз меньше характерной мощности излучения В.—Ч. *), что при не очень малом отношении $\delta N^2/N_0^2$ может составить заметную величину. Тяжелые ионы, например, проходя через околонульсарную электронно-позитронную плазму, будут давать заметное излучение. Так, при $\mathcal{E}/Mc^2 \sim 10^2$ и $N_0 \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$ их излучение попадает в оптический диапазон и соответствует, например, наблюдаемой мощности оптического излучения пульсара в Крабовидной туманности при плотности ионов $N_1 \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Этот пример приведен лишь в целях иллюстрации и мы здесь не хотели бы обсуждать довольно сложные проблемы построения реалистической модели излучения пульсаров.

§ 6.5. Переходное тормозное излучение в плазме

1. Переходное тормозное излучение ультрарелятивистских частиц. Переходное тормозное излучение ультрарелятивистских частиц на покоящемся заряде рассматривалось в гл. 5. При этом было использовано выражение (5.74) для нелинейного отклика. Эти результаты могут быть также использованы в случае плазмы, если сделать некоторые уточнения при помощи полученного выше конкретного выражения для нелинейного отклика в плазме (6.47). Уточнение состоит в том, что в (6.47) входит только электронная часть продольной диэлектрической проницаемости, т. е. в числитель (5.75) входит

$$\epsilon^{(e)}(0, k_0) - 1 = \omega_{pe}^2/k_0^2 v_{Te}^2, \quad (6.166)$$

тогда как в знаменатель (5.75) входит полная продольная статическая проницаемость

$$\epsilon^l(0, k_0) = \epsilon^{(e)}(0, k_0) + \epsilon^{(i)}(0, k_0) - 1 \approx \approx \omega_{pe}^2/k_0^2 v_{Te}^2 + \omega_{pi}^2/k_0^2 v_{Ti}^2 \quad (6.167)$$

(единицей в сравнении с $\omega_{pe}^2/k_0^2 v_{Te}^2$ пренебрегаем). Если плазма состоит из ионов, заряд которых равен Ze , то $ZN_1 = N_e$ и, следовательно, при $T_e = T_i$

$$\epsilon^l(0, k_0) \approx (1 + Z) \epsilon^{(e)}(0, k_0). \quad (6.168)$$

*) Излучение В.—Ч. для заряженных частиц в данном случае отсутствует, поскольку условие излучения В.—Ч. для электромагнитных волн в плазме выполнено быть не может (фазовая скорость электромагнитных волн больше скорости света в вакууме). Проводя тем не менее сравнение с излучением В.—Ч., мы имеем в виду то, что если бы условие излучения В.—Ч. выполнялось, как это могло иметь место для заряженного «зайчика» с зарядом q (см. [1], гл. 9), то

$$Q_{V-Ch} \sim \frac{q^2}{c} \int \omega d\omega \sim \frac{q^2}{c} \omega_*^2,$$

где ω_* — характерная частота. В обычных конденсированных средах ω_* порядка оптических частот, которые в свою очередь порядка ω_{pe} .

Таким образом, в формулы переходного тормозного излучения (а также в соответствующие критерии их применимости типа (5.92), (5.89)) войдут дополнительные множители $(1+Z)$ (или $\sqrt{1+Z}$)..

2. Переходное тормозное излучение надтепловых нерелятивистских частиц. Закон сохранения энергии и импульса для тормозного излучения

$$\omega(k) = k_0 v_\beta + (k - k_0) v_\alpha \quad (6.169)$$

относительно легко выполняется для быстрых (надтепловых) частиц (v_α и v_β — скорости двух сталкивающихся частиц α и β). Как уже отмечалось выше, при любом достаточно мощном вводе энергии в плазму в ней появляются неравновесные надтепловые электроны и ионы. Анализ переходного и обычного тормозного излучения надтепловых частиц в плазме был проведен в [147]; причем оказалось, что переходное тормозное излучение продольных ленгмюровских волн (а при определенных условиях и поперечных электромагнитных волн) доминирует над обычным тормозным излучением. Обычное тормозное излучение электромагнитных волн электронами при выполнении неравенства

$$(\omega - \omega_{pe})/\omega_{pe} \ll 1 \quad (6.170)$$

описывается формулой [147], следующей из (5.19):

$$Q^{or.b}(\omega) = \frac{16q_\alpha^4 q_\beta^2 N_\beta}{3M_\alpha^2 c^3 v_\alpha} \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \left[\ln(\kappa_{max} d) - \frac{1}{2} \right]. \quad (6.171)$$

Этот результат не учитывает эффекта плотности, который для нерелятивистских частиц оказывается малосущественным. Входящий в выражение (6.171) множитель $\sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}$ приводит к тому, что $Q^{or.b}(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \omega_{pe}$, что естественно, так как электромагнитные волны при $\omega < \omega_{pe}$ распространяться (а следовательно, и излучаться) в плазме не могут.

Переходное тормозное излучение легче всего вычислить при выполнении условия

$$(\omega - \omega_{pe})/\omega_{pe} \ll v_{Te}^2/v_\alpha^2. \quad (6.172)$$

Тогда из (5.48), (5.49), (5.45) получаем*)

$$Q^{tr.b}(\omega) = \frac{2q_\beta^2 q_\alpha^2 e^2 N_\beta}{m_e^2 c^3 v_\alpha} \left(\frac{v_\alpha}{v_{Te}} \right)^4 \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}}{\omega}. \quad (6.173)$$

В силу $v_\alpha \gg v_{Te}$ из сравнения (6.171) с (6.173) мы видим, что переходное тормозное излучение является доминирующим эффектом. Этот эффект доминирования переходного тормозного излу-

*) Возникновение большого множителя $(v_\alpha/v_{Te})^4$ обязано эффекту резонансности процесса — тому же, который привел к увеличению сечения переходного рассеяния (см. (6.107), (6.110)).

чения обязан тому, что из-за резонанса вблизи плазменной частоты величина заряда динамической поляризации, окружающей рассеивающий заряд, может существенно превзойти величину рассеивающего заряда. Переходное тормозное излучение надтепловых частиц существенно и при $\omega \gg \omega_{pe}$. Обычное тормозное излучение становится доминирующим (см. [147]) только при $\omega \gg \omega_{pe} v_a / v_{Te}$.

3. Переходное тормозное излучение продольных ленгмюровских волн. Рассмотрим процесс переходного тормозного излучения ленгмюровской волны электроном ($q_a = -e$) на покоящемся ионе $v_p = 0$, $q_p = Ze$. Величина $S(\omega(k), \mathbf{k}; 0, \mathbf{k}_0)$, определяющая вероятность этого процесса (6.22), легко найдется из (6.41). Имеем

$$S(\omega(k), \mathbf{k}; 0, \mathbf{k}_0) \approx - \frac{ek_0 \mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)}{8\pi m_e \omega(k) k |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|} (\varepsilon^{l(e)}(0, k_0) - 1),$$

$$Q^{\text{tr.b}} = \int \hbar \omega(k) w_{p_a, 0}^{\text{tr.b}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^6} N_i =$$

$$= \frac{Z^2 e^6}{\pi^2 m_e^2 \omega_{pe}^2} \int \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_0)^2}{k^2 k_0^4} \frac{|\varepsilon^{l(e)}(0, k_0) - 1|^2 N_i}{|\varepsilon^l(0, k_0)|^2 |\varepsilon^l(\omega(k), k_0)|^2} \delta(\omega(k) + \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_e) d\mathbf{k} d\mathbf{k}_0;$$

$$k \ll k_0, \quad \omega(k) \approx \omega_{pe}. \quad (6.174a)$$

При использовании (6.174a) надо иметь в виду, что ленгмюровские волны сильно затухают при $k \sim \omega_{pe}/v_{Te}$ и поэтому интегрирование в (6.174a) должно быть распространено только на область $k \ll \omega_{pe}/v_{Te}$. Что касается передаваемого импульса k_0 , то в (6.174a) существенны его значения как при $k_0 < \omega_{pe}/v_{Te}$, так и при $k_0 > \omega_{pe}/v_{Te}$. Для тепловых электронов $k_0 = \sqrt{\kappa^2 + \omega_{pe}^2/v_{Te}^2} \gtrsim \omega_{pe}/v_{Te}$ (здесь κ — значение k_0 , перпендикулярное $\mathbf{v}_e$, значение же $-\mathbf{k}_0$, параллельное $\mathbf{v}_e$, в силу δ -функции равно $\omega(k)/v_e \sim \omega_{pe}/v_{Te}$) и, следовательно, $\varepsilon^l(\omega(k), k_0) \sim 1$. Это позволяет получить следующую оценку полной мощности переходного тормозного излучения ленгмюровских продольных волн:

$$Q^{\text{tr.b}} = \int_0^\infty Q_k^{\text{tr.b}} dk, \quad Q_k^{\text{tr.b}} \sim \frac{Z^2 e^6 k^2 N_i}{\omega_{pe}^2 m_e^2 v_{Te}}, \quad (6.174b)$$

$$k_{\text{max}} \sim \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}}, \quad Q^{\text{tr.b}} \sim \frac{Z^2 e^6 \omega_{pe} N_i}{m_e^2 v_{Te}^4 (1 + T_e Z/T_i)^2}.$$

Для излучения надтепловых частиц ($v_e \gg v_{Te}$) величина $k_0 = \sqrt{\kappa^2 + \omega_{pe}^2/v_e^2}$ уже может быть много меньше ω_{pe}/v_{Te} и возникает резонансное увеличение мощности переходного тормозно-

го излучения, так как $\varepsilon^l(\omega(k), k_0) \approx 1 - \omega_{pe}^2/(\omega(k))^2 - 3k_0^2 v_{Te}^2/\omega_{pe}^2 \approx -3k_0^2 v_{Te}^2/\omega_{pe}^2$ ($k \ll k_0 \sim \omega_{pe}/v_e$). Получаем

$$Q^{tr.b} = \int_0^\infty Q_k^{tr.b} dk,$$

$$Q_k^{tr.b} = \frac{2Z^2 e^6 k^2 v_e^4 N_i}{27 m_e^2 v_{Te}^4 \omega_{pe}^2 v_e (1 + T_e Z/T_i)^2}. \quad (6.174b)$$

Величина $Q_k^{tr.b}$ в $(v_e/v_{Te})^4$ раз больше, чем соответствующая величина $Q_k^{tr.b}$ для тепловых частиц. Однако, в силу того, что (6.174b) справедлива только при $k \ll \omega_{pe}/v_e$, полная мощность переходного тормозного излучения вновь будет оцениваться формулой (6.174б). Наконец, переходное тормозное излучение ленгмюровских волн можно сравнить с обычным тормозным излучением ленгмюровских волн. Из (4.176), (5.51) получаем для обычного тормозного излучения электронов на покоящихся ионах ($v_e \ll c$, $\omega(k) \gg kv_e$)

$$\frac{k m_e}{k} \approx \frac{e^2 i k k_0}{k k_0 m_e \omega(k) (2\pi)^3}, \quad Q^{or.b} = \int_0^\infty Q_k^{or.b} dk,$$

$$Q_k^{or.b} = \frac{8Z^2 e^6 k^2}{3 m_e^2 v_e \omega_{pe}^2} \left(\ln \frac{\kappa_{\max} \sqrt{v_e^2 + v_{Te}^2}}{\omega_{pe}} - \frac{v_e^2 + v_{Te}^2}{2v_e^2} \right). \quad (6.174г)$$

Для тепловых частиц переходное тормозное излучение и обычное тормозное излучение имеют одинаковый порядок величины (и поэтому, строго говоря, нужно учитывать интерференционный член, которым мы здесь пренебрегали). Поскольку (6.174г) содержит большой логарифм, то учет переходного тормозного излучения для тепловых частиц дает лишь небольшую поправку (изменяет коэффициент порядка единицы в подлогарифмическом выражении (6.174г)). Естественно, в индуцированное тормозное излучение на тепловых частицах, т. е., как часто говорят, в поглощение из-за эффекта обратного тормозного излучения, вносит вклад и переходное тормозное излучение. Оно фактически неявным образом учитывается в обычных расчетах поглощения плазменных волн из-за столкновений (см. [67, 68]), если, конечно, корректно учитываются коэффициенты порядка единицы в подлогарифмических выражениях. Однако самым существенным, как нам кажется, является то обстоятельство, что переходное тормозное излучение является доминирующим для излучения достаточно длинных плазменных ленгмюровских волн на быстрых (надтепловых) частицах, которые, как отмечалось, часто присутствуют во многих современных плазменных экспериментах.

4. Обычное тормозное излучение в плазме в сильных магнитных полях. Сильное магнитное поле в плазме меняет как переходное тормозное излучение частиц, так и обычное тормозное излучение. Мы будем интересоваться излучением частот, удовлетворяющих неравенству ($\mathcal{E}_\alpha$ — энергия частиц α)

$$\omega \ll eH_0 c / \mathcal{E}_\alpha = \omega_{H\alpha}. \quad (6.175)$$

В этом случае можно использовать нелинейные токи, полученные в п. 2 § 6.2, в предположении, что частицы движутся строго вдоль силовых линий (токи, связанные со смещением частиц поперек $\mathbf{H}_0$, по крайней мере, в $\omega/\omega_{H\alpha}$ раз меньше). При этом можно считать, что одномерно (вдоль $\mathbf{H}_0$) движутся не только тепловые частицы (определяющие значение компонент нелинейного тока S_{ijl}), но и сталкивающиеся частицы. Вообще говоря, в магнитных полях сталкивающиеся частицы до и после столкновения движутся по винтовым линиям. Однако роль вращения около силовой линии не велика. Она определяется малым параметром $k_\perp v_\alpha / \omega_{H\alpha} \sim (\omega/\omega_{H\alpha}) v_\alpha / c \ll 1$. Таким образом, сталкивающиеся частицы в первом приближении можно считать движущимися вдоль силовых линий магнитного поля (без вращения). Поля сталкивающихся частиц заставляют эти частицы двигаться по силовым линиям с ускорением и замедлением, однако при этом частицы «не сходят» с силовых линий. Ускорение и замедление частиц при их столкновении приводят к обычному тормозному излучению. Фактически важна здесь лишь компонента силы вдоль $\mathbf{H}_0$, действующая на сталкивающиеся частицы. Для ультрарелятивистских частиц при этом входит так называемая продольная масса $M(\mathcal{E}/Mc^2)^3$, а не поперечная масса $M(\mathcal{E}/Mc^2)$. Рассмотрим количественно эту модель обычного тормозного излучения (когда частицы ускоряются и замедляются, не сходя с исходной силовой линии магнитного поля).

Уравнение движения частицы в поле E_z (z — по $\mathbf{H}_0$) изменится следующим образом:

$$\frac{dv_\alpha(t)}{dt} = \frac{q_\alpha}{M_\alpha} \left(1 - \frac{v_\alpha^2(t)}{c^2} \right)^{3/2} \int E_{z, \omega_0, \mathbf{k}_0} \times \\ \times \exp[-i(\omega_0 t + k_{0z} z_\alpha(t))] d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (6.176)$$

Подставив в правую часть $z_\alpha(t) = v_\alpha t$, получаем ($v_\alpha(t) = v_\alpha + \delta v_\alpha(t)$)

$$\delta v_\alpha(t) = \frac{q_\alpha}{M_\alpha} \left(1 - \frac{v_\alpha^2(t)}{c^2} \right)^{3/2} \int \frac{E_{z, \omega_0, \mathbf{k}_0} \exp[-i(\omega_0 - k_{0z} v_\alpha) t]}{-i(\omega_0 - k_{0z} v_\alpha)} d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (6.177)$$

Отсюда ток, обязанный изменению скорости и смещению частицы

вдоль силовой линии, будет:

$$\delta f_{z,\omega,\mathbf{k}}^{\alpha} = \frac{q_{\alpha}}{(2\pi)^4} \int (\delta v_{\alpha}(t) - ik_z v_{\alpha} \delta z_{\alpha}(t)) \exp[i(\omega - k_z v_{\alpha})t] dt =$$

$$= \frac{q_{\alpha}^2 c^2 \omega}{\mathcal{E}_{\alpha} (2\pi)^3} \left(\frac{M_{\alpha} c^2}{\mathcal{E}_{\alpha}} \right)^2 \int \frac{E_{z,\omega_0,\mathbf{k}_0} \delta(\omega - \omega_0 - (k_z - k_{0,z}) v_{\alpha})}{-i(\omega_0 - k_{0,z} v_{\alpha})^2} d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (6.178)$$

Таким образом, из всех компонент введенного выше тензора Λ_{ij}^{α} (см. (4.175)) не равна нулю только компонента $\Lambda_{zz}^{\alpha} \equiv \Lambda^{\alpha}$:

$$\Lambda^{\alpha}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = \frac{q_{\alpha}^2 c^2 i \omega}{\mathcal{E}_{\alpha} (2\pi)^3} \left(\frac{M_{\alpha} c^2}{\mathcal{E}_{\alpha}} \right)^2 \frac{1}{(\omega - k_z v_{\alpha})^2}. \quad (6.179)$$

В силу того, что частицы среды могут двигаться только вдоль z , меняется и характер экранировки обычного рассеяния, так как в тензоре диэлектрической проницаемости ε_{ij} лишь компонента $\varepsilon_{zz} \equiv \varepsilon(\omega, k_z) \neq 1$:

$$\varepsilon(\omega, k_z) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{k_z^2} \int \frac{1}{\omega - k_z v_{\alpha}} \left(k_z \frac{\partial f_{p\alpha}}{\partial p_{\alpha}} \right) \frac{dp_{\alpha}}{2\pi}, \quad (6.180)$$

причем здесь

$$N_{\alpha} = \int f_{p\alpha} \frac{dp_{\alpha}}{2\pi}, \quad p_{\alpha} = p_{\alpha z}. \quad (6.181)$$

Тензор ε_{ij} имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon(\omega, k_z) \end{pmatrix}. \quad (6.182)$$

Функция Грина $G_{zz} \equiv G$ для такого тензора ε_{ij} равна

$$G(\omega, \mathbf{k}) = - \frac{4\pi i (c^2 k_z^2 - \omega^2)}{\omega [(c^2 k_z^2 - \omega^2) \varepsilon(\omega, k_z) + \kappa^2 c^2]}, \quad (6.183)$$

где $\kappa = \mathbf{k}_{\perp}$.

Матричный элемент обычного рассеяния M^{α} определяется следующим образом:

$$M^{\alpha_{\text{ог.б}}} = (2\pi)^3 q_{\beta} \Lambda^{\alpha}(\omega, \mathbf{k}; k_{0z} v_{\beta}, \mathbf{k}_0) G(k_{0z} v_{\beta}, \mathbf{k}_0) v_{\beta}. \quad (6.184)$$

Для тормозного излучения на покоящемся ионе ($v_{\beta} \rightarrow 0$) получаем

$$M^{\alpha_{\text{ог.б}}} =$$

$$= - \frac{4\pi q_{\beta} q_{\alpha}^2 c^2 \omega (M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^2}{\mathcal{E}_{\alpha} v_{\alpha} (\omega - k_z v_{\alpha}) [\kappa^2 + (\omega - k_z v_{\alpha})^2 (1/v_{\alpha}^2) \varepsilon(0, -(\omega - k_z v_{\alpha})/v_{\alpha})]}. \quad (6.185)$$

Существенное отличие этого матричного элемента от того, который возникает в отсутствие магнитного поля, в том, что иной

оказывается зависимость M^α от поперечного передаваемого импульса κ^2 . В отсутствие магнитного поля (см. (5.13)) $|M^\alpha|^2$ содержит не только $(\kappa^2 + \kappa_0^2)^2$ в знаменателе, но и первую степень κ^2 в числителе, тогда как (6.185) не содержит κ в числителе. Это является отражением того обстоятельства, что частицы смещаются только вдоль $\mathbf{H}$. Отсутствие κ в числителе (6.185) приводит к тому, что

$$\int_0^\infty |M^\alpha|^2 d\kappa^2 \quad (6.186)$$

сходится при больших κ^2 , мощность излучения не содержит $\ln(\kappa_{\max} d)$, сшивка с квантовым выражением не нужна и эффект является полностью классическим.

Другим отличием (6.185) от соответствующего выражения в отсутствие магнитного поля является то, что в (6.185) входит продольная масса (дополнительный множитель $(M_\alpha c^2/\mathcal{E})^2$). Мощность тормозного излучения будет определяться формулой

$$Q^{\text{or.b}} = \int \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha]^2}{k^2 v_\alpha^2} |M^{\text{or.b}}|^2 N_\beta \delta(\omega(\mathbf{k}) - k_z v_\alpha + k_{0,z} v_\alpha) \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}_0}{(2\pi)^4}. \quad (6.187)$$

При $\omega \gg \omega_{\text{pe}}$ имеем

$$Q^{\text{or.b}} = \int_0^\infty Q^{\text{or.b}}(\omega) d\omega, \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{k}\mathbf{H}_0}{kH_0},$$

$$Q^{\text{or.b}}(\omega) = \int_0^\pi \frac{q_\beta^2 q_\alpha^4 N_\beta c \omega^4 \sin^3 \theta}{\pi \mathcal{E}_\alpha^2 v_\alpha^3 (\omega - kv_\alpha \cos \theta)^2} \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^4 \times$$

$$\times \left[\frac{(\omega - kv_\alpha \cos \theta)^2}{v_\alpha^2} + \frac{1}{d^2} \right]^{-2} 2\pi d\theta, \quad (6.188)$$

где d — дебаевский радиус электронов $1/d^2 = \sum_\alpha \omega_{\text{pe}}^2 / v_{\text{T}\alpha}^2$.

Здесь следует отметить еще одну существенную особенность обычного тормозного излучения в области частот $\omega \ll \omega_{\text{H}\alpha}$, а именно, отсутствие эффекта плотности (подавления тормозного излучения при $\omega \ll \omega_{\text{pe}} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2$; естественно, при этом предполагается, что $\omega_{\text{pe}} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2 \ll \omega_{\text{H}\alpha}$). Отсутствие эффекта плотности в данном случае связано с тем, что электромагнитные волны в сильном магнитном поле имеют другую дисперсионную зависимость:

$$(\omega(\mathbf{k}))^2 = \omega_{\text{pe}}^2 \sin^2 \theta + k^2 c^2, \quad (6.189)$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$.

В отсутствие магнитного поля (паномним) мы имеем

$$(\omega(k))^2 = \omega_{\text{pe}}^2 + k^2 c^2. \quad (6.190)$$

Дисперсия (6.189) приводит для $\theta^2 \ll 1$ и $M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha \ll 1$ к тому, что

$$\frac{1}{\omega - kv_\alpha \cos \theta} \approx \frac{2}{\omega [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \theta^2 (1 + \omega_{pe}^2/\omega^2)]} \quad (6.191)$$

в отличие от

$$\frac{1}{\omega - kv_\alpha \cos \theta} \approx \frac{2}{\omega [(M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2 + \theta^2 + \omega_{pe}^2/\omega^2]} \quad (6.192)$$

в отсутствие магнитного поля. В выражении (6.191) членом с ω_{pe}^2/ω^2 можно всегда пренебречь, так как он имеет множитель θ^2 и, следовательно, является эффектом следующего порядка малости. Видоизменяется также экранировка (которая имеет место только вдоль z). Из (6.128) видно, что экранировкой можно пренебречь при выполнении неравенства

$$\omega - kv_\alpha \cos \theta \gg v_\alpha/d, \quad (6.193)$$

что при $M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha \ll 1$, $\theta^2 \ll 1$, $\theta \sim M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha$ означает

$$\omega \gg \omega_{scr} = \frac{c}{d} \left(\frac{\mathcal{E}_\alpha}{M_\alpha c^2} \right)^2, \quad (6.194)$$

где ω_{scr} — частота, при которой возникает экранирование. Если $d \approx v_{Te}/\omega_{pe}$, то условие (6.194) можно записать следующим образом:

$$\omega \gg \frac{c}{v_{Te}} \omega_{pe} \left(\frac{\mathcal{E}_\alpha}{M_\alpha c^2} \right)^2. \quad (6.195)$$

При выполнении (6.194), (6.195) спектральная плотность мощности излучения определится выражением

$$Q^{or.b}(\omega) = \frac{16q_\beta^2 q_\alpha^4}{\mathcal{E}_\alpha^2} N_\beta \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^4 \int_0^\infty \frac{\theta^2 d\theta^2}{[\theta^2 + (M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2]^4} = \frac{8q_\alpha^4 q_\beta^2 N_\beta}{3\mathcal{E}_\alpha^2}. \quad (6.196)$$

Сравнивая это выражение с (5.24а), мы видим, что в (6.196) отсутствует, вообще говоря, большой множитель $\ln \kappa_{\max} d$, имеется дополнительный, не зависящий от частоты, малый множитель $1/2 (M_\alpha c^2/\mathcal{E}_\alpha)^2$ и, наконец, отсутствует фактор, связанный с эффектом плотности.

При выполнении неравенства, обратного (6.194), в сильном магнитном поле возникает падение интенсивности (см. (6.188)), а именно, возникает дополнительный множитель $\propto (\omega/\omega_{scr})^2$. В отсутствие магнитного поля падение интенсивности (из-за эффекта плотности) возникало при значительно меньших частотах (порядка $\omega_{pe} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2$; отношение $\omega_{scr} M_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha \omega_{pe}$ порядка $(c/v_{Te}) \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2 \gg 1$). Такой эффект, хотя и сходен с эффектом плотности, но вызван иной причиной (экранировкой поля тяжелой частицы, а не отличием $\varepsilon(\omega)$ от единицы для излучаемых волн).

5. Переходное тормозное излучение в плазме и сильных магнитных полях. Подавление обычного тормозного излучения сильными магнитными полями в области низких частот ставит вопрос о роли переходного тормозного излучения в этой области частот. Матричный элемент переходного рассеяния вычисляется при помощи нелинейного тока, определяемого формулой (6.59), и функции Грина (6.183). Получаем в случае, когда частица β (нон) покоится (см. (5.48)):

$$M^{\alpha\beta} = - \frac{2q_{\alpha}q_{\beta}S(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}; 0, \mathbf{k}_0)}{\omega(\mathbf{k}) [k_{0,z}^2 \varepsilon(0, k_{0,z}) + \kappa^2]} \times \\ \times \frac{k_{0,z}v_{\alpha} [c^2(k_z - k_{0,z})^2 - (\omega(\mathbf{k}))^2]}{[c^2(k_z - k_{0,z})^2 - (\omega(\mathbf{k}))^2] \varepsilon(\omega(\mathbf{k}), k_z - k_{0,z}) + c^2(\kappa + \mathbf{k}_{\perp})^2} = \\ = - \frac{4\pi q_{\alpha}q_{\beta}e\omega_{\text{pe}}^2 v_{\alpha} [c^2(k_z - k_{0,z})^2 - (\omega(\mathbf{k}))^2]}{(\omega(\mathbf{k}))^2 m_e v_{\text{Te}}^2 [k_{0,z}^2 \varepsilon(0, k_{0,z}) + \kappa^2]} \times \\ \times \{ [c^2(k_z - k_{0,z})^2 - (\omega(\mathbf{k}))^2] \varepsilon(\omega(\mathbf{k}), k_z - k_{0,z}) + c^2(\kappa + \mathbf{k}_{\perp})^2 \}^{-1}. \quad (6.197)$$

Используя законы сохранения при тормозном излучении

$$k_z - k_{0,z} = \omega(\mathbf{k})/v_{\alpha}, \quad (6.198)$$

можно записать матричный элемент (6.197) в виде

$$M^{\alpha\beta} = - \frac{4\pi q_{\alpha}q_{\beta}e\omega_{\text{pe}}^2}{v_{\alpha} v_{\text{Te}}^2 m_e} \left(\frac{M_{\alpha} c^2}{\mathcal{E}_{\alpha}} \right)^2 \frac{1}{k_{0,z}^2 \varepsilon(0, k_{0,z}) + \kappa^2} \times \\ \times [(\omega(\mathbf{k})/v_{\alpha})^2 (M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^2 \varepsilon(\omega(\mathbf{k}), \omega(\mathbf{k})/v_{\alpha}) + (\mathbf{k}_{\perp} + \kappa)^2 c^2]^{-1}. \quad (6.199)$$

Рассмотрим вначале область высоких частот (6.195), когда мощность обычного тормозного излучения выходит на плато ($Q^{\text{tr. b}}(\omega) = \text{const}$, см. (6.196)). В случае нерелятивистской плазмы (нерелятивистских температур $T_{\alpha} \ll m_{\alpha} c^2$) и ультрарелятивистской частицы имеем $k v_{\text{Te}} / \omega(\mathbf{k}) \sim v_{\text{Te}} / c \ll 1$ и, следовательно, $\varepsilon(\omega(\mathbf{k}), \omega(\mathbf{k})/v_{\alpha}) \approx 1$. В этих условиях в последнем множителе знаменателя (6.199) можно пренебречь κ , так как в силу первого множителя $\kappa_{\text{max}} \sim (\omega(\mathbf{k})/c) (M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^2 \ll \omega(\mathbf{k}) M_{\alpha} c / \mathcal{E}_{\alpha}$. Отсюда

$$M^{\alpha\beta} \approx - \frac{4\pi q_{\alpha}q_{\beta}e\omega_{\text{pe}}^2 (M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^2}{m_e v_{\text{Te}}^2 (\omega(\mathbf{k}))^2 [(M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^2 + \theta^2]} \times \\ \times \frac{1}{[\kappa^2 + (\omega(\mathbf{k}))^2 [(M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^2 + \theta^2] / 4c^2]}. \quad (6.200)$$

Мощность переходного тормозного излучения определится формулой (ср. (5.45), (5.49), (6.187))

$$Q^{\text{tr. b}} = \int_0^{\infty} Q^{\text{tr. b}}(\omega) d\omega = \int \frac{[\mathbf{k} v_{\alpha}]^2}{(k v_{\alpha})^2} |M^{\alpha\beta}|^2 \delta(\omega - k_z v_{\alpha} + k_{0,z} v_{\alpha}) N_{\beta} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^4}, \quad (6.201)$$

где

$$Q^{\text{tr.b.}}(\omega) = \frac{4q_\alpha^2 q_\beta^2 e^2 \omega_{\text{pe}}^4 N_\beta}{m_e^2 v_{\text{Te}}^4 \omega^4} \int_0^\infty \frac{\theta^2 (M_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha)^4 d\theta^2}{[(M_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha)^2 + \theta^2]^4} = \frac{2q_\alpha^2 q_\beta^2 e^2 N_\beta \omega_{\text{pe}}^4}{3m_e^2 \omega^4 v_{\text{Te}}^4}. \quad (6.202)$$

Для ультрарелятивистских электронов ($M_\alpha = m_e$, $q_\alpha = -e$) переходное тормозное излучение (6.202) всегда меньше обычного тормозного излучения (6.196) в силу принятого условия (6.195). Однако уже для ионов ($q_\alpha = Ze$, $M_\alpha = m_i$) переходное тормозное излучение больше (6.196), если

$$\omega \ll \omega_{\text{pe}}(c/v_{\text{Te}}) \sqrt{\mathcal{E}_i / Z m_e c^2}, \quad (6.203)$$

что совместно с (6.195) означает

$$\mathcal{E}_i / m_i c^2 \ll (m_i / Z m_e)^{1/3}. \quad (6.204)$$

В области более низких частот, т. е. при выполнении неравенства, противоположного (6.195), величина $\kappa_{\text{max}} \sim \omega_{\text{pe}} / v_{\text{Te}}$ и в области частот

$$(c/v_{\text{Te}}) \omega_{\text{pe}} \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2 \ll \omega \ll (c/v_{\text{Te}}) \omega_{\text{pe}} (\mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2)^2 \quad (6.205).$$

получаем

$$M^{\alpha\beta} = - \frac{4\pi q_\alpha q_\beta e c \omega_{\text{pe}}^2 (M_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha)^2}{m_e v_{\text{Te}}^2 (\omega(\mathbf{k}))^2 [\sin^2 \theta + (M_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha)^2] (\kappa^2 + 1/d^2)}. \quad (6.206)$$

Здесь мы не заменили $\sin^2 \theta$ на θ^2 , так как вклад углов $\theta \sim 1$ уже не мал (правда, при этом значения $\theta \sim 1$ влияют только на подлогарифмическое выражение).

Мощность переходного тормозного излучения в этом случае будет

$$Q^{\text{tr.b.}}(\omega) = \frac{2q_\alpha^2 q_\beta^2 e^2 N_\beta \omega_{\text{pe}}^2}{m_e^2 c^2 v_{\text{Te}}^2 \omega^2} \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^4 \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta d\theta}{[\sin^2 \theta + (M_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha)^2]^2}. \quad (6.207)$$

При этом положено $d \approx v_{\text{Te}} / \omega_{\text{pe}}$. Получаем окончательно

$$Q^{\text{tr.b.}}(\omega) = \frac{4q_\alpha^2 q_\beta^2 N_\beta e^2 \omega_{\text{pe}}^2}{m_e^2 c^2 v_{\text{Te}}^2 \omega^2} \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^4 \left[\ln \frac{2M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} - \frac{1}{2} \right]. \quad (6.208a)$$

Из сравнения с обычным тормозным излучением (6.196) (которое уменьшается в $(\omega v_{\text{Te}} / \omega_{\text{pe}} c)^2 (M_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha)^4$ раз) видно, что мощность переходного тормозного излучения ультрарелятивистских электронов оказывается малой (при выполнении условий (6.205)). Для налетающих же ионов переходное тормозное излучение будет преобладать при

$$\mathcal{E}_i / m_i c^2 \ll (m_i / m_e) c / v_{\text{Te}}. \quad (6.208б)$$

Наконец, в случае

$$\omega \ll (c/v_{Te})(\mathcal{E}_\alpha/M_\alpha c^2)\omega_{pe} \quad (6.209)$$

переходное тормозное излучение может быть существенным как для электронов, так и для ионов. В этом случае в вероятности переходного тормозного излучения удобно перейти к интегрированию по передаваемому импульсу $\kappa' = \kappa + \mathbf{k}_\perp$. Тогда первый из сомножителей знаменателя (6.199) будет содержать $(\kappa' - \mathbf{k}_\perp)^2$, а максимальное значение κ' будет определяться вторым сомножителем знаменателя (6.199), т. е. $\kappa_{\max} \sim \omega M_\alpha c / \mathcal{E}_\alpha$. В силу (6.209) можно пренебречь κ' в первом сомножителе и представить матричный элемент переходного тормозного излучения в виде

$$M^{\alpha\beta} = - \frac{4q_\alpha q_\beta e \omega_{pe}^2 (M_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha)^2}{m_e c v_{Te}^2 (k_\perp^2 + \omega_{pe}^2 / v_{Te}^2) [(\kappa')^2 + (M_\alpha c^2 / \mathcal{E}_\alpha)^2 \omega^2 / c^2]}. \quad (6.210)$$

Это приводит к следующему выражению для мощности переходного тормозного излучения:

$$Q^{\text{tr.b}}(\omega) = \frac{2q_\alpha^2 q_\beta^2 \omega_{pe}^4 e^2}{m_e^2 v_{Te}^4 \omega^4} \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^2 N_\beta \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(\sin^2 \theta + \omega_{pe}^2 c^2 / \omega^2 v_{Te}^2)^2}. \quad (6.211)$$

Если

$$\omega_{pe} c / v_{Te} \ll \omega \ll \omega_{pe} (c/v_{Te}) \mathcal{E}_\alpha / M_\alpha c^2, \quad (6.212)$$

то

$$Q^{\text{tr.b}}(\omega) = \frac{4q_\alpha^2 q_\beta^2 \omega_{pe}^4 e^2}{m_e^2 v_{Te}^4 \omega^4} N_\beta \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^2 \left(\ln \frac{\omega_{pe} c}{\omega v_{Te}} - \frac{1}{2} \right), \quad (6.213)$$

а при

$$\omega \ll (c/v_{Te}) \omega_{pe} \quad (6.214)$$

имеем

$$Q^{\text{tr.b}}(\omega) = \frac{8q_\alpha^2 q_\beta^2 e^2}{3m_e^2 c^4} \left(\frac{M_\alpha c^2}{\mathcal{E}_\alpha} \right)^2 N_\beta. \quad (6.215)$$

Поскольку для электронов ($M_\alpha = m_e$, $q_\alpha = -e$) (6.215) и (6.196) дают одинаковые выражения, то неучтенная интерференция между переходным и обычным тормозным излучением в данном случае весьма существенна. Для ионов $M_\alpha = m_i$, $q_\alpha = Ze$, переходное тормозное излучение в $(m_i/Zm_e)^2$ раз больше.

6. Тормозная неустойчивость в плазме в сильных магнитных полях. Все частицы предполагаются движущимися вдоль силовых линий (одномерно) и характеризуются распределением по энергиям ($f_{p\alpha}$ зависит от $\mathcal{E}_\alpha$)

$$\int_{M_\alpha c^2}^{\infty} f_{\mathcal{E}_\alpha} d\mathcal{E}_\alpha = N_\alpha.$$

Инкремент неустойчивости можно записать следующим образом:

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \int_{M_{\alpha} c^2}^{\infty} w_{\mathbf{p}\alpha}^b(\mathbf{k}) \hbar \omega(\mathbf{k}) \frac{\partial f_{\mathcal{E}\alpha}}{\partial \mathcal{E}_{\alpha}} d\mathcal{E}_{\alpha} = \int_{M_{\alpha} c^2}^{\infty} Q_{\mathbf{k}}^b \frac{\partial f_{\mathcal{E}\alpha}}{\partial \mathcal{E}_{\alpha}} d\mathcal{E}_{\alpha}, \quad (6.216)$$

где

$$Q^b = \int Q_{\mathbf{k}}^b \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \int \frac{\hbar \omega(\mathbf{k})}{(2\pi)^3} w_{\mathbf{p}\alpha}^b(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (6.217)$$

Для обычного тормозного излучения, согласно (6.196),

$$Q_{\mathbf{k}}^{\text{or},b} = \frac{16(2\pi)^3 q_{\alpha}^4 q_{\beta}^2 N_{\beta}}{\pi M_{\alpha}^2 c \omega^2} \left(\frac{M_{\alpha} c^2}{\mathcal{E}_{\alpha}} \right)^6 \frac{\theta^2}{[(M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^2 + \theta^2]^4}. \quad (6.218)$$

Интегрируя (6.216) по частям (предполагая, что нерелятивистские частицы с $v_{\alpha} \rightarrow 0$ в распределении отсутствуют), получаем

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\text{or},b} = \frac{4(8\pi)^2 q_{\alpha}^4 q_{\beta}^2 N_{\beta}}{M_{\alpha}^2 c \omega^2} \int_{M_{\alpha} c^2}^{\infty} \frac{\theta^2 (M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^6 [3\theta^2 - (M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^2]}{\mathcal{E}_{\alpha} [\theta^2 + (M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^2]^5} f_{\mathcal{E}_{\alpha}} d\mathcal{E}_{\alpha}. \quad (6.219)$$

Для распределения с малым разбросом по энергиям (около $\mathcal{E}_{\alpha} \approx \mathcal{E}_0$, $\Delta \mathcal{E}_{\alpha} \ll \mathcal{E}_0$) неустойчивость возникнет при

$$\theta^2 > 1/3 (M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_0)^2. \quad (6.220)$$

Максимум инкремента соответствует $\theta^2 = (M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_0)^2$:

$$\gamma_{\mathbf{k},\text{max}}^{\text{or},b} \approx \frac{(4\pi)^2 q_{\alpha}^4 q_{\beta}^2 N_{\beta} N_{\alpha}}{M_{\alpha}^2 c \omega^2 \mathcal{E}_0}. \quad (6.221)$$

Для переходного тормозного излучения нужно использовать формулу (6.211). Получаем

$$Q_{\mathbf{k}}^{\text{tr},b} = \frac{(2\pi)^3 q_{\alpha}^2 q_{\beta}^2 e^2 c^3 N_{\beta} (M_{\alpha} c^2 / \mathcal{E}_{\alpha})^2 \sin^2 \theta}{\pi \omega^6 m_e^2 v_{\text{Te}}^4 [\sin^2 \theta + \omega_{\text{pe}}^2 c^2 / (\omega^2 v_{\text{Te}}^2)]^2}. \quad (6.222)$$

В частности, в области частот (6.214) имеем

$$Q_{\mathbf{k}}^{\text{tr},b} = \frac{(2\pi)^3 q_{\alpha}^2 q_{\beta}^2 e^2 N_{\beta} \sin^2 \theta}{\pi \omega^2 m_e^2 c} \left(\frac{M_{\alpha} c^2}{\mathcal{E}_{\alpha}} \right)^2. \quad (6.223)$$

Для любого распределения частиц с «провалом» в центре (отсутствие нерелятивистских частиц с $v_{\alpha} \rightarrow 0$) получаем переходную тормозную неустойчивость с инкрементом

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\text{tr},b} = \frac{(4\pi)^2 q_{\alpha}^2 q_{\beta}^2 e^2 N_{\beta} \sin^2 \theta}{m_e^2 c \omega^2} \int_{M_{\alpha} c^2}^{\infty} \frac{f_{\mathcal{E}_{\alpha}}}{\mathcal{E}_{\alpha}} \left(\frac{M_{\alpha} c^2}{\mathcal{E}_{\alpha}} \right)^2 d\mathcal{E}_{\alpha}. \quad (6.224)$$

Неустойчивость имеет место для $\gamma_{\mathbf{k}}^b > \gamma_{\mathbf{k}}^{(0)}$, где $\gamma_{\mathbf{k}}^{(0)}$ описывает неучтенные процессы затухания волн.

ГЛАВА 7

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, РАССЕЯНИЕ И ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ВАКУУМЕ В СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

§ 7.1. Нелинейная диэлектрическая проницаемость вакуума

1. Введение. Область низких частот. Классическая электродинамика Максвелла является, как известно, линейной (речь идет о вакууме). При учете же квантовых эффектов и, конкретно, виртуального рождения электронно-позитронных пар электродинамика вакуума становится нелинейной. Последнее отвечает, в частности, тому, что свет может рассеиваться на свете. Подобные возможности выявились еще в начале 30-х годов (см. [72]), но долгие годы казались несколько абстрактными. Дело в том, что нелинейность вакуума проявляется, вообще говоря, лишь в весьма сильных полях (см. ниже), создать которые в лабораторных условиях невозможно. После открытия пульсаров (1967—1968 гг.) выяснилось, однако, что подобные поля реализуются в космических условиях. Поле может оказаться сильным и вблизи атомных ядер. В результате исследование нелинейных электродинамических процессов в вакууме представляется в настоящее время вполне актуальной и, можно сказать, реальной проблемой.

Эффект поляризации вакуума в сильном поле, связанный с виртуальным (а в определенных условиях и реальным) рождением пар (см. [150]), приводит к тому, что можно говорить о нелинейных диэлектрической и магнитной проницаемостях вакуума. Квадратичные нелинейности в вакууме отсутствуют (см. [150]) так же, как и в электронно-позитронной плазме. В области низких частот (критерий см. ниже) дисперсию вакуума (зависимость поляризуемости от частоты и волнового числа) можно не учитывать, тогда как в области высоких частот дисперсия становится существенной.

Будем считать здесь внешние сильные поля E_0 , B_0 постоянными как в пространстве, так и во времени (случай слабоменяющихся полей рассмотрен в [151]). Говоря о дисперсии, мы имеем в виду поведение слабой электромагнитной волны в вакууме при наличии в нем указанных сильных полей. При этом поле

является сильным, если оно сравнимо с характерным полем B_c ($-e$ и m_e — заряд и масса электрона):

$$B_c = \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} = 4,4 \cdot 10^{13} \text{ Гс.} \quad (7.1)$$

Характерное сильное электрическое поле $E_c = B_c$. Ниже мы в конкретной задаче будем считать, что имеется лишь сильное магнитное поле. Как уже отмечалось (см. гл. 3, § 3.5), в полупроводниках соответствующие критические поля могут быть намного меньше значения (7.1), так как вместо массы m_e («щель» $2m_e c^2 \sim 1$ МэВ) входит эффективная масса m_* (ширина запрещенной зоны $\Delta E \sim 1$ эВ), а аналог поля (7.1) содержит квадрат эффективной массы (см. [104]).

Обсуждаемую нелинейность можно описать, сказав, что в сильном поле вакуум ведет себя подобно некоторой среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями, зависящими от напряженности поля. Для полей, малых по сравнению с B_c и достаточно медленно изменяющихся в пространстве и во времени (соответствующие условия указаны в [150], § 129 и [151]), поляризация вакуума может быть учтена в замкнутой форме — она приводит к появлению добавки L' в функции Лагранжа L для электромагнитного поля:

$$L = L_0 + L', \quad L_0 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2); \quad (7.2)$$

$$L' = \frac{\kappa}{2} \{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E}\mathbf{B})^2\}, \quad (7.3)$$

где

$$\kappa = \frac{\alpha}{4\pi \cdot 45\pi B_c^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad E, B \ll B_c, \quad (7.4)$$

а $\mathbf{B}$ — напряженность магнитного микрополя, при переходе к уравнениям в среде играющая роль магнитной индукции; формулы (7.2)–(7.4) были получены еще в 1936 г. [72], их вывод имеется, например, в [150], § 129 (в [150] индукция $\mathbf{B}$ обозначена через $\mathbf{H}$). Очевидно, $\kappa \sim \hbar$ и, таким образом, нелинейность вакуума является квантовым эффектом.

Поляризация и намагничивание вакуума $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ равны

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}} = \kappa [2\mathbf{E}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + 7\mathbf{B}(\mathbf{E}\mathbf{B})], \quad (7.5)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{B}} = \kappa [-2\mathbf{B}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + 7\mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{B})], \quad (7.6)$$

т. е., как отмечалось выше, нелинейность кубическая (выражения (7.5) и (7.6) содержат кубы напряженностей полей). Поскольку $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ зависят от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ нелинейным образом, можно вводить различные тензоры проницаемости. Ограничимся здесь частным случаем, когда

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1, \quad B_1 \ll B_0, \quad E_1 \ll B_0, \quad (7.7)$$

т. е. имеется сильное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ и слабое электромагнитное поле, например, поле волны $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{B}_1$. Тогда

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 = \kappa [-2B_0^2 \mathbf{E}_1 + 7\mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 \mathbf{E}_1)], \quad (7.8)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1, \quad \mathbf{M}_0 = 2\kappa B_0^2 \mathbf{B}_0, \quad (7.9)$$

$$\mathbf{M}_1 = 2\kappa [B_0^2 \mathbf{B}_1 + 2\mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_1)]. \quad (7.10)$$

Удобно ввести также тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости для слабого поля

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}, \quad \mu_{ij} = \delta_{ij} + \delta\mu_{ij}, \quad (7.11)$$

$$P_{1,i} = \delta\varepsilon_{ij} E_{1,j} / 4\pi, \quad M_{1,i} = \delta\mu_{ij} B_{1,j} / 4\pi. \quad (7.12)$$

В связи с последним выражением нужно заметить, что, по определению, $M_{1,i} = \delta\mu_{ij} H_{1,j} / 4\pi$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{B}_1 - 4\pi \mathbf{M}_1$. Но нас интересует лишь случай, когда

$$|\delta\varepsilon_{ij}| \ll 1, \quad |\delta\mu_{ij}| \ll 1. \quad (7.13)$$

Поэтому в выражении для $\mathbf{M}_1$ можно заменить $\mathbf{H}_1$ на $\mathbf{B}_1$. Считая, для определенности, поле $\mathbf{B}_0$ направленным по оси z , имеем

$$\delta\varepsilon_{zz} \equiv \tilde{\delta\varepsilon} = 20\pi\kappa B_0^2 = \frac{5\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}, \quad (7.14)$$

$$\delta\varepsilon_{xx} = \delta\varepsilon_{yy} \equiv \delta\varepsilon = -8\pi\kappa B_0^2 = -\frac{2\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}, \quad (7.15)$$

$$\delta\mu_{zz} \equiv \tilde{\delta\mu} = 24\pi\kappa B_0^2 = \frac{6\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}, \quad (7.16)$$

$$\delta\mu_{xx} = \delta\mu_{yy} \equiv \delta\mu = 8\pi\kappa B_0^2 = \frac{2\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}. \quad (7.17)$$

Таким образом, вакуум в сильном магнитном поле представляет собой «среду», имеющую свойства анизотропного ферродиелектрика с тензорами ε_{ij} и μ_{ij} , определяемыми согласно (3.75) (ось z вдоль $\mathbf{B}_0$), причем

$$\varepsilon = 1 + \delta\varepsilon = 1 - \frac{2\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}, \quad \tilde{\varepsilon} = 1 + \tilde{\delta\varepsilon} = 1 + \frac{5\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}, \quad (7.18)$$

$$\mu = 1 + \delta\mu = 1 + \frac{2\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}, \quad \tilde{\mu} = 1 + \tilde{\delta\mu} = 1 + \frac{6\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}. \quad (7.19)$$

Показатели преломления для волн, распространяющихся строго перпендикулярно «кристаллической» оси с поляризацией (направлением вектора $\mathbf{E}_1$) по полю $\mathbf{B}_0$ и перпендикулярно этому

полю, соответственно равны *)

$$n_{\parallel} = \sqrt{\epsilon\mu} \approx 1 + \frac{\delta\epsilon + \delta\mu}{2} = 1 + \frac{7\alpha B_0^2}{90\pi B_c^2}, \quad (7.20)$$

$$n_{\perp} = \sqrt{\epsilon\mu} \approx 1 + \frac{\delta\epsilon + \delta\mu}{2} = 1 + \frac{2\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}. \quad (7.21)$$

Эти выражения совпадают (с той точностью, с которой они получены) с приведенными в [72, 150].

Заметим, что для волн, распространяющихся строго по полю (угол $\theta = 0$), показатель преломления $n(0) = \sqrt{\epsilon\mu}$, согласно (7.18), (7.19), равен единице. Область применимости результатов (7.18), (7.19) ограничена условием [152] **)

$$\lambda = \frac{3\hbar\omega}{2m_e c^2} \left(\frac{B_0}{B_c} \right) \ll 1. \quad (7.22)$$

2. Область высоких частот. При $\lambda \ll 1$, а практически и при $\lambda < 1$, поглощение излучения, обусловленное реальным рождением электронно-позитронных пар, пренебрежимо мало. Напротив, при $\lambda \geq 1$ поглощение нужно учитывать, в соответствии с чем проницаемости ϵ и μ содержат мнимые части. Правда, произведение $\epsilon\mu = 1$ и при угле $\theta = 0$ показатель $n(0) = \sqrt{\epsilon\mu} = 1$, т. е. вакуум в сильном магнитном поле ведет себя как «истинный» вакуум, если волна распространяется вдоль магнитного поля как в области низких, так и в области высоких частот. Частотная дисперсия вакуума сказывается при $\lambda \geq 1$ для волн, распространяющихся под углом θ , в частности, перпендикулярно сильному полю B_0 . Так, используя результаты [152–154], при $\lambda \gg 1$ имеем ***)

$$\tilde{\mu} = 1 + 3(\tilde{\epsilon} - 1)/2, \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon} &= 1 - \frac{2\alpha 6^{2/3}}{7\sqrt{\pi}} \frac{(\Gamma(2/3))^2}{\Gamma(1/6)} (1 - i\sqrt{3}) \left(\frac{m_e c^2}{\hbar\omega} \right)^{4/3} \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^{2/3} = \\ &= 1 - 0,0013 (1 - i\sqrt{3}) \left(\frac{m_e c^2}{\hbar\omega} \right)^{4/3} \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^{2/3}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

*) Как видно из (7.20), (7.21), показатели преломления вакуума больше единицы, т. е. достаточно быстрые (при $B_0 \ll B_c$ — ультрарелятивистские) частицы могут давать излучение В.—Ч. [155] (более подробно см. § 7.2. п. 2).

**) Условие $\lambda \geq 1$ соответствует тому, что энергия фотона $\hbar\omega \geq m_e c^2 B_c/B_0 \gg m_e c^2$ ($B_0 \ll B_c$) достаточна для заметного рождения электронно-позитронных пар.

**) Здесь рассматривается лишь предельный случай $\lambda \gg 1$, $B_0 \ll B_c$. При $B_0 \sim B_c$ компоненты тензора ϵ_{ij} для вакуума могут иметь особенности [154, 154а], что может сказаться на распространении электромагнитных волн при $\hbar\omega \geq 2m_e c^2$ (т. е., если $B_0 \sim B_c$, при $\lambda \geq 1$). При $B_0 \ll B_c$ эти особенности несущественны. Для энергии излучения заряженных частиц в вакууме (см. § 7.2) относительный вклад области частот $\lambda \sim 1$ оказывается во многих случаях пренебрежимо малым.

При $\theta = \pi/2$ показатели преломления приближенно равны $n_{\perp}^2 = \text{Re} \tilde{\epsilon}_{\perp}$ и $n_{\parallel}^2 = \text{Re} \tilde{\epsilon}_{\parallel}$ (см. [152]). Падение показателя преломления с частотой происходит медленнее, чем по плазменной формуле $\epsilon \approx 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$. Реально в сильном поле как в космических условиях (около пульсаров), так и в лабораторных присутствует плазма или остаточный газ. Поэтому необходима оценка минимальной плотности вещества, при которой она начинает сказываться на показателе преломления. Показатель преломления вакуума остается постоянным вплоть до частот $\omega \sim \omega_c$, определяемых из условия $\lambda = 1$, т. е.

$$\omega_c = \frac{2m_e c^2}{3\hbar} \left(\frac{B_c}{B_0} \right) \approx 10^{21} B_c / B_0. \quad (7.25)$$

На этой частоте роль плазмы (ее влияние на показатель преломления) мала, если

$$\omega_{pe} \ll 10^{-2} \frac{m_e c^2}{\hbar} \sim 10^{19} \text{ с}^{-1}, \quad N_e = \frac{m_e \omega_{pe}^2}{4\pi e^2} \ll 3 \cdot 10^{28} \text{ см}^{-3}. \quad (7.26)$$

Вблизи пульсаров это условие всегда выполнено. При меньших частотах роль плазмы, разумеется, возрастает и легко может быть оценена *).

§ 7.2. Переходное излучение заряженных частиц в вакууме в сильном магнитном поле

1. Переходное излучение заряда, движущегося поперек сильного магнитного поля. Рассмотрим излучение заряда при его прохождении через область в вакууме, где значение внешнего магнитного поля резко меняется. Тензор ϵ_{ij} вакуума претерпевает в этой области изменение, т. е. возникает переходное излучение [39]. Считаем, что масса частицы бесконечна и, следовательно, ее траектория не искривляется магнитным полем и у нее отсутствует магнитотормозное излучение. Конкретности ради рассмотрим излучение частицы, возникающее при вылете из области, занятой сильным полем, в область без поля. В ультрарелятивистском случае $\mathcal{E} \gg Mc^2$ при этом существенно лишь излучение вперед (по скорости $\mathbf{v}$) и можно использовать формулы (3.85), (3.86).

*) Для нерелятивистской плазмы, находящейся в магнитном поле, квадраты показателей преломления при распространении вдоль поля равны (см., например, [67], § 11)

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{Be})}; \quad \omega_{Be} = \frac{eB_0}{m_e c} = 1,76 \cdot 10^7 B_0 \text{ с}^{-1}.$$

Даже в поле $B_0 \sim 10^{12}$ Гс частота $\omega_{Be} \sim 10^{19} \text{ с}^{-1}$, в то время как частота $\omega_c \sim 10^{22} \text{ с}^{-1}$ и намного выше ω_{Be} . Поэтому мы вправе полагать $n_{\parallel} \approx 1 - \omega_{pe}^2/2\omega^2$, как это сделано при оценке (7.26).

Существует критическая энергия частиц $\mathcal{E}_c$ (или, точнее, критическая скорость v_c , причем $\mathcal{E}_c/Mc^2 = (1 - v_c^2/c^2)^{-1/2}$), для которой качественно меняются свойства переходного излучения. Эта энергия определяется по порядку величины условием, ясным из формул (3.85) и (3.86):

$$\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \sim \sqrt{|1 - \varepsilon_{\mu}|} \sim \sqrt{\frac{2\alpha}{45\pi} \frac{B_0}{B_c}}. \quad (7.27)$$

Если $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_c$, то в знаменателях (3.85), (3.86) $(Mc^2/\mathcal{E})^2 \gg |1 - \varepsilon_{\mu}|$, $|1 - \varepsilon_{\mu}|$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} W^{\text{tr}}(\omega) &= W_0^{\text{tr}}(\omega) + W_e^{\text{tr}}(\omega) = \\ &= \frac{q^2}{2\pi c} [(\tilde{\varepsilon}_{\mu} - 1)^2 + (\varepsilon_{\mu} - 1)^2] \int_0^{\infty} \frac{\theta^2 d\theta^2}{[(Mc^2/\mathcal{E})^2 + \theta^2]^4} = \\ &= \frac{q^2}{12\pi c} [(\tilde{\varepsilon}_{\mu} - 1)^2 + (\varepsilon_{\mu} - 1)^2] \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2}\right)^4 = \frac{13\alpha^2 q^2 B_0^4}{4860\pi^3 c B_c^4} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2}\right)^4. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Здесь использованы формулы (7.20) и (7.21) для $\tilde{\varepsilon}_{\mu}$ и ε_{μ} . Плоский спектр по частотам (7.28) простирается в данном случае до частот, при которых $\tilde{\varepsilon}_{\mu} - 1$ и $\varepsilon_{\mu} - 1$ начнут падать с частотой, что определяется условием $\lambda > 1$ (см. (7.22)). Отсюда следует оценка полной излучаемой энергии:

$$W^{\text{tr}} = \int_0^{\omega_c} W^{\text{tr}}(\omega) d\omega = \frac{13a}{4860\pi^3} \frac{\alpha^2 q^2}{\hbar c} m_e c^2 \left(\frac{B_0}{B_c}\right)^3 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2}\right)^4; \quad (7.29)$$

$$\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \ll \frac{\mathcal{E}_c}{Mc^2} = \sqrt{\frac{45\pi}{2\alpha} \frac{B_c}{B_0}}, \quad (7.30)$$

где a — численный множитель порядка единицы. Его точное значение может быть найдено с помощью довольно громоздких общих формул [152] для $\tilde{\varepsilon}_{\mu}$ и ε_{μ} ; если же «сшивать» выражение (7.30) со значением (7.32), относящимся к случаю $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_c$, то $a \approx 7,4$. Для больших значений $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_c$ в знаменателях в (3.85), (3.86) доминируют слагаемые $\tilde{\varepsilon}_{\mu} - 1$ и $\varepsilon_{\mu} - 1$ до тех пор, пока их значения не упадут из-за дисперсии, описываемой формулой (7.24). Положив $\sqrt{|\tilde{\varepsilon}_{\mu} - 1|} \sim Mc^2/\mathcal{E}$, с помощью (7.24) получаем оценку максимальных частот, излучаемых в этом процессе:

$$\omega_{\text{max}} \sim \frac{m_e c^2}{\hbar} \frac{B_c}{B_0} \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c}\right)^{3/2} \sim \omega_c \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c}\right)^{3/2}. \quad (7.31)$$

Естественно, максимальные характерные частоты, излучаемые при $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_c$, существенно больше максимальных характерных частот, излучаемых при $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_c$ (фактор $(\mathcal{E}/\mathcal{E}_c)^{3/2}$ в формуле (7.31)). До частот $\omega \lesssim \omega_{\text{max}}$ спектр остается, как ясно из формул (3.85),

(3.86), плоским: $W^{\text{tr}}(\omega) = \text{const}$, а при $\omega \gg \omega_{\text{max}}$ спектр падает с частотой как $1/\omega^{3/2}$. При этом вклад в интегральную излученную энергию области частот $\omega \lesssim m_e c^2 B_c / \hbar B_0$, в которой показатель преломления постоянен, ничтожен, так как основная излученная энергия приходится на существенно более высокие частоты. Это позволяет в (3.85), (3.86) для подсчета интегральной излучаемой энергии использовать выражения (7.23), (7.24). После интегрирования по углам и частотам получаем

$$W_{\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_c}^{\text{tr}} = \frac{q^2 m_e c^2}{\pi \hbar c} g \alpha^{3/4} \sqrt{\frac{B_0}{B_c} \left(\frac{\mathcal{E}}{M c^2} \right)^{3/2}} = 3,2 m_e c^2 \frac{q^2}{\hbar c} \left(\frac{B_c}{B_0} \right) \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \right)^{3/2}, \quad (7.32)$$

$$\mathcal{E} = \frac{2^{9/4} \pi^{1/4} (\Gamma(2/3))^{9/4}}{7^{7/4} (\Gamma(1/3))^{3/4}} (2^{3/4} + 3^{3/4}) \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0,41. \quad (7.33)$$

При $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_c$ формулы (7.32) и (7.29) дают, естественно, близкие результаты:

$$W^{\text{tr}} \left(\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_c = \sqrt{\frac{45\pi}{2\alpha}} \frac{B_c}{B_0} M c^2 \right) \sim \frac{q^2}{\pi \hbar c} m_e c^2 \frac{B_c}{B_0}. \quad (7.34)$$

Следует обратить внимание на то, что в отличие от переходного излучения, рассмотренного в гл. 2 и 3, в случае (7.32) максимальная частота и полная мощность излучения быстрее растут с энергией — как $\mathcal{E}^{3/2}$, а не пропорционально $\mathcal{E}$ (см. (2.65)). Это является следствием специфического закона дисперсии (7.24) вакуума в сильном магнитном поле, обязанного эффектам виртуального и реального рождения электронно-позитронных пар.

2. Оценка зоны формирования переходного излучения и роли других типов излучения. Следует сделать несколько оговорок, касающихся области применимости формул переходного излучения в вакууме. Во-первых, очевидно, что при $\lambda \gg 1$ использование дисперсионной формулы (7.24) ограничено условием $\lambda \ll \ll m_\mu/m_e$, где m_μ — масса мюона, m_e — масса электрона. При $\lambda \gg m_\mu/m_e$, т. е. при достаточно высоких частотах (а следовательно, согласно (7.31) и высоких энергиях, если нас интересует все излучение вплоть до частот $\omega \sim \omega_{\text{max}}$) становятся существенными процессы виртуального рождения мюонных пар*). При дальнейшем продвижении в область все больших частот в игру могут вступать процессы виртуального рождения частиц все больших масс. Во-вторых, резкая граница магнитного поля является идеализацией. Однако для переходного излучения существенна резкость границы по сравнению с длиной зоны формирования излучения (2.109), которая для ультрарелятивистских

*) Впрочем, в этой области разность $\tilde{m} - 1$ очень мала, так как соответствующее поле B_c в $(m_\mu/m_e)^2$ раз больше поля (7.1).

частиц становится весьма большой. Правда, она в данном случае не столь быстро растет с энергией, как это было в случаях, разобранных в гл. 2 и 3. Действительно, для частот (7.31)

$$L_I \sim \frac{4\pi c}{\omega_{\max}} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 \sim \frac{4\pi\hbar}{m_e c} \left(\frac{B_0}{B_c} \right) \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}} \right)^{3/2}, \quad (7.35)$$

$$L_I(\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_c) \sim \frac{4\pi\hbar}{m_e c} \frac{45\pi}{2\alpha} \left(\frac{B_c}{B_0} \right) \sim 10^5 \frac{\hbar}{m_e c} \left(\frac{B_c}{B_0} \right). \quad (7.36)$$

Таким образом, по крайней мере при $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_c$ длина $L_I \gg \hbar/m_e c$ и условия $L_I \gg \Delta y \gg \hbar/m_e c$ совместимы.

Сравним теперь переходное излучение с магнитотормозным (синхротронным) излучением, а также с черенковским излучением (в сильном электромагнитном поле этот процесс рассматривался в [155]). Мощность синхротронного излучения (при $\theta = \pi/2$, $\mathcal{E} \gg Mc^2$) равна

$$Q^s = \frac{2q^4 B_0^2}{3M^2 c^3} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 = \frac{2q^4 m_e^4 c^2}{3M^2 \hbar^3 \alpha} \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^2 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2. \quad (7.37)$$

Энергию переходного излучения разумно сравнивать с энергией, излучаемой путем синхротронного механизма на длине зоны формирования, т. е. за время L_I/c . Эта энергия равна

$$W^s = \frac{Q^s L_I}{c} \sim \frac{4\pi q^4 m_e^3}{M^2 \hbar^2 \alpha} \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^3 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^4 \quad (7.38)$$

при $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_c = \sqrt{\frac{45\pi}{2\alpha}} \frac{B_c}{B_0}$,

$$W^s = \frac{Q^s L_I}{c} \sim \frac{4\pi q^4 m_e^3}{M^2 \hbar^2 \alpha} \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^3 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^4 \left(\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}} \right)^{3/2} \quad (7.39)$$

при $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_c$. Сравнивая (7.29) и (7.38), мы видим, что переходное излучение может превосходить синхротронное лишь для частиц с очень большой массой $M > 45\pi Z/2\alpha m_e$. Если же сравним (7.39) с (7.32), то придем к аналогичному выводу. Фактически ситуация сложнее, поскольку следует различать зоны формирования в обеих средах (в данном случае — в поле и в области вне поля). Поэтому соотношения между синхротронным и переходным излучениями могут при определенных условиях изменяться в пользу последнего. В рассматриваемом примере (движение заряда поперек магнитного поля) синхротронное излучение, вообще говоря, доминирует.

Мощность излучения Вавилова — Черенкова в тех же условиях (см. (3.89)) равна

$$Q^{\text{V-Ch}} = \frac{q^2}{2c} \int_0^\infty \omega d\omega \left[\delta\mu + \delta\tilde{\mu} + \delta\varepsilon + \delta\tilde{\varepsilon} - 2 \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right]. \quad (7.40)$$

Подставляя сюда выражения (7.14)–(7.17), получаем (см. также [155])

$$Q^{\text{V-Ch}} = \frac{q^2}{2c} \int_0^\infty \omega d\omega \left[\frac{11\alpha}{90\pi} \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^2 - \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right]. \quad (7.41)$$

Очевидно, излучение возможно лишь при условии

$$\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} > \sqrt{\frac{90\pi}{11\alpha} \frac{B_c}{B_0}} = \sqrt{\frac{4}{11} \frac{\mathcal{E}_c}{Mc^2}}. \quad (7.42)$$

При соблюдении этого условия можно грубо оценить мощность, проводя в (7.41) интегрирование до частоты $\omega_c \sim m_e c^2 B_c / \hbar B_0$, выше которой показатель преломления вакуума начинает падать с частотой. Такая оценка дает

$$Q^{\text{V-Ch}} \sim \frac{11q^2\alpha}{180\pi c} \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^2 \omega_c^2 \sim 10^{-4} \frac{q^2}{c} \left(\frac{m_e c^2}{\hbar} \right)^2. \quad (7.43)$$

На длине зоны формирования излучается энергия (см. (7.35))

$$\begin{aligned} W^{\text{V-Ch}} \sim Q^{\text{V-Ch}} \frac{L_f}{c} &\sim 10^{-3} \frac{q^2}{\hbar c} m_e c^2 \left(\frac{B_0}{B_c} \right) \left(\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}} \right)^{3/2} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 \approx \\ &\approx \frac{44\pi}{9} \frac{q^2}{\hbar c} m_e c^2 \frac{B_c}{B_0} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c}}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Сравнивая это выражение с (7.32), видим, что переходное излучение превосходит черенковское, если

$$\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_c. \quad (7.45)$$

В силу (7.42) условие (7.45) всегда выполнено.

3. Переходное излучение заряда, движущегося в вакууме вдоль сильного магнитного поля. Если ультрарелятивистская частица движется по полю B_0 , то, как уже отмечалось, показатель преломления $n(0) = 1$ и синхротропное и черенковское излучения отсутствуют. Переходное же излучение происходит, если, конечно, имеется граница между областью с полем и без него. В силу уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$ не так просто создать границу вдоль поля, хотя в каких-то пределах это возможно, если распоряжаться внешними токами. Нужно, кроме того, учесть, что граница вовсе не обязательно должна быть перпендикулярна скорости частицы, т. е. в данном случае может и не быть расположенной в плоскости xy . С другой стороны, для границы, перпендикулярной полю, переходное излучение (при движении по полю) значительно слабее, чем рассмотренное в предыдущем разделе. Дело в том, что в приближении типа (3.85) излучаемая энергия зависит только от n (в (3.85), (3.86), согласно (7.20), (7.23), входят только величины $n_{\parallel}$ и $n_{\perp}$). Поэтому для расчета нужно пользоваться более точными формулами типа (3.79), (3.80). Здесь ограничимся ре-

зультатом для случая $\ln (\mathcal{E}/Mc^2) \gg 1$:

$$W^{\text{tr}}(\omega) = \frac{2q^2(\varepsilon - 1)^2}{\pi c} \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} = \frac{8q^2\alpha^2}{2025\pi^3 c} \left(\frac{B_0}{B_c}\right)^4 \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (7.46)$$

Полная излучаемая энергия может быть оценена путем интегрирования до частоты ω_c (см. (7.25)):

$$W^{\text{tr}} \sim \int_0^{\omega_c} W^{\text{tr}}(\omega) d\omega \sim \frac{8\alpha^2 m_e c^2}{2025\pi^3} \left(\frac{q^2}{\hbar c}\right) \left(\frac{B_0}{B_c}\right)^3 \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (7.47)$$

При $q = e$ получаем

$$W^{\text{tr}} \sim 3 \cdot 10^{-17} \left(\frac{B_0}{B_c}\right)^3 \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \text{ эрг}. \quad (7.48)$$

У поверхности пульсаров поле B_0 обычно оценивается значением 10^{12} Гс, но, возможно, в некоторых случаях оно на порядок выше. Таким образом, для пульсаров параметр B_0/B_c вполне может достигать значения 0,1. Что касается концентрации частиц вблизи пульсаров, то здесь оценки менее надежны. Ограничимся замечанием, что условие $B_0^2/8\pi > N\mathcal{E}$ (N — концентрация частиц с энергией $\mathcal{E}$), при котором давление поля преобладает, при $B_0 \sim 5 \cdot 10^{12}$ Гс и $\mathcal{E} \sim 10^9$ эВ $\sim 10^{-3}$ эрг соблюдается вплоть до концентрации $N \sim 10^{26}$ см $^{-3}$. Даже при $N \sim 10^{20}$ см $^{-3}$ полная мощность излучения составляет (при $B_0/B_c \sim 0,1$ и $\ln (\mathcal{E}/Mc^2) \sim 10$) для потока частиц Nc через площадь $S \sim 10^{12}$ см ^{2}

$$Q^r \sim NcSW^{\text{tr}} \sim 3 \cdot 10^{22} \text{ эрг/с}. \quad (7.49)$$

При тех же параметрах для движения поперек поля, согласно (7.35) с $q = e$,

$$Q^r \sim 10^{-10} NcS \text{ эрг/с} \sim 3 \cdot 10^{32} \text{ эрг/с}. \quad (7.50)$$

Мы не придаем этим оценкам никакого реалистического значения (в применении к пульсарам)*). Они свидетельствуют, однако, о том, что в физике пульсаров переходное излучение может оказаться существенным. В лаборатории также имеются известные перспективы создания условий, в которых параметры B_0/B_c и $\mathcal{E}/Mc^2$ достаточно велики, чтобы начали проявляться нелинейные явления в вакууме. Нужно при этом помнить, что переход-

*) Концентрация частиц в магнитосфере пульсаров сколько-нибудь надежно еще не установлена. Часто используется, однако, оценка $N \sim \sim \Omega B_0/4\pi c \sim 10^{12} - 10^{13}$ см $^{-3}$ (Ω — угловая скорость вращения нейтронной звезды, которая для большинства известных пульсаров не превосходит значения $\Omega \sim 200$ с $^{-1}$ [156]. Двойное лучепреломление особенно сильно сказывается на поляризации излучения (в частности, это относится к рентгеновскому излучению пульсаров) [157, 158]. Отметим также, что переходное излучение в вакууме возникает и при резком изменении магнитного поля во времени, например, при «звездотрясении» намагниченной нейтронной звезды.

ное излучение, понимаемое в широком смысле, вовсе не сводится к излучению при пересечении границы раздела, а имеет место всегда, если среда (или вакуум в сильном поле) неоднородна в пространстве и (или) во времени. Учесть эти эффекты, сохраняющиеся при $M \rightarrow \infty$, обычными квантовоэлектродинамическими методами весьма сложно, в силу чего и целесообразно частично использовать классическую теорию переходного излучения.

§ 7.3. Переходное рассеяние электромагнитных волн в вакууме при наличии сильного электромагнитного поля

1. Введение. Переходное рассеяние на покоящемся заряде. Переходное рассеяние является простейшим механизмом превращения волн одного типа в волны другого типа на заряде (или ином источнике поляризации среды), не требующим (что иногда весьма важно) изменений движения самого заряда. При этом переходный механизм рассеяния весьма универсален — важно лишь существование волны проницаемости. Последняя может быть, как мы видели выше, продуктом нелинейности среды, но может быть связана и с нелинейностью вакуума. Здесь мы обсудим процессы переходного рассеяния сильной электромагнитной волны в вакууме, как в отсутствие внешнего сильного магнитного поля, так и в присутствии магнитного поля [39]. Нелинейность вакуума описывается лагранжианом, который уже был использован выше (см. (7.2), (7.3)). Будем, простоты ради, считать рассеивающий заряд q неподвижным (закрепленным). Его электрическое поле без учета нелинейности вакуума можно записать в виде

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^q = -\frac{4\pi i q \mathbf{k}}{(2\pi)^3 k^2} \delta(\omega), \quad \mathbf{E}^q(\mathbf{r}) = \frac{q \mathbf{r}}{r^3}. \quad (7.51)$$

Пусть на этот заряд падает электромагнитная волна, поле которой, если она является когерентной и монохроматической, равно

$$\mathbf{E}^w = E_0 \mathbf{e} \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r} + \varphi_0), \quad \omega_0 = k_0 c, \quad |\mathbf{e}|^2 = 1, \quad (7.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^w = 1/2 E_0 \mathbf{e} [& \exp(-i\varphi_0) \delta(\omega - \omega_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \\ & + \exp(i\varphi_0) \delta(\omega + \omega_0) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)]. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Если падающие волны имеют широкий спектр, некоррелированы по фазам и неполяризованы, то

$$\langle E_{i, \omega, \mathbf{k}}^w E_{j, \omega', \mathbf{k}'}^w \rangle = 1/2 |E|_{\omega, \mathbf{k}}^2 (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (7.54)$$

$$|E|_{\omega, \mathbf{k}}^2 = 1/4 \{ |E|_{\mathbf{k}}^2 \delta(\omega - kc) + |E|_{-\mathbf{k}}^2 \delta(\omega + kc) \}. \quad (7.55)$$

Магнитное поле $\mathbf{B}^w$ и средняя во времени энергия волн для когерентного случая равны

$$\mathbf{B}^w = E_0 [\mathbf{n}_0 \mathbf{e}] \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r} + \varphi_0), \quad \mathbf{n}_0 = \mathbf{k}_0 / k_0, \quad (7.56)$$

$$\overline{W} = [(\mathbf{E}^w)^2 + (\mathbf{B}^w)^2] / 8\pi = E_0^2 / 8\pi. \quad (7.57)$$

Для некогерентного поля средняя энергия равна

$$\langle W \rangle = \int \frac{|E_{\mathbf{k}}|^2 d\mathbf{k}}{8\pi}. \quad (7.58)$$

Случайному квазимонохроматическому полю в (7.54), (7.55) соответствует

$$|E_{\mathbf{k}}|^2 = E_0^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \quad \langle W \rangle = E_0^2 / 8\pi. \quad (7.59)$$

Рассмотрим теперь процесс, при котором из падающей волны с частотой ω_0 образуется рассеянная волна с частотой $\omega(\mathbf{k}) \approx \approx 2\omega_0$ (для $p \approx p' \approx 0$; см. рис. 21; $\omega_0 \approx \omega_0$). На квантовом языке это соответствует поглощению двух квантов $\hbar\omega_0$ с излучением одного кванта с энергией $2\hbar\omega_0$. В случае широкого спектра речь идет об удвоении каждой из частот $\omega_0 = ck_0$. Полагая, что $(\mathbf{E}^w)^2 = (\mathbf{B}^w)^2$ и $\mathbf{E}^w \mathbf{B}^w = 0$ для обсуждаемого процесса, нужно в формулах (7.5), (7.6) для $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ сохранить члены, линейные по полю заряда $\mathbf{E}^q$ и квадратичные по полю волны $\mathbf{E}^w$:

$$\mathbf{P} = \kappa \{ 4(\mathbf{E}^q \mathbf{E}^w) \mathbf{E}^w + 7(\mathbf{E}^q \mathbf{B}^w) \mathbf{B}^w \}, \quad (7.60)$$

$$\mathbf{M} = \kappa \{ -4(\mathbf{E}^q \mathbf{E}^w) \mathbf{B}^w + 7(\mathbf{E}^q \mathbf{B}^w) \mathbf{E}^w \}. \quad (7.61)$$

Для волны (7.52), (7.53) отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^q = & \frac{1}{2} \kappa \{ 4\mathbf{e}(\mathbf{e} \mathbf{E}^q) + 7[\mathbf{n}_0 \mathbf{e}] (\mathbf{E}^q) \} \times \\ & \times [1 + \cos(2\omega_0 t - 2\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + 2\varphi_0)], \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^q = & \frac{1}{2} \kappa \{ -4[\mathbf{n}_0 \mathbf{e}] (\mathbf{e} \mathbf{E}^q) + 7\mathbf{e}([\mathbf{n}_0 \mathbf{e}] \mathbf{E}^q) \} \times \\ & \times [1 + \cos(2\omega_0 t - 2\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + 2\varphi_0)]. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Таким образом, поляризация и намагничение имеют осциллирующие члены с частотой $2\omega_0$ и волновым вектором $2\mathbf{k}_0$. Эти переменные поляризации и намагничения дают переходное рассеяние на заряде q . Интенсивность рассеяния легко найдется методом, изложенным в гл. 4, как мощность излучения тока с плотностью

$$\delta \mathbf{j}^q = c \operatorname{rot} \mathbf{M}^q + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}^q. \quad (7.64)$$

Мощность излучения для рассеянной волны (сумма по двум поляризациям) равна

$$Q^{\text{sc}} = \int_0^\pi Q^{\text{sc}}(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (7.65)$$

$$Q^{\text{sc}}(\theta) = (139\pi/8) E_0^4 \kappa^2 k_0^2 c q^2 \sin^2 \theta, \quad (7.66)$$

$$Q^{\text{sc}} = \frac{139}{48} \frac{q^2 \omega_0^2}{c} \left(\frac{\alpha}{45\pi} \right)^2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^4, \quad (7.67)$$

где E_c в системе СГС равна B_c , т. е.

$$E_c = 4,4 \cdot 10^{13} \text{ СГС} = 1,32 \cdot 10^{16} \text{ В/см}. \quad (7.68)$$

Результат (7.67) фактически совпадает с полученным в [159] на основе громоздкого квантовоэлектродинамического расчета (в [159] вычисления проведены и для области высоких частот ω).

Для произвольных немонохроматических волн компоненты Фурье плотности тока δj^q имеют вид (ср. с (6.162)):

$$\delta j_{i,\omega,\mathbf{k}}^q = \int \tilde{\Sigma}_{ijls}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0; \omega'_0, \mathbf{k}'_0) E_{l,\omega_0,\mathbf{k}_0} E_{s,\omega'_0,\mathbf{k}'_0} \times \\ \times E_{j,\omega-\omega_0-\omega'_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0-\mathbf{k}'_0} d\omega_0 d\omega'_0 d\mathbf{k}_0 d\mathbf{k}'_0, \quad (7.69)$$

где

$$\tilde{\Sigma}_{ijls}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0; \omega'_0, \mathbf{k}'_0) = 1/2 (\Sigma_{ijls}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0; \omega'_0, \mathbf{k}'_0) + \\ + \Sigma_{ijsl}(\omega, \mathbf{k}; \omega'_0, \mathbf{k}'_0; \omega_0, \mathbf{k}_0)), \quad (7.70)$$

$$\Sigma_{ijls}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0; \omega'_0, \mathbf{k}'_0) = -i\kappa \{ 4\delta_{js}(\delta_{il}\omega + e_{iq}k_q e_{rmi}k_{0m}/\omega_0) + \\ + 7e_{jq}s k'_{0q}(e_{ir}l\omega k_{0r}/\omega_0 - e_{ir}i k_r)/\omega'_0 \}, \quad (7.71)$$

где e_{qr} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга. Мощность излучения тока (7.69) на частоте $\omega = c(k_1 + k_2)$ для случайных волн, усредненная по фазам при помощи (7.54), (7.55), имеет вид

$$Q^{\text{sc}} = \int Q^{\text{sc}}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}'_0) (k_0 + k'_0)^2 c |E|_{\mathbf{k}_0}^2 |E|_{\mathbf{k}'_0}^2 d\mathbf{k}_0 d\mathbf{k}'_0, \quad (7.72)$$

где

$$Q^{\text{sc}}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}'_0) = \int d\Omega \frac{\pi}{16} q^2 \kappa^2 \frac{n'_s n'_s}{|n'|^4} (\delta_{ii'} - n_i n_{i'}) (\delta_{jj'} - n_j n_{j'}) \times \\ \times (\delta_{ll'} - n_{0l} n_{0l'}) \{ 4\delta_{ls} (\delta_{ij} + e_{iq} n_q e_{rmi} n_{0m}) + \\ + 4\delta_{js} (\delta_{il} + e_{iq} n_q e_{rmi} n'_{0m}) + 4e_{sq} l n'_{0q} e_{irj} (n_{0r} - n_r) + \\ + 4e_{sq} n_{0q} e_{irl} (n'_{0r} - n_r) \} \{ 4\delta_{l's'} (\delta_{i'j'} + e_{i'q'r'} n_{q'} e_{r'm'j'} n_{0m'}) + \\ + 4\delta_{j's'} (\delta_{i'l'} + e_{i'q'r'} n_{q'} e_{r'm'l'} n'_{0m'}) + 7e_{s'q'l'} n'_{0q'} e_{i'r'j'} (n_{0r'} - n_{r'}) + \\ + 4e_{s'q'j'} n_{0q'} e_{i'r'l'} (n'_{0r'} - n_{r'}) \}, \quad (7.73)$$

а $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}_0/k_0$, $\mathbf{n}'_0 = \mathbf{k}'_0/k'_0$; $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}'_0$ — волновые векторы рассеиваемых волн, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $d\Omega$ — телесный угол рассеянных волн; наконец,

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{n}_0 \frac{k_0}{k_0 + k'_0} - \mathbf{n}'_0 \frac{k'_0}{k_0 + k'_0}. \quad (7.74)$$

В случае квазимонохроматической случайной волны в (7.72), (7.73) следует подставить (7.59). Полученный результат совпадает с (7.67). Это значит, что результат (7.67) сохраняется для рассе-

ваемого пакета волн достаточно общего вида в случае, если его спектральная ширина мала ($\Delta\omega \ll \omega_0$), а полная плотность энергии равна $E_0^2/8\pi$. Последнее важно для возможного экспериментального подтверждения эффекта с помощью, например, рассеяния интенсивного лазерного излучения на массивных ионах.

В связи с нелинейностями вакуума больше всего обсуждалось рассеяние электромагнитной волны на покоящемся заряде (см. [150], § 128 и [160, 161]; иногда такой процесс называют дельбруксовским рассеянием). Этот эффект может быть рассмотрен с использованием нелинейных поляризаций $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$, если в кубических по полю членах, фигурирующих в (7.5), (7.6), два поля считать полем заряда E^q , а одно — полем волны E^w , т. е. полагать $P, M \propto (E^q)^2 E^w$. Подсчет интенсивности излучения рассеянных волн с помощью таких $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ приводит к интегралам, которые расходятся при больших значениях $\mathbf{k}_0$ (импульсах $\hbar\mathbf{k}_0$) поля рассеивающего заряда. Это свидетельствует о неприменимости для описания процесса лагранжиана L' , пригодного при условии $k_0 \ll m_e c/\hbar$. Оборвав интегрирование на $k_{0\max} \sim m_e c/\hbar$, получим правильную оценку мощности рассеяния (см. [150], формула (128.4)):

$$Q^r \sim \frac{\alpha^2 q^2 \omega_0^2}{c} \alpha \frac{q^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar \omega_0}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2. \quad (7.75)$$

Таким образом, дельбруксовское рассеяние, как и рассеяние $\omega \rightarrow 2\omega_0$, можно рассматривать как переходное рассеяние из-за нелинейности вакуума.

Если поле волны $E^w \sim E_0$ слабо (в том смысле, что $E_0 \ll E_c$), но

$$1 \gg \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 \gg \alpha^2 Z^2 \left(\frac{\hbar \omega_0}{Mc^2} \right)^2; \quad q^2 = Z^2 e^2, \quad (7.76)$$

то мощность рассеяния с удвоением частоты (7.67) превосходит мощность дельбруксовского рассеяния (7.75), происходящего без изменения частоты. Для достаточно низких частот условие (7.76) легко выполняется*). Существенно при этом, что мощность (7.67) корректно вычисляется на основе использования лагранжиана L' , поскольку играют роль длины порядка $2\pi/k_0 \ll \hbar/m_e c$. Заметим, что формулы (7.72), (7.73) описывают рассеяние в случае произвольного частотного и углового распределения рассеиваемых волн. Так, например, в случае стоячей волны

$$|E|_k^2 = \frac{1}{2} E_0^2 \{ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \} \quad (7.77)$$

*) Заметим, что оценку (7.75) можно получить из (7.67), положив в одном из множителей $(E_0/E_c)^2$ в (7.76) поле E_0 равным полю заряда q на расстоянии $r_c \sim \hbar/Mc$ от центра (тогда $(E_0/E_c)^2 \sim q^2 \alpha / \hbar c$), и учесть, что размер площади, ответственный за рассеяние, в $(r_c/\lambda_0)^2 \sim (\hbar \omega_0 / Mc^2)^2$ раз меньше. Так качественно получается два малых множителя в (7.75).

из (7.72), (7.73) получаем

$$Q^{\text{sc}} = \int_0^\pi Q^{\text{sc}}(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (7.78)$$

$$Q^{\text{sc}}(\theta) = \frac{260 + 139 \cos^2 \theta}{16} E_0^4 q^2 \kappa^2 k_0^2 c \pi \sin^2 \theta, \quad (7.79)$$

$$Q^{\text{sc}} = \frac{283}{80} \frac{q^2 \omega_0^2}{c} \left(\frac{\alpha}{45\pi} \right)^2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^4. \quad (7.80)$$

2. Переходное рассеяние на ультрарелятивистском заряде. Интенсивность рассеяния на движущемся и, в частности, ультрарелятивистском заряде получается простым перерасчетом из (7.67), (7.80). Интегральную интенсивность можно вычислить, используя соображения, изложенные, например, в [162], § 73. Что касается спектрального и углового распределения, то его можно получить изложенным выше методом, используя для E^q поле движущегося заряда. Наибольшие частоты излучаются в случае, когда частица и волна движутся навстречу друг другу:

$$\mathbf{v} = -v\mathbf{n}_0, \quad \omega = \frac{2\omega_0(1+v/c)}{1+n_0 v/c}. \quad (7.81)$$

Максимальная частота (7.81) излучается в направлении движения частицы ($\mathbf{n} = -\mathbf{n}_0$). При $v \rightarrow c$

$$\omega_{\text{max}} \approx 8\omega_0(\mathcal{E}/Mc^2)^2. \quad (7.82)$$

Интенсивность рассеяния когерентной или квазимонохроматической случайной волны определяется соотношением

$$Q^{\text{sc}}(\theta) = \frac{139}{128\pi} \frac{q^2 \omega_0^2}{c} \left(\frac{\alpha}{45\pi} \right)^2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^4 \frac{(1+v/c)^4 \sin^2 \theta}{[1+(v/c) \cos \theta]^5}. \quad (7.83)$$

Здесь E_0 — амплитуда поля волны в системе отсчета, в которой частица имеет скорость v , θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$ или $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{v}$. Максимум интенсивности рассеяния приходится на направления, близкие к скоростям частицы ($\theta \sim Mc^2/\mathcal{E} = \sqrt{1-v^2/c^2}$), а интегральная интенсивность рассеяния равна (при $v \rightarrow c$)

$$Q^{\text{sc}} = \int_0^\pi Q^{\text{sc}}(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = 139 \frac{q^2 \omega_0^2}{3c} \left(\frac{\alpha}{45\pi} \right)^2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^4 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^6. \quad (7.84)$$

Обращает на себя внимание сильная зависимость интенсивности рассеяния от энергии частицы.

3. Переходное рассеяние на заряде в сильном магнитном поле. Остановимся еще на одном нелинейном эффекте в вакууме — на рассеянии волны на заряде q при наличии сильного магнитного поля $\mathbf{B}_0$. Будем вначале считать заряд покоящимся и рассмотрим процесс рассеяния, когда частота рассеянной волны равна ча-

стоте падающей. В этом случае

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^w + \mathbf{E}^q, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}^w, \quad (7.85)$$

где $\mathbf{E}^q$, $\mathbf{E}^w$ и $\mathbf{B}^w$ определяются выражениями (7.51)–(7.53) и (7.56). Считая поле заряда слабым, учтем в поляризации $\mathbf{P}$ и намагниченности $\mathbf{M}$, описываемых (7.5), (7.6), члены, линейные по $\mathbf{E}^q$. В оставшихся квадратичных выражениях по полям $\mathbf{E}^w$, $\mathbf{B}^w$ и $\mathbf{B}_0$ члены порядка B_0^2 и $(E^w)^2$ описывают два типа процессов, уже обсуждавшихся выше, а интересующий нас здесь процесс описывается членами порядка $B_0 E^w$ и $B_0 B^w$. Эти части поляризации и намагниченности имеют вид

$$\delta \mathbf{P} = \kappa \{ -4\mathbf{E}^q(\mathbf{B}_0 \mathbf{B}^w) + 7\mathbf{B}^w(\mathbf{B}_0 \mathbf{E}^q) + 7\mathbf{B}_0(\mathbf{E}^q \mathbf{B}^w) \}, \quad (7.86)$$

$$\delta \mathbf{M} = \kappa \{ -4\mathbf{B}_0(\mathbf{E}^q \mathbf{E}^w) + 7\mathbf{E}^w(\mathbf{E}^q \mathbf{B}_0) + 7\mathbf{E}^q(\mathbf{E}^w \mathbf{B}_0) \}. \quad (7.87)$$

Приведем здесь окончательную формулу для интенсивности рассеяния волны, распространяющейся по направлению магнитного поля $\mathbf{B}_0$ ($\mathbf{k}_0 = k_0 \mathbf{B}_0 / B_0$):

$$Q^{\text{sc}} = \frac{256\pi^2}{3} \omega_0^2 q^2 \kappa^2 B_0^2 E_0^2 = \frac{16}{3} \left(\frac{\alpha}{45\pi} \right)^2 \frac{\omega_0^2 q^2}{c} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^2. \quad (7.88)$$

Для ультрарелятивистских частиц, движущихся навстречу волне по магнитному полю, получаем

$$Q^{\text{sc}} = \frac{128}{3} \left(\frac{\alpha}{45\pi} \right)^2 \frac{\omega_0^2 q^2}{c} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^2 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^4. \quad (7.89)$$

Максимальная частота излучается в направлении, близком к скорости частицы, и равна

$$\omega_{\text{max}} \approx 4\omega_0 (\mathcal{E}/Mc^2)^2. \quad (7.90)$$

Подчеркнем, что формулы (7.88) и (7.89) не содержат интегрирования по большим k и поэтому в рамках сделанных предположений являются точными.

Возможно, пульсары ускоряют ионы до $\mathcal{E}/Mc^2 \sim 10^6$. Тогда обсуждаемое рассеяние с мощностью (7.89) может представить интерес. Однако оценки для реалистических моделей пульсаров мы здесь проводить не будем.

4. О переходном тормозном излучении в вакууме в сильных полях. Не вдаваясь в детали, мы здесь отметим лишь те процессы переходного тормозного излучения, которые могут возникнуть в вакууме в сильных полях. Будем считать, что имеется две сталкивающиеся частицы с зарядами q_α и q_β , имеющие скорости v_α и v_β . Изменениями траекторий частиц в процессе столкновения пренебрегаем; каждая из частиц создает свое собственное поле $\mathbf{E}^{q_\alpha}$ и $\mathbf{E}^{q_\beta}$. Поскольку нелинейность вакуума кубическая, то возможны процессы излучения, аналогичные дельбрукскому рассеянию, когда в качестве рассеиваемой волны служит виртуальная «волна», создаваемая собственным полем другой

сталкивающейся частицы. Нелинейные поляризуемости при этом пропорциональны $(E^{q\alpha})^2 E^{q\beta}$ или $(E^{q\beta})^2 E^{q\alpha}$. Другая ситуация возникает при наличии сильного магнитного поля B_0 . Тогда возможен процесс переходного тормозного излучения, в котором нелинейная поляризуемость пропорциональна $B_0 E^{q\alpha} E^{q\beta}$. Такой процесс тормозного излучения сходен с тем, который рассматривался в гл. 5. Наконец, переходное тормозное излучение может

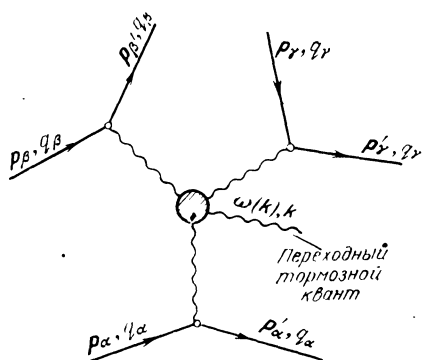


Рис. 22. Схематическое изображение переходного тормозного излучения при столкновении трех частиц в вакууме. В квазиклассическом пределе ($\hbar\omega \ll \mathcal{E}_{\alpha, \beta, \gamma}$) траектории частиц практически не меняются.

происходить в вакууме при тройных столкновениях частиц (рис. 22), когда нелинейная поляризуемость пропорциональна каждому из полей $E^{q\alpha}$, $E^{q\beta}$, $E^{q\gamma}$.

§ 7.4. Переходное рассеяние в вакууме гравитационных волн с их превращением в электромагнитные волны

1. Переходное рассеяние на заряде. Перейдем к рассмотрению переходного рассеяния гравитационных волн в электромагнитные. Понять необходимость возникновения переходного рассеяния гравитационных волн с их превращением в электромагнитные можно хотя бы из того, что при наличии гравитационного поля уравнения Максвелла становятся нелинейными относительно обеих полей или, если говорить только об электромагнитном поле, то линейные относительно этого поля уравнения зависят от g_{ik} . Конкретно, уравнение для тензора поля F^{ik} , возбуждаемого током $j^{q, i}$ в присутствии гравитационного поля, имеет, как известно (см., например, [162]), вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^h} \sqrt{-g} F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^{q, i}, \quad (7.91)$$

где $g = |g_{ik}|$ — определитель метрического тензора g_{ik} , описывающего гравитационное поле.

Уравнение (7.91) можно записать в виде макроскопических уравнений Максвелла, в которых тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости определяются гравитационным полем

(см. [162], § 90). Однако уже из (7.91) ясно, что модуляция метрики, возникающая, например, при распространении гравитационной волны, должна повлечь за собой излучение электромагнитных волн даже в случае статического невозмущенного электромагнитного поля (например, поля покоящегося заряда). Это можно и строго описать как модуляцию эффективной диэлектрической проницаемости гравитационной волной *). Отметим, что если в среде имело смысл отдельно рассматривать рассеяние на покоящемся и движущемся зарядах, поскольку существовала выделенная система отсчета, а именно система отсчета, в которой среда покоится, то в вакууме все системы в широких пределах равноправны. Поэтому можно, не нарушая общности, ограничиться рассмотрением рассеяния на покоящемся заряде (или другом статическом источнике). Правда для более сложных невозмущенных полей (например, создаваемых двумя зарядами) это уже не верно. Мы начнем здесь с обсуждения простейшего случая статического поля покоящегося заряда (более подробно о рассеянии на других источниках: диполях, магнитных и электрических, см. п. 2 настоящего параграфа, [41], а также [163—165]).

Если гравитационная волна является слабой, то она может быть описана следующим возмущением метрики:

$$h^{il} = g^{il} - g_0^{il} = \sum_{\delta=1,2} e_{\delta}^{il} h_0 \sin(\omega_0 t - k_0 z); \quad k_0 = \omega_0/c, \quad (7.92)$$

где g_0^{il} — невозмущенная метрика:

$$g_0^{il} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.93)$$

и $\delta = 1, 2$ соответствует двум поляризациям гравитационной волны:

$$e_1^{il} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2^{il} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i, l = 1, 2, \quad (7.94)$$

$$e_{1\cdot}^{il} = e_{2\cdot}^{il} = 0, \quad i, l = 0, 3.$$

Считая, что $h_0 \ll 1$, возмущение электромагнитного поля, связанное с действием гравитационной волны, можно записать как дополнительный ток $\delta \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}$ в уравнениях Максвелла:

$$\left(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2 \varepsilon_{ij}^{(0)}}{c^2} \right) E_{j, \omega, \mathbf{k}} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} (j_{i, \omega, \mathbf{k}}^q + \delta j_{i, \omega, \mathbf{k}}), \quad (7.95)$$

*) Сказанное не представляется, видимо, достаточно широко известным, как это ясно на примере работы [164], в которой рассмотрено излучение электромагнитных волн и появление магнитного момента в случае неподвижного заряда, находящегося в центре инерции двух одинаковых вращающихся масс. При этом в [164] упомянутые эффекты (излучение и появление момента) считаются не имеющими классических аналогов, между тем как речь идет о типичных аналогах переходного рассеяния в среде [41].

где компоненты дополнительного тока как функции **Е** и **В** равны

$$\delta j_x = -\frac{c}{4\pi} \left\{ -\frac{\partial}{\partial z} h(B_x - B_y) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^{(0)} h(E_x + E_y) \right\}, \quad (7.96)$$

$$\delta j_y = -\frac{c}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} h(B_x - B_y) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^{(0)} h(E_x - E_y) \right\}, \quad (7.97)$$

$$\delta j_z = -\frac{c}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} h(B_x - B_y) - \frac{\partial}{\partial y} h(B_x + B_y) \right\} \quad (7.98)$$

и $h = h_0 \sin(\omega_0 t - k_0 z)$. Простоты ради здесь считается, что тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ среды для частоты, близкой к ω_0 , соответствует изотропному случаю и отсутствию пространственной дисперсии. В (7.96)–(7.98) магнитная индукция $\mathbf{B}_{\omega, \mathbf{k}}$ может быть выражена через напряженность электрического поля $\omega \mathbf{B}_{\omega, \mathbf{k}} = c [\mathbf{k} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}]$. Компоненты плотности тока (7.96)–(7.98) можно записать в виде

$$\frac{4\pi i \omega}{c^2} \delta j_{i, \omega, \mathbf{k}} = \frac{\omega^2}{c^2} \int \varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) h_{\omega_0, \mathbf{k}_0} E_{j, \omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0} d\omega_0 d\mathbf{k}_0. \quad (7.99)$$

Из этого выражения уже видно полное соответствие рассматриваемого эффекта переходному рассеянию (см. (4.56)). Выписывать здесь конкретных выражений для $\varepsilon_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$ мы не будем,

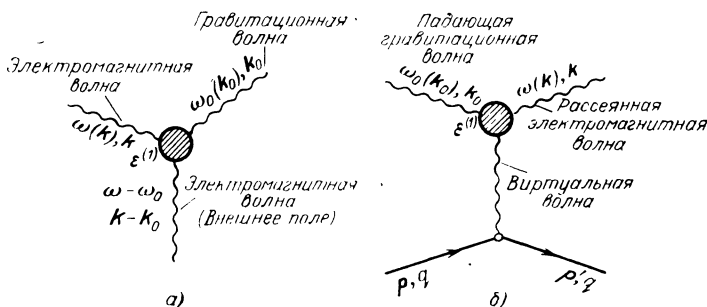


Рис. 23. а) Схематическое изображение взаимодействия гравитационных и электромагнитных полей; б) рассеяние гравитационной волны в электромагнитную на заряде.

они легко находятся из (7.96)–(7.99). Отметим лишь, что нелинейность, задаваемую соотношением (7.99), можно графически изобразить как вершину, описывающую превращение двух электромагнитных полей в гравитационное (рис. 23, а).

Приведем сразу выражение для мощности электромагнитной волны при рассеянии гравитационной волны на покоящемся заряде, усредненное по двум возможным поляризациям гравитаци-

онной волны [41]:

$$Q^{\text{sc}} = \frac{q^2 \omega_0^2 h_0^2}{4c} \int_0^\pi \sin^3 \theta (1 + \cos^2 \theta) (\epsilon^{(0)}(\omega_0))^{3/2} d\theta \times \\ \times \left[\left(\cos \theta - 1 / \sqrt{\epsilon^{(0)}(\omega_0)} \right)^2 + \sin^2 \theta + \omega_{\text{pe}}^2 c^2 / (v_{\text{Te}}^2 \omega_0^2 \epsilon^{(0)}(\omega_0)) \right]^{-2}. \quad (7.100)$$

Здесь учтена экранировка поля заряда, возникающая, если он помещен в плазму (в вакууме $\epsilon^{(0)} = 1$). Однако эта экранировка сказывается только в подлогарифмическом выражении для полного сечения рассеяния. Так, в вакууме

$$Q^{\text{sc}} = \frac{q^2 \omega_0^2}{c} h_0^2 \ln \Lambda_g, \quad (7.101)$$

где

$$\ln \Lambda_g = \ln \frac{2}{\theta_{\min}^2} - \frac{5}{4} \approx \ln \frac{0.87}{\theta_{\min}^2}. \quad (7.102)$$

Для экранировки в плазме $\theta_{\min}^2 = \omega_{\text{pe}}^2 c^2 / \omega_0^2 v_{\text{Te}}^2 \epsilon^{(0)}(\omega_0)$ (при условии, что $\omega \gg c \omega_{\text{pe}} / v_{\text{Te}} \sqrt{\epsilon^{(0)}(\omega_0)}$).

В вакууме значение $\theta_{\min}$ может определяться расстоянием до других частиц (рассеивателей) или кривизной пространства-времени, вызванной присутствием гравитационной волны. В последнем случае, видимо, $\theta_{\min}^2 \sim h^2$.

Выразив h^2 через средний по времени поток энергии гравитационных волн $F_g = c^3 \omega_0^2 h_0^2 / 16\pi G$ и учитывая, что $Q^{\text{sc}} = \sigma_g F_g$, можно получить сечение рассеяния в виде [41]

$$\sigma_g = \frac{4\pi G q^2}{c^4} \ln \Lambda_g. \quad (7.103)$$

Это сечение может быть выражено через известную квантовую гравитационную длину l_g ($l_g = \sqrt{G\hbar/c^3} = 1,6 \cdot 10^{-33}$ см):

$$\sigma = 4\pi l_g^2 \frac{q^2}{\hbar c} \ln \Lambda_g. \quad (7.104)$$

Ясно, что рассматриваемый процесс является чисто классическим. Процесс, противоположный рассматриваемому (превращение электромагнитной волны в гравитационную), рассматривался в [165] методом S -матрицы (см. также [166, 167]). Однако для классического эффекта использование сложных квантовых методов является в данном случае излишним. Отличие обратного процесса от рассмотренного здесь состоит в различии начального и конечного состояний и в деталях суммирования по поляризациям рассеянных волн. Поскольку рассеянные волны в первом случае являются электромагнитными, а во втором — гравитационными, то результаты отличаются на численные множители порядка единицы.

2. Переходное рассеяние на магнитном и электрическом диполях. Рассмотрим, далее, процесс переходного рассеяния гравитационных волн на магнитном диполе. Поле магнитного диполя равно (см. (3.246)) *)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{mr}) - m\mathbf{r}^2}{r^5} + 4\pi\mathbf{m}\delta(\mathbf{r}), \\ \mathbf{B}_{\omega,\mathbf{k}} &= \frac{1}{2\pi^2} \left(\mathbf{m} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{km})}{k^2} \right) \delta(\omega). \end{aligned} \quad (7.105)$$

Подстановка (7.105) в (7.96)–(7.98) позволяет найти $\delta\mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}$ и дает следующее выражение для мощности переходного рассеяния гравитационных волн в электромагнитные:

$$Q^{\text{sc}} = \int_0^\pi Q^{\text{sc}}(\theta) \sin\theta \, 2\pi \, d\theta, \quad (7.106)$$

$$Q^{\text{sc}}(\theta) = \frac{\omega_0^4 h_0^2 m^2}{16\pi c^3} (1 + \cos^2\theta) \left[\cos^2\theta_0 \sin^2\theta + \frac{1}{2} \sin^2\theta_0 (5 + \cos^2\theta) \right], \quad (7.107)$$

где θ_0 — угол между $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{m}$. Интегрируя по углу θ , получаем

$$Q^{\text{sc}} = \frac{\omega_0^4 h_0^2 m^2}{5c^3} \left(1 + \frac{7}{2} \sin^2\theta_0 \right). \quad (7.108)$$

Если не учитывать член $4\pi\mathbf{m}\delta(\mathbf{r})$ в (7.105) (т. е. считать, что магнитный диполь составлен из двух магнитных зарядов), то в (7.107) множитель $(5 + \cos^2\theta)$ в квадратных скобках следует заменить на $(1 + \cos^2\theta)$, а в (7.108) вместо $1/5(1 + 7/2 \sin^2\theta_0)$ следует подставить $1/5(1 + 1/6 \sin^2\theta_0)$ (см. [163, 41], где последние факторы записаны в виде $9/10(1 - 7/9 \cos^2\theta_0)$ и $7/30(1 - 1/7 \cos^2\theta_0)$). Этот тип конверсии гравитационных волн в электромагнитные мог бы в принципе представить интерес в применении к пульсарам, обладающим большим магнитным дипольным моментом. Однако соответствующие эффекты малы ввиду слабости гравитационного взаимодействия, ввиду относительно небольшой величины вариации метрики h_0 в гравитационных волнах (которые могли бы по разумным оценкам существовать в космосе вблизи пульсаров) и удаленности пульсаров от Земли.

Для случая падения гравитационной волны на покоящийся электрический дипольный момент также легко найти мощность

*) Выражение, не содержащее $\delta(\mathbf{r})$, пригодно только вдали от диполя или в случае, когда магнитный диполь составлен из двух магнитных зарядов (см. § 3.6, п. 3).

излучения электромагнитных волн [41]:

$$Q^{\text{sc}} = \int_0^\pi Q^{\text{sc}}(\theta) \sin \theta \, 2\pi \, d\theta, \quad (7.109)$$

$$Q^{\text{sc}}(\theta) = \frac{\omega_0^4 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}}{4\pi c^3} p^2 h_0^2 \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) \left| \frac{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)} \right|^2 \times \\ \times \frac{(\cos \theta - 1/\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)})^2 \cos^2 \theta_0 + 1/2 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \theta}{[(\cos \theta - 1/\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)})^2 + \sin^2 \theta]^2}, \quad (7.110)$$

где θ_0 — угол $\mathbf{p}$ с осью z (гравитационная волна распространяется вдоль z). В вакууме имеет место $\varepsilon(\omega_0) = \varepsilon(0) = 1$. Тогда из (7.110) получаем

$$Q^{\text{sc}}(\theta) = \frac{\omega_0^4 p^2 h_0^2}{16\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta) (\sin^2 \theta \cos^2 \theta_0 + 1/2 \sin^2 \theta_0 (1 + \cos^2 \theta)), \quad (7.111)$$

где опущен исчезающий при интегрировании по θ (см. (7.109)) член, пропорциональный $\cos \theta$. Следовательно,

$$Q^{\text{sc}} = \frac{\omega_0^4 p^2 h_0^2}{5c^3} \left(1 + \frac{1}{6} \sin^2 \theta_0 \right). \quad (7.112)$$

Мощность рассеяния Q^{sc} на электрическом диполе может быть получена из мощности рассеяния на магнитном диполе, только

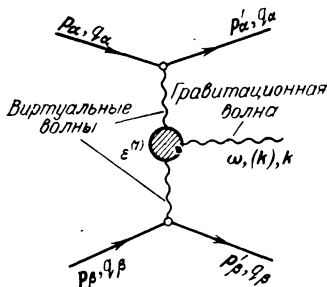


Рис. 24. Переходное тормозное излучение гравитационных волн.

если считать, что магнитный диполь составлен из двух магнитных зарядов.

Хотя эффект рассеяния гравитационных волн в электромагнитных на зарядах и диполях является достаточно слабым, стоит обратить внимание на то, что этот эффект увеличивается, если значение статической диэлектрической проницаемости среды, в которой происходит рассеяние, мало (например, $\varepsilon^{(0)}(0) \rightarrow 0$).

3. О переходном тормозном излучении гравитационных волн. Очевидно, что излучение гравитационных волн возможно также

при столкновении двух частиц с зарядами q_α и q_β , причем, как и выше, траектории частиц в процессе их столкновения можно считать практически не меняющимися. Наличие взаимодействия, изображенного на рис. 23, *a*, приводит к возможности реализации процесса переходного тормозного излучения гравитационных волн, показанного на рис. 24. Непосредственный расчет этого эффекта при помощи нелинейного тока (7.99), естественно, невозможен. Соответствующий эффект проще всего описывается, если найти в уравнении для гравитационных волн нелинейный член, пропорциональный $E^{\alpha\alpha} E^{\beta\beta}$, который и будет служить эффективным источником для возбуждения гравитационных волн.

ГЛАВА 8

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

§ 8.1. О некоторых астрофизических приложениях теории

1. Введение. Трансформация плазменных (продольных) волн в поперечные в процессах переходного рассеяния и проблема спорадического радиоизлучения Солнца. О ряде возможных астрофизических приложений теории переходного излучения, рассеяния и тормозного излучения уже упоминалось выше. Здесь мы кратко укажем на некоторые другие астрофизические применения теории (подробное изложение этих вопросов выходит за рамки настоящей книги).

Имея в виду астрофизические приложения рассмотренных теоретических вопросов, нужно отметить, во-первых, что речь идет о процессах в космической плазме, параметры которой могут варьировать в довольно широких пределах. Во-вторых, обычно в космической плазме имеются ультрарелятивистские частицы — космические лучи. Наконец, в-третьих, даже вся плазма может быть ультрарелятивистской (например, если температура электронов удовлетворяет неравенству $T_e \gg m_e c^2$). Так, по-видимому, околопульсарное пространство заполнено ультрарелятивистской плазмой, находящейся в очень сильном магнитном поле. В предыдущем изложении особый акцент делался на рассмотрении процессов излучения ультрарелятивистских частиц и, в частности, в плазме. Эти результаты, в принципе, могли бы быть использованы в различных моделях астрофизических явлений.

Вопрос о трансформации продольных плазменных волн в поперечные электромагнитные волны применительно к проблемам спорадического радиоизлучения Солнца обсуждался еще в [168] (см. также [169]). При этом внимание обращалось на так называемые всплески III типа, генерируемые пучками быстрых электронов при их прохождении через солнечную атмосферу. Такие пучки, согласно [168], генерируют продольные ленгмюровские волны из-за неустойчивости, обусловленной индуцированным излучением В.—Ч. таких волн; затем эти волны трансформируются в электромагнитные с частотами, близкими к локальной плазменной частоте. В [168] для расчета процесса такой трансформации

использовалось сечение томсоновского рассеяния на электронах; рассмотренный в [168] процесс — это спонтанное рассеяние. Дальнейшее развитие этих представлений касалось как некоторого уточнения сечения рассеяния, так и учета процессов индуцированного рассеяния. Основным механизмом трансформации ленгмюровских волн в электромагнитные в данном случае (см. гл. 6) является переходное рассеяние на ионах плазмы. Сечение такого рассеяния, как было подробно сказано в гл. 6 (см. (6.94), (6.83)), достаточно близко к томсоновскому сечению рассеяния на электронах (если $F_0 \sim 1$). Для изотермической водородной плазмы ($Z = 1$, $q = e$, $T_e = T_i$, $F_0 = 1/2$) сечение рассеяния на ионах в четыре раза меньше томсоновского сечения рассеяния. Таким образом, оценка работы [168] дает правильный порядок величины эффекта спонтанного рассеяния. В дальнейшем было выяснено (см., например, обзор [170]), что существует много источников на Солнце, вызывающих возбуждение интенсивных ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний плазмы. Сейчас механизм конверсии, связанной с переходным рассеянием ленгмюровских и других плазменных волн на ионах, привлекается для объяснения многих явлений, приводящих к спорадическому радиоизлучению Солнца. Что касается процессов индуцированного переходного рассеяния, то они обсуждаются применительно к солнечному радиоизлучению, начиная с работы [171] (см. также [172—175]).

Наряду с индуцированным рассеянием ленгмюровских волн в электромагнитные идет и процесс индуцированного рассеяния ленгмюровских волн в ленгмюровские же, но с другим значением волнового числа (естественно, идет и процесс спонтанного рассеяния ленгмюровских волн в ленгмюровские). Для анализа процессов индуцированного рассеяния необходимо одновременно учитывать как процесс рассеяния ленгмюровских волн в электромагнитные, так и процесс рассеяния ленгмюровских волн в ленгмюровские. Поскольку даже небольшое изменение частоты ленгмюровских волн может существенно изменять их волновое число, а следовательно, и их фазовую скорость, рассеяние ленгмюровских волн в ленгмюровские же может эффективно отводить колебания, возбуждаемые пучком из области резонанса (которая, грубо говоря, определяется равенством скорости пучка фазовой скорости волн). Таким образом, индуцированное рассеяние ленгмюровских волн в ленгмюровские уменьшает воздействие волн, возбужденных пучком, на сам пучок и способствует его прохождению через атмосферу Солнца (увеличивает длину релаксации). Этот эффект получил название нелинейной стабилизации пучковой неустойчивости [172] (об его экспериментальной проверке см. [173]). Привлечение эффекта стабилизации, по-видимому, необходимо для объяснения наблюдений всплесков III типа на Солнце, так как наблюдаемая длина релаксации пучка, вызывающего такой всплеск, намного порядков больше длины релаксации, получаемой без учета эффекта стабилизации [171] (о дру-

гих моделях стабилизации, обязанных квазилинейным эффектам и неоднородности плазмы см. [174—176]). В последнее время было выполнено большое число работ по проблеме стабилизации пучков, генерирующих всплески III типа, модуляционной неустойчивостью [170, 177—181]. Нужно сказать, что индуцированное переходное рассеяние на ионах с ростом интенсивности ленгмюровских колебаний непрерывным образом переходит в модуляционную неустойчивость [73] (происходит это в случае, когда инкремент индуцированного рассеяния сравнивается с разностью частот рассеянной и рассеиваемой волны). Поэтому, собственно, можно сказать, что речь идет об одном и том же нелинейном механизме стабилизации пучков, который в пределе относительно малых интенсивностей волн совпадает с процессом индуцированного переходного рассеяния, а в пределе достаточно больших интенсивностей волн совпадает с эффектом модуляционной неустойчивости (о модуляционной неустойчивости см. гл. 6 и [182]).

Решить вопрос о том, что превалирует конкретно для пучков, образующих всплески III типа на Солнце, можно было бы, используя результаты наблюдений. Речь фактически идет о сравнении трех процессов, а именно, обратного воздействия возбужденных колебаний на пучок (квазилинейной релаксации [73]), индуцированного переходного рассеяния на ионах и модуляционной неустойчивости. Исследования [183] показывают, что первые два процесса имеют одинаковый порядок величины, то же можно сказать о сравнении двух последних процессов [177—181]. Таким образом, все три процесса оказываются одинакового порядка или, другими словами, пучки имеют параметры, соответствующие условиям, близким к порогу процесса переходного рассеяния и модуляционной неустойчивости. По-видимому, последнее не удивительно и как раз соответствует тому, чего можно было бы ожидать, если нелинейный процесс достаточно эффективен. Тогда система плазма — пучок сама подстраивается (релаксирует) так, чтобы ее параметры соответствовали порогу нелинейного процесса. Пучки же с начальными параметрами, для которых такая подстройка невозможна (например, с малыми скоростями), имеют малую длину пробега и мы их «не видим» в виде радиоизлучения пучков, проходящих через всю солнечную атмосферу. Конечно, всплески III типа на Солнце — не единственный пример, указывающий на роль переходного рассеяния в процессах солнечного радиоизлучения. Фактически переходное рассеяние на ионах определяет излучение от любых интенсивных плазменных волн, возбужденных в солнечной атмосфере (например, циклотронных волн в сильном магнитном поле). В слабом магнитном поле ($\omega_{\text{He}} \ll \omega_{\text{pe}}$) излучение на плазменной частоте ω_{pe} в основном связано с переходным рассеянием (возможны и процессы слияния ленгмюровских волн с низкочастотными [73]). Быстрые частицы могут давать рассеянное излучение на частотах $\omega \gg \omega_{\text{pe}}$.

2. Переходное рассеяние ультрарелятивистских ионов в космической плазме. Для ультрарелятивистских электронов космических лучей переходное рассеяние плазменных колебаний на них обычно мало по сравнению с томсоновским рассеянием тех же колебаний. Однако для ядерной компоненты космических лучей обычное рассеяние мало и переходное рассеяние может быть доминирующим процессом. Процессы, приводящие к радиоизлучению ядерной компоненты космических лучей, могут быть связаны как с наличием в космической плазме случайных неоднородностей концентрации, так и с наличием случайных магнитных неоднородностей. И те и другие наблюдаются и измеряются в околоземном космическом пространстве. Обычно при этом чаще всего исследуются крупномасштабные неоднородности. Для переходного рассеяния наиболее эффективны, однако, мелкомасштабные неоднородности (с размерами порядка дебаевского радиуса v_{Te}/ω_{pe} или с размерами порядка c/ω_{pe}). Вместе с тем, не исключено наличие в плазме таких мелкомасштабных неоднородностей (как неоднородностей концентрации, так и магнитных неоднородностей), тем более, что условия для их возбуждения часто выполняются. Измерение радиоизлучения ядерной компоненты космических лучей имело бы важное значение, так как явилось бы непосредственным индикатором их присутствия в том или ином радиоисточнике. Однако спектр радиоизлучения для распределения вида $f_{\mathcal{E}} \propto \mathcal{E}^{-\gamma}$ должен быть довольно крутым — для $\gamma = 2,7$ имеем $Q^r(\omega) \propto \omega^{-2,85}$ для переходного рассеяния на неоднородностях концентрации и $Q^r(\omega) \propto \omega^{-4}$ для рассеяния на магнитных неоднородностях. Поэтому наблюдать радиоизлучение космических ионов можно было бы только в низкочастотной области спектра, так как спектр радиоизлучения электронов космических лучей является значительно менее крутым (примерно $Q^r(\omega) \propto \omega^{-1}$).

Хотя концентрация ядерной компоненты космических лучей на несколько порядков выше концентрации электронной компоненты космических лучей, быстрое падение с частотой спектра радиоизлучения ядерной компоненты приводит к тому, что доминирующим при высоких частотах будет излучение электронной компоненты. Поэтому наибольший интерес представляет с этой точки зрения выявление таких условий, когда излучение электронной компоненты космических лучей подавлено. Синхротронное излучение электронов космических лучей для низких частот подавляется эффектом плотности [108—110] (подавление имеет место при $\omega < 0,3\omega_{pe}^2/\omega_{He}$; см. [1], гл. 6 п [127]). Однако электроны космических лучей рассеиваются также на тех же мелкомасштабных неоднородностях, которые могут приводить к радиоизлучению ионной компоненты космических лучей, причем эффект плотности при рассеянии на неоднородностях концентрации отсутствует, а при рассеянии на магнитных неоднородностях эффект плотности не подавляет полностью излучения электронов, а только видоизменяет его спектр. Это возникает при $\mathcal{E}/Mc^2 \ll \omega_{pe}L_0/c$, где L_0 — характерный масштаб магнитных неоднородностей (см.

(6.160)). Поэтому, хотя укручение спектра ряда радиоисточников в области низких частот действительно наблюдается [144], выделение эффекта радиоизлучения ядерной компоненты космических лучей представляет собой до сих пор сложную задачу.

3. Об излучении пульсаров. Околопульсарное пространство заполнено, по-видимому, ультрарелятивистской электронно-позитронной плазмой. Сейчас известны разнообразные неустойчивости такой плазмы (см. [127, 184—186]). Они могут приводить к возникновению как неоднородностей концентрации, так и магнитных неоднородностей. Переходное рассеяние на неоднородностях концентрации в электронно-позитронной плазме мы уже обсуждали выше (см. (6.165)). Стоит только подчеркнуть, что в отношении использования (6.165) в настоящее время нужно ограничиваться лишь грубыми оценками. Согласно [184, 185] (см. также [127]) в околопульсарной плазме должны возбуждаться довольно интенсивные колебания как из-за неустойчивости ленгмюровских волн, так и из-за циклотронной неустойчивости. Ленгмюровские волны создают флуктуации концентрации, а альфвеновские волны, возбуждаемые из-за циклотронной неустойчивости, — флуктуации магнитных полей. При этом, согласно [184, 185] самосогласованная теория распределения таких флуктуаций дает не только их интенсивность (уровень энергии) и распределение частиц (электронов и позитронов), но и позволяет объяснить ряд характерных черт спектра рентгеновского и γ -излучения как самого пульсара (например, пульсара в Крабовидной туманности), так и спектра излучения туманности (в данном примере Крабовидной туманности). Таким образом, наличие таких интенсивных флуктуаций концентрации и флуктуаций магнитных полей, можно сказать, косвенно подтверждается наблюдениями.

Однако при конкретном применении формулы (6.165) для переходного рассеяния в электронно-позитронной плазме нужно иметь в виду, что, быть может, концентрация ионной компоненты в околопульсарном пространстве весьма мала. Если же иметь в виду, что сама околопульсарная чисто электронно-позитронная плазма, по-видимому, состоит из нескольких компонент, имеющих различные средние энергии [189], то частицы одной из этих компонент могли бы проходить через неоднородности концентрации, создаваемые другой компонентой, и давать переходное рассеяние типа того, которое описывается формулой (6.165). Излучаться при этом могли бы не только электромагнитные, но и альфвеновские и ленгмюровские волны. Существенными могут быть и индуцированные (т. е. фактически нелинейные) процессы. Говоря об индуцированном переходном рассеянии (см. выражение (6.165), которое описывает спонтанный процесс, квадратичный по δN), мы имеем в виду, естественно, процессы третьей степени по энергии колебаний. Однако для обычного (томсоновского) рассеяния возможны и процессы, квадратичные по энергии колебаний. Короче говоря, речь идет о привлечении всех

возможных типов нелинейных и спонтанных процессов в релятивистской электронно-позитронной плазме для непротиворечивого объяснения всего спектра наблюдаемого излучения пульсаров.

Наиболее существенными в таких моделях являются два обстоятельства, отмеченные еще в [127]: это наличие очень сильных магнитных полей ($H_0 \sim 3-5 \cdot 10^{12}$ Гс) и присутствие ультрарелятивистских частиц (скорее всего, электронов и позитронов с величиной $\mathcal{E}/m_e c^2$ до 10^6-10^7 ; см. [188, 184]).

Стоит заметить в связи с возможным приложением процессов переходного излучения в вакууме в сильных полях (§ 7.2) к физике пульсаров, что при столь больших энергиях частиц даже относительно плавные неоднородности магнитной структуры околопульсарного пространства могли бы выступить как резкие скачки (большой размер зоны формирования переходного излучения). Что касается переходного тормозного излучения и тормозных неустойчивостей, то они применительно к физике пульсаров фактически не анализировались (правда, еще в [189a] обсуждалась тормозная неустойчивость, связанная с процессом обычного тормозного излучения в сильном магнитном поле; однако при этом не учитывалось поглощение из-за переходного тормозного излучения; см. § 6.5). Все это указывает на возможность и необходимость дальнейшей разработки различных аспектов поведения плазмы в указанных экстремальных условиях.

4. О переходном излучении космических лучей на пылинках. Попытка объяснить рентгеновское космическое излучение переходным излучением космических лучей на пылинках была предпринята в [190]. Однако при этом не было учтено (см. [191, 192]), что размеры пылинок обычно много меньше зоны формирования переходного излучения. Размеры пылинок порядка 10^{-5} см. Для того, чтобы излучение космических лучей попало в диапазон энергии порядка 2 кэВ ($\nu = \omega/2\pi \sim 5 \cdot 10^{17}$ с $^{-1}$), необходимо, чтобы $\mathcal{E}/Mc^2 \sim 2 \cdot 10^2$ (так как $\nu \sim (\omega_{pe}/2\pi)\mathcal{E}/Mc^2$, а ω_{pe} для материала космических пылинок порядка $3 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$). Зона формирования переходного излучения для таких параметров $2\pi(c/\omega_{pe})\mathcal{E}/Mc^2 \sim 10^{-2}$ см, что существенно больше размеров пылинок. Если размер пылинки меньше зоны формирования переходного излучения (на каждой из ее границ), то как уже отмечалось в § 3.6, спектральная энергия переходного излучения будет постоянной лишь до $\omega \sim \omega_{pe}$ и при $\omega > \omega_{pe}$ будет падать как $1/\omega^2$.

Спектральная плотность излучения для тонкой пластинки (пылинки в данном случае) меньше спектральной плотности для толстой пластинки в $(d\omega_{pe}/c)^2(\omega_{pe}/\omega)^2$ раз, где d — размер слоя (пылинки). Этот множитель в рентгеновском диапазоне (для энергии порядка 2 кэВ) составит, по крайней мере, 10^{-4} . Однако само по себе уменьшение энергии, излученной космическими лучами на одной пылинке, недостаточно для заключения о том,

что механизм переходного излучения космических лучей на космической пыли не может объяснить наблюдаемое рентгеновское космическое излучение. Можно было бы считать, что концентрация пылинок больше. Однако можно дать верхние оценки средней концентрации пыли (по инфракрасному излучению) и верхнюю оценку концентрации электронов космических лучей. Для этих значений интенсивность наблюдаемого рентгеновского излучения для энергий $\mathcal{E} \sim 2$ кэВ примерно на три порядка больше того значения, которое можно получить из оценок по переходному излучению электронов на пыли. Что касается протонной (и ядерной) компоненты космических лучей, то для указанных значений $\mathcal{E}/Mc^2$ ее концентрация довольно хорошо известна (по измерениям около Земли) и ее, опять-таки, не хватает (около трех порядков) для объяснения рентгеновского излучения при энергиях около 2 кэВ. С ростом энергии рентгеновских квантов наблюдаемая интенсивность рентгеновского космического излучения падает медленнее, чем это соответствует спектру переходного излучения на пылинках, и поэтому объяснить излучение в диапазоне энергий, больших 2 кэВ, на указанном пути подавно не удастся. Что касается излучения меньших частот — инфракрасного, например, то здесь тоже интенсивность переходного излучения не нарастает настолько, чтобы сравниться с наблюдаемой интенсивностью инфракрасного излучения. Исключение могут составить только особые («запыленные») области космического пространства (например, около некоторого типа звезд; см. также [216]).

§ 8.2. Заключительные замечания

Уже в гл. 1, имеющей характер общего введения к книге, мы подчеркивали, что переходное излучение и переходное рассеяние представляют собой явления весьма общего и, можно сказать, универсального характера. Можно надеяться, что материал, содержащийся во всей остальной части книги, подкрепляет этот тезис. Вместе с тем, мы хотим отметить следующее: изложенные выше результаты далеко не исчерпывают соответствующую проблематику, даже относящуюся к электродинамике и физике плазмы, не говоря уже о других областях. Действительно, имеющаяся теория рассеяния волн и тормозного излучения в конденсированной среде (в частности, в кристаллах) еще в недостаточной мере учитывает процессы переходного рассеяния и переходного тормозного излучения. В соответствующей общей теории необходимо также учитывать многократное рассеяние, которому в книге не уделено внимания, хотя в этом направлении и имеется ряд исследований (см., в частности, [202—205]).

Подчеркнем, что при анализе переходного рассеяния и тормозного излучения в конденсированной среде нужно принимать во внимание также нелинейные отклики среды. Дело в том, что переходное рассеяние на отдельных зарядах самой среды в известном отношении эквивалентно рассеянию на флуктуационных

полях. Последнее легко понять в случае слабозаимодействующих частиц среды, когда среднее значение квадрата флуктуации числа частиц в некотором объеме среды пропорционально числу частиц в этом объеме. При распространении даже слабых полей и волн в среде с флуктуационными полями необходимо учитывать поэтому и нелинейные процессы, содержащие произведения флуктуационного поля на поля распространяющихся волн (они линейны по полю распространяющихся волн; о связи нелинейных явлений с флуктуациями в плазме см., например, [193]). Как было подробно изложено выше (гл. 4, 5), нелинейные отклики среды очень существенно сказываются и на процессах рассеяния и тормозного излучения частиц в среде. Роль среды сводится не только к изменению показателя преломления излучаемых волн (эффект плотности [106, 108—110]) или к многократному рассеянию [202—205], но и сказывается непосредственно на сечениях рассеяния и тормозного излучения частиц в среде, причем вклад переходного рассеяния и переходного тормозного излучения (зависящий от нелинейных откликов среды) может в ряде случаев изменить даже порядок величины сечения соответствующего процесса. По-видимому, нелинейные эффекты могут играть роль и в других процессах для частиц, находящихся в среде (это ясно хотя бы из того, что нелинейную вершину — см. рис. 16, 21, 23 — можно «вставить» в каждую из линий, изображающих реальные или виртуальные электромагнитные волны). Однако анализ этих вопросов относится к кругу еще нерешенных задач. Из вышеизложенного видно, что решение таких задач, во всяком случае, в классическом (неквантовом) пределе, не встретит принципиальных затруднений, если известны нелинейные отклики среды.

Отметим, далее, что еще не решен или не проанализирован и ряд конкретных электродинамических задач, относящихся к теории переходного излучения. В первую очередь упомянем задачи из области поверхностных явлений: переходное рассеяние релеевских и других поверхностных волн на зарядах и различных возмущениях (дефектах и т. п.), расположенных на поверхности и вблизи нее [195, 195а], различные варианты переходного излучения поверхностных волн разных типов, которое должно возникать при пролете зарядов и других источников вдоль поверхности (или вблизи нее) при наличии регулярных и (или) статистических неоднородностей поверхности. При этом, конечно, речь может идти не только о шероховатой поверхности, но и о неоднородностях проницаемости на идеально гладкой поверхности и т. д. Мы специально подчеркиваем здесь роль соответствующих эффектов на поверхности, поскольку физика поверхности в целом занимает сейчас все более видное место.

Среди электродинамических задач, не нашедших отражения в настоящей книге, упомянем об учете поглощения волн в неоднородной плазме, обусловленном обратным переходным излучением (т. е. процессом, обратным переходному излучению [196]).

Этих задач мы коснулись лишь частично в § 3.8, в разделе об индуцированном переходном излучении. Однако при этом мы оставили в стороне случай слабонеоднородных сред [196]. Далее, нужно упомянуть об излучении и потерях энергии в кристаллах при каналировании [197, 86, 209, 210], о переходных эффектах в жидких кристаллах [198], в инвертированных средах [199] и о других задачах [200, 201, 206—208, 217, 223]. О переходных эффектах «нелинейного» типа уже упоминалось, но уместно подчеркнуть, что роль подобных эффектов не ограничивается сказанным ранее — она весьма многообразна. В частности, сюда относятся различные задачи электродинамики сильных полей в вакууме (как без учета других полей, так и при наличии гравитационного и, в принципе, других полей).

Переходные явления (переходное излучение, переходное рассеяние, переходное тормозное излучение) имеют место, как уже упоминалось, не только в электродинамике, но и в акустике и, вообще, в обычной и магнитной гидродинамике, гидродинамике сверхтекучих жидкостей, теории упругости и т. д. Так, в сверхтекучем гелии-II могут распространяться звуковые волны разных типов (в свободном гелии в объеме речь идет о первом и втором звуке, в пленках распространяется третий звук; в гелии, заполняющем пористый материал, может распространяться четвертый звук). В аморфном твердом теле распространяется продольный и поперечный звук, а в кристаллах могут, вообще говоря, распространяться нормальные (собственные) волны и более общего типа (т. е. не продольные и не поперечные). Естественно, что как в твердых телах, так и в гелии-II, существуют, в принципе, условия, при которых должно иметь место переходное акустическое рассеяние, превращение акустических волн одного типа в рассеянные волны другого типа на различных неоднородностях и «возмущениях». К сожалению, этот круг задач, насколько нам известно, не исследован. Может иметь место и переходное излучение акустических волн, например, при движении дислокаций [37]. Эффект типа переходного излучения нужно учитывать при рассмотрении генерации гравитационных волн [194]. Упомянем также о переходном излучении электронно-позитронных пар, которое должно возникать при пересечении зарядом границы двух сред или, скажем, границы атомного ядра. Вообще, переходное излучение, может иметь место для полей (частиц) любого типа с излучением полей любого другого типа.

Итак, еще не решено очень большое число различных задач, связанных с переходными эффектами (излучением и рассеянием) как в электродинамике, так и в других областях (в особенности в акустике). Несомненно, появятся и новые задачи, найдутся новые применения теории переходных явлений. Именно поэтому важно и нужно использовать те представления и образы, тот «язык», которые сформировались в теории переходного излучения и рассеяния. Мы надеемся на то, что настоящая книга будет способствовать достижению этой цели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1981.
2. Тамм И. Е., Франк И. М.— ДАН СССР, 1937, т. 14, с. 107.
3. Франк И. М.— В кн.: Проблемы теоретической физики: Сборник памяти И. Е. Тамма.— М.: Наука, 1972, с. 350.
4. Тамм И. Е.— УФН, 1959, т. 68, с. 387; Франк И. М.— Ibid., с. 397.
5. Бологовский Б. М.— УФН, 1957, т. 62, с. 204; 1961, т. 75, с. 295.
- 5а. Бологовский Б. М.— Труды ФИАН, 1964, т. 22, с. 5.
6. Желли Дж. Черенковское излучение.— М.: ИЛ, 1960.
7. Зрелов В. П. Излучение Вавилова — Черенкова и его применение в физике высоких энергий.— М.: Атомиздат, 1968.
8. Ландау Л. Д.— ЖЭТФ, 1964, т. 16, с. 574. (То же: Собрание трудов.— М.: Наука, 1969, т. 2, с. 7.)
9. Heaviside O.— Phil. Mag., 1889, v. 27, p. 324; Electromagnetic theory.— London.: The Electrician Publ. Co., 1912, v. 3.
10. Lord Kelvin — Phil. Mag., 1901, v. 2, p. 1.
11. Sommerfeld A.— Göttingen Nachr., 1904, S. 99, 363; 1905, S. 201. См. также: Зоммерфельд А. Оптика.— М.: ИЛ, 1953, § 47.
12. Einstein A.— Ann. d. Phys., 1907, Bd 23, S. 371.— См. также: Эйнштейн А. Собрание научных трудов.— М.: Наука, 1965, т. 1, с. 53.
13. Паули В. Теория относительности.— М.: Наука, 1983, § 6.
14. Гинзбург В. Л.— ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 173.
15. Эйджман В. Я.— Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1972, т. 15, с. 634; Астрофизика, 1972, т. 8, с. 609.
16. Бологовский Б. М., Гинзбург В. Л.— УФН, 1972, т. 106, с. 577; В кн.: Эйнштейновский сборник.— М.: Наука, 1974, с. 212; См. также ссылку [1], гл. 9 и Гинзбург В. Л. О теории относительности.— М.: Наука, 1979, с. 212.
17. Гинзбург В. Л., Франк И. М.— ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 15. (Несколько сокращенный вариант статьи: J. Phys. USSR, 1945, v. 9, p. 353.)
18. Гинзбург В. Л.— Природа, 1975, № 8, с. 56; См. также: Гинзбург В. Л. О теории относительности.— М.: Наука, 1979, с. 188.
19. Гарибян Г. М.— ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 527; 1960, т. 39, с. 332.
20. Барсуков К. А.— ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 1106.
21. Франк И. М.— УФН, 1959, т. 68, с. 397.
22. Библиографический указатель работ по переходному излучению 1946 — 1978 гг.— Ереван: Ереванский физический ин-т, 1979 (см. также [213]).
23. Франк И. М.— УФН, 1961, т. 75, с. 234.
24. Тер-Микаелян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969. (Английский перевод: Ter-Mikaelian M. L. High Energy Electromagnetic Processes in Condensed Media.— N. Y.: Wiley and Sons, 1972.)
25. Yuan L. C. L. In: Intern. Conference on Instrumentation for High Energy Physics.— Frascati, 1973, p. 334; BNL Inform. Report, 1976.
26. Арутюнян Ф. Р., Франгян А. Ф. Препринт ИФИ-75-22.— Ереван: Институт Физических исследований АН Арм. ССР, 1975.

27. Hartmann G., Müller O., Prince T. Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 1363.
28. Франк И. М.—УФН, 1965, т. 87, с. 89; Acta Phys. Pol., Ser. A, 1970, v. 38, p. 655.
29. Басс-Ф. Г., Яковенко В. М.—УФН, 1965, т. 86, с. 189.
30. Гарибян Г. М. Препринты ЕФИ-ТФ 13 (70), 1970; ЕФИ-27 (73), 1973; В кн.: Труды Международной конференции по аппаратуре в физике высоких энергий.—Дубна, 1970, т. 2, с. 509; In: Intern. Conference on Instrumentation for High Energy Physics.—Frascati, 1973, p. 329.
31. Гинзбург В. Л., Франк И. М.—ДАН СССР, 1947, т. 56, с. 699.
32. Бологовский Б. М., Воскресенский Г. В.—УФН, 1966, т. 88, с. 209; 1968, т. 94, с. 377.
33. Гинзбург В. Л.—Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1973, т. 16, с. 512.
34. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.—ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 132.
35. Давыдов В. А.—Краткие сообщения по физике, ФИАН СССР, 1976, № 4, с. 3; Вестник Моск. ун-та: Сер. физика и астрономия, 1977, т. 18, № 6, с. 64.
- 35а. Давыдов В. А.—ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 859; Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1980, т. 23, с. 982; 1982, т. 25, с. 1429.
36. Манева Г. М.—Краткие сообщения по физике, ФИАН СССР, 1977, № 2, с. 21.
37. Нацик В. Д.—Письма в ЖЭТФ, 1968, т. 8, с. 324; Нацик В. Д., Бурканов А. Н.—ФТТ, 1972, т. 14, с. 1289; Бойко В. С., Гарбер Р. И., Кившик В. Ф., Кривенко Л. Ф.—ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 708; т. 78, с. 797. Бойко В. С., Кривенко Л. Ф.—ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 255.
38. Докучаев В. И.—ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 595.
39. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.—ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 1621.
40. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.—ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 1818.
41. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.—Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1975, т. 18, с. 173. (То же: Sov. Phys.—Radio Phys. and Quantum Electron., 1975, v. 18, p. 125.)
42. Цытович В. Н.—Труды ФИАН СССР, 1973, т. 66, с. 176.
43. Акопян А. В., Цытович В. Н.—ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 166.
44. Акопян А. В., Цытович В. Н.—Физика плазмы, 1975, т. 4, с. 673.
45. Буймистров В. М., Трахтенберг Л. И.—ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 850; 1975, т. 69, с. 108.
46. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.—УФН, 1978, т. 126, с. 553 (поправки там же, 1980, т. 131, с. 83).
47. Ginzburg V. L., Tsytoich V. N.—Physics Reports, 1979, v. 49, № 1, p. 1—89; Phys. Lett., 1980, v. 79A, p. 16.
48. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.—М.: Наука, 1973.
49. Бологовский Б. М., Давыдов В. А., Рок В. Е.—УФН, 1978, т. 126, с. 311; 1982, т. 136, с. 501; См. также Бологовский Б. М., Давыдов В. А.—Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1981, т. 24, с. 231.
50. Ерохин Н. С., Новиков В. Е.—Укр. физ. ж., 1973, т. 18, с. 1423.
51. Фейнберг Е. Л.—УФН, 1980, т. 132, с. 255.
52. Аматауни А. Ц., Коржмазян Н. А.—ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1011.
53. Галеев А. А.—ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1335.
54. Цытович В. Н.—ЖТФ, 1961, т. 31, с. 923.
55. Цытович В. Н.—ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 457.
56. Lindhard F.—Nat. Fys. Medd. Selsk. 1954, Bd 28, S. 8.
57. Иркегулов А. Ш., Уразаков Э. И., Швачка А. Б.—Сообщения ОИЯИ, 1978, P9-11897, Дубна.
58. Тамм И. Е. Основы теории электричества.—М.: Наука, 1976, с. 501, 502.
59. Гинзбург В. Л., Угаров В. А.—УФН, 1976, в. 1, т. 118, с. 175.
60. Гарибян Г. М.—ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1630.
- 60а. Ивангер И. Г., Лоносов В. В.—ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 879.
61. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.—М.: Наука, 1982, с. 364.
62. Эйрман В. Я.—Изв. вузов: Сер. радиофизика, 1965, т. 8, с. 188.
63. Пафомов В. Е., Фетисов Е. П.—ЖЭТФ, 1967, т. 63, с. 963.
- 63а. Ritchie—Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 869; 1960, v. 118, p. 640.

64. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов.— М.: Наука, 1979, с. 265.
65. Lester L., De Road Fr., Wu-yang Tsai, Erber T.— Phys. Rev., 1978, v. 18, p. 2152.
66. Пафомов В. Е.— Труды ФИАН, 1961, т. 16, с. 127; ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 1074; 1960, т. 39, с. 134.
- 66а. Пафомов В. Е.— ЖЭТФ, 1960, т. 36, с. 1853.
67. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
68. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред.— М.: Атомиздат, 1971.
69. Канер Э. А., Яковенко В. М.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 471.
70. Эйджман В. Я.— Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1962, т. 5, с. 484.
71. Амагуни А. Ц.— ЖТФ, 1964, т. 34, с. 1354.
72. Euler H.— Ann. d. Phys., 1936, Bd 26, S. 398.
73. Цытович В. Н. Теория турбулентности плазмы.— М.: Атомиздат, 1971; Нелинейные эффекты в плазме.— М.: Наука, 1967.
74. Бломберген Н. Нелинейная оптика.— М.: Мир, 1966.
75. Тамойкин В. В.— Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1971, т. 14, с. 285.
76. Минаев В. С., Френкин А. Р.— Вестник МГУ: Сер. Физика, Астрономия, 1970, т. 11, с. 222.
77. Рубин С. Б., Цытович В. Н.— ЖТФ, 1964, т. 34, с. 3.
78. «Solitons in Physics. Physica Scripta», 1979, v. 20.
79. Горев В. В., Кингсен А. С., Рудаков Л. И.— Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1977, т. 19, с. 486.
80. Rudakov L. I., Tsytoyich V. N.— Physics Reports, 1978, v. 406, p. 1.
81. Kato M., Mima K., Watanabe M., Nishikawa K. Plasma physics, Nonlinear theory and experiments; proceedings Nobel Foundation Symposium.— New York and London: Plenum publishing corporation, 1976, p. 363, 368.
82. Франк И. М. В сб.: Памяти Сергея Ивановича Вавилова.— М.: Изд. АН СССР, 1952, с. 180, 189.
- 82а. Гинзбург В. Л.— ЖЭТФ, 1940, т. 10, с. 589.
- 82б. Франк И. М.— Изв. АН СССР: Сер. Физика, 1942, т. 6, с. 3.
83. Франк И. М.— Ядерная физика, 1979, т. 29, с. 180.
- 83а. Мергелян О. С.— ДАН Арм. ССР, 1963, т. 36, с. 17.
84. Гинзбург В. Л. В сб.: Памяти Сергея Ивановича Вавилова.— М.: Изд. АН СССР, 1952, с. 193.
85. Дремин И. М.— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 152; Ядерная физика, 1981, т. 33, с. 1357; Dremine I. M.— Phys. Lett., 1981, v. 102B, p. 40.
86. Andersen J. V., Andersen S. K., Augustyniak W. M. Channeling of Electrons and Positrons.— Kobenhavni Minsgaard 1977. In: Det Kongelige Danske Videnskabernes Selsnal, Matematiskfysike Meddelliser, v. 39, p. 10.
87. Цытович В. Н.— ЖТФ, 1961, т. 31, с. 766.
88. Рухадзе А. А., Богданкевич Л. С., Росинский С. Е., Рухлин В. Г. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков.— М.: Атомиздат, 1980.
89. Эйджман В. Я.— ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 1967.
90. Файнштейн С. М.— Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1965, т. 8, с. 19.
91. Калмыкова С. С.— УФН, 1981, т. 132, с. 235.
92. Агонесян С. Г., Энгилорян В. А.— Квантовая электроника, 1980, т. 7, с. 2213.
93. Калмыкова С. С.— ЖТФ, 1977, т. 47, с. 2211.
94. Богданкевич Л. С., Кузелев М. В., Рухадзе А. А.— Физика плазмы, 1979, т. 5, с. 90.
95. Юлпатов В. К.— Известия вузов: Сер. Радиофизика, 1970, т. 13, с. 1784.
96. Файнберг Я. Б., Хижняк Н. А.— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 883.
97. Барсуков К. А., Болотовский Б. М.— Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1964, т. 7, с. 291.
98. Fabjan G. W., Straezinski W.— Phys. Lett., Ser. B, 1975, v. 57, p. 483.
99. Durand L.— Phys. Rev., Ser. D, 1975, v. 11, p. 89.

100. Болотовский Б. М., Лебедев А. Н.—ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 1349.
101. Амагуни А. Ц.—Изв. АН Арм. ССР; Сер. Физ.-мат. наук, 1960, т. 13, с. 111.
102. Басс Ф. Г.—Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1959, т. 2, с. 1015.
103. Капица С. П.—ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1367.
104. Коровина Л. И., Шабад А. Е.—ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1032.
105. Тамойкин В. В.—Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1968, т. 11, с. 1879; Tamoiikin V. V.—Astrophys. and Space Sci., 1977, v. 21, p. 131.
106. Тер-Микаелян М. Л.—ДАН СССР, 1954, т. 94, с. 1033.
107. Melrose D. B.—Astrophys. and Space Sci., 1972, v. 18, p. 267.
108. Цытович В. Н.—Вестник МГУ: Сер. Физ.-мат. наук, 1951, т. 11, с. 27.
109. Гинзбург В. Л.—УФН, 1953, т. 51, с. 343.
110. Разин В. А.—Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1960, т. 3, с. 584.
111. Акопян А. В., Цытович В. Н.—ЖЭТФ, 1976, т. 72, с. 1824.
- 111a. Гинзбург В. Л.—УФН, 1959, т. 69, с. 539.
112. Кадомцев Б. Б. В сб.: Вопросы теории плазмы.—М.: Атомиздат, 1964, т. 4, с. 188.
113. Кадомцев Б. Б. В сб.: Нелинейные волны.—М.: Наука, 1979, с. 131.
- 113a. Кадомцев Б. Б.—Физика плазмы, 1975, т. 1, с. 710.
114. Сыроватский С. И.—ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 1727; В сб.: Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца, в. 4. Проблемы физики космической плазмы, 1979, с. 37.
- 114a. Сб.: Нейтральные токовые слои в плазме.—М.: Наука, 1974; Труды ФИАН, т. 74.
115. Sweet P. A.—Ann. Rev. Astron. and Astrophys., 1969, v. 7, p. 149.
- 115a. Friedman M., Hamberger S. M.—Astrophys. J., 1968, v. 152, p. 677.
- 115b. Сыроватский С. И.—Изв. АН СССР, 1967, т. 31, с. 1303; Астрон. ж., 1966, т. 43, с. 340.
116. Бельков С. А., Цытович В. Н.—ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 1293.
117. Пятаевский Л. П.—ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1450.
118. Коробкин В. Б., Серов Р. В.—Письма в ЖЭТФ, 1966, т. 4, с. 103; Аскарьян Г. А. и др.—Письма в ЖЭТФ, 1967, т. 5, с. 116.
119. Stamper J. A., Ripin B. H.—Phys. Rev. Lett., 1976, v. 34, p. 138.
120. Divergilio W. F., Wong A. Y., Kim H. C., Lee Y. C.—Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 544.
121. Tsytovich V. N. Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion, Comments on Modern Physics: Part E, 1978, v. 4, p. 81.
122. Гайлитис А. К., Цытович В. Н.—ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1726.
123. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.—ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 2234.
124. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. В сб.: Вопросы теории плазмы.—М.: Атомиздат, 1973, т. 7, с. 3.
125. Davidson R. N. Methods in Nonlinear Plasma Theory.—N. Y., Lnd.: Academic Press, 1969.
126. Kaplan S. A., Tsytovich V. N.—Astrophys. and Space Sci., 1969, v. 3, p. 431.
127. Каплан С. А., Цытович В. Н. Плазменная астрофизика.—М.: Наука, 1972.
128. Пустовалов В. В., Силин В. П. В кн.: Теория плазмы. Труды ФИАН, т. 61.—М.: Наука, 1972, с. 42.
- 128a. Гайлитис А., Цытович В. Н.—ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 1463.
129. Горбунов Л. М., Матевосян Г. Г.—Изв. вузов: Сер. радиофизика, 1977, т. 20, с. 679.
130. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме.—М.: Наука, 1976.
131. Paul T. W. W. et al. Proc. Fourth Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Phys.—Rome, Italy, 31 August—4 Sept. 1970, C. N. F. N., 1970, p. 57.
- 131a. Кадомцев Б. Б.—УФН, 1968, т. 95, с. 111.
132. Sagdeev R. Z. Proc. XVIII Symp. Appl. Math., 1967, p. 281.
133. Веденов А. А., Рудаков Л. Н.—ДАН СССР, 1964, т. 159, с. 767.
134. Гайлитис А.—Изв. АН Латв. ССР: Сер. физ.-техн., 1963, т. 4, с. 13.

135. *Tsytoich V. N.* In: Plasma Physics, Nonlinear Theory and Experiments: Proc. of Nobel Foundation Symposium.— Amsterdam: Plenum Press, 1976, p. 166.
136. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.*— Физика плазмы, 1975, т. 1, с. 10.
137. *Хакимов Ф. Х., Цытович В. Н.*— ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 1785.
138. *Bruckner K. A.* Цитир. в [135], p. 9.
139. *Briffod G.* In: Proc. of Int. Conf. on Plasma Physics.— Nagoya, Japan, April 7—11. Fusion Research Association of Japan, 1980, v. 2, p. 238.
140. *De Kluiver H.* Rijnhuizen Report 77—106 Fom Inst. voor Plasmafysica.— Intphaas, Nederland, 1977.
141. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.*— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 25.
142. *Toshio T., Itoh K., Inoue E., Nishikawa K.*— J. Phys. Soc. Japan, 1977, v. 42, p. 2006.
143. *Ibragimov I. A., Kocharov G. E.* In: Proc. of Intern. Conference on Cosmic Rays.— Bulgaria, 1977.
144. *Брауде С. Я.*— УФН, 1976, т. 120, с. 136.
145. *Бельков С. А., Николаев Ю. А., Цытович В. Н.*— Изв. вузов: Сер. радиофизика, 1980, т. 23, с. 261.
146. *Nickolaev Ju. A., Tsytoich V. N.*— Physica Scripta, 1979, v. 20, p. 665.
147. *Акопян А. В., Цытович В. Н.*— Препринт ФИАН, 1978, № 184.
148. *Гайлитис А. К.*— Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1964, т. 6, с. 646.
149. *Lehnert B.*— Nucl. Fusion, 1968, v. 173; 1973, v. 13, p. 781.
150. *Берестецкий В. В., Лифшиц Е. М., Путаевский Л. П.* Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1980.
151. *Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.*— Ядерная физика, 1979, т. 30, с. 1301.
152. *Tsai Wu-yang, Erber T.*— Phys. Rev., Ser. D, 1972, v. 12, p. 1132.
153. *Adler S. L.*— Ann. Phys., N. Y., 1971, v. 67, p. 599.
154. *Баталин И. А., Шабад А. Е.*— ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 859.
- 154a. *Shabad A. E.*— Ann. Phys., N. Y., 1975, v. 90, p. 166.
155. *Purys В. И.*— ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 2176; Препринт ФТИ им. Я. Ф. Иоффе.— Ленинград, 1971.
156. *Ginzburg V. L., Zheleznyakov V. V.*— Ann. Rev. Astron. and Astrophys., 1975, v. 13, p. 511.
157. *Novick R., Weisskopf M. C., Angel J. P., Sutherland P. G.*— Astrophys. J. (Lett.), 1977, v. 215, p. 1117.
158. *Гнедин Ю. Н., Павлов Г. Г., Шибанов Ю. А.*— Письма в Астрон. ж., 1978, т. 4, с. 214; Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 27, с. 325.
159. *Constantini V., Pistoni G., De Tollis B.*— Nuovo Cimento, Ser. A, v. 46, p. 648.
160. *Papatracos P., Mork K.*— Phys. Reports, 1975, v. 2C, N 5, p. 81.
161. *De Tollis B., Lusignoli M.*— Nuovo Cimento, Ser. A, 1976, v. 38, p. 227.
162. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М.: Наука, 1973.
163. *De Logi W. K., Mickelson A. R.* Technical Report N 84.— Calif. Inst. of Technol., Antenna Lab., 1977; Phys. Rev., Ser. D, 1977, v. 16, p. 2915.
164. *Chitre D. M., Price R. H., Sandberg V. D.*— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1018; *Matzner R. A., Sandberg V. D.*— Phys. Rev., 1977, Ser. D, v. 16, p. 2939.
165. *Мицкевич В. В.* Физические поля в общей теории относительности.— М.: Наука, 1969, с. 246.
166. *Boughn S.*— Phys. Rev., Ser. D, 1975, v. 11, p. 248.
167. *Papin G., Valluri S. R.*— Can. J. Phys., 1975, v. 53, p. 2306; 1978, v. 56, p. 801.
168. *Гинзбург В. Л., Железняков В. В.*— Астрон. ж., 1958, т. 36, с. 694.
169. *Железняков В. В.* Радиоизлучение Солнца и планет.— М.: Наука, 1964; Электромагнитные волны в космической плазме.— М.: Наука, 1977.
170. *Каплан С. А., Пикельнер С. Б., Цытович В. Н.* Физика плазмы солнечной атмосферы.— М.: Наука, 1977.
171. *Каплан С. А., Цытович В. Н.*— Астрон. ж., 1967, т. 44, с. 1194.
172. *Цытович В. И., Шапиро В. Д.*— Ядерный синтез, 1965, т. 5, с. 228.

173. Закаатов Л. П., Кингсен А. С., Плахов А. Г.—Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 17, с. 280.
174. Рютов Д. Д., Сагдеев Р. З.—ЖЭТФ, 1970, т. 58, с. 739.
175. Желёзняков В. В., Зайцев В. В.—Астрон. ж., 1970, т. 47, с. 60, 308.
176. Zaitsev V. V., Mityakov N. A., Rappoport V. D.—Solar Phys., 1972, v. 24, p. 444.
177. Papadopoulos K.—Phys. Fluids, 1975, v. 18, p. 1769.
178. Papadopoulos K., Goldstein M. L., Smith R. A.—Astrophys. J., 1974, v. 190, p. 175; Solar Phys., 1976, v. 46, p. 515; Astrophys. J., 1979, v. 234, p. 348.
179. Bardwell S., Goldman M. V.—Astrophys. J., 1976, v. 209, p. 912.
180. Hoynig P.—Astron. and Astrophys., 1977, v. 55, p. 23, p. 31.
181. Papadopoulos K., Freund H. P.—Space Sci. Rev., 1979, v. 24, p. 511.
182. Ter Haar D., Tsylovich V. N.—Physics Reports, 1981, v. 73, p. 176; Preprint University of Oxford, 1980, N 46/80.
183. Takakura T., Shibahashi H.—Solar Phys., 1976, v. 46, p. 323; Takakura T.—Solar Phys., 1977, v. 52, p. 429; 1979, v. 61, p. 141, 161; v. 62, p. 375, 383.
184. Ломинадзе Д. Г., Мочабели Г. З., Усов В. В.—Препринт ИКИ, АН СССР, 1979; Пр-517; Ломинадзе Д. Г., Мочабели Г. З., Михайловский А. Б.—Физика плазмы, 1979, т. 5, с. 1337.
185. Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б., Сагдеев Р. З.—ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 1951; Михайловский А. Б.—Физика плазмы, 1980, т. 6, с. 613.
186. Tsylovich V. N., Wharton C. B. Comments on Plasma Phys. Contr. Fusion, Comments on Modern Phys., Part E, 1979, v. 4, p. 91.
187. Sturrock P. A.—Astron. J., 1971, v. 164, p. 529.
188. Ruderman M. A., Sutherland P. G.—Astrophys. J., 1975, v. 196, p. 51.
189. Tadamaru E.—Astrophys. J., 1970, v. 183, p. 625.
- 189a. Canuto V., Chin H. Y.—Phys. Rev., 1968, v. 173, p. 1229.
190. Johansson S. A. E.—Astrophys. Lett., 1971, v. 7, p. 143; Lerche I.—Astrophys. J., 1972, v. 175, p. 373.
191. Durand L.—Astrophys. J., 1973, v. 182, p. 417.
192. Yodh G. B., Artru X., Romaty R.—Astrophys. J., 1973, v. 181, p. 725.
193. Суренко А. Г. Флуктуации и нелинейные взаимодействия волн в плазме.—Киев: Наукова думка, 1977.
194. Thorne K. S., Kovacs S. T.—Astrophys. J., 1975, v. 200, p. 245; 1977, v. 217, p. 252.
195. Bishop M. F., Maradudin A. A.—Solid State Com., 1973, v. 12, p. 1225.
- 195a. Ginzburg V. L. In: Theory of Light Scattering in Condensed Matter: Proc. of the First Joint USA—USSR Symposium.—N. Y., Lnd: Plenum Press, 1976, p. 369.
196. Эйджман В. Я.—ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 1419.
197. Базылев В. А., Жеваго Н. К.—ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 1967; Жеваго Н. К.—ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 428.
198. Беляков В. А., Дмитриенко В. Е., Орлов В. П.—Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 1, с. 978.
199. Гаврилов В. П., Коломенский А. А.—Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 14, с. 617; 1972, т. 16, с. 29.
200. Гарибян Г. М., Ян Ши.—ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 930; 1972, т. 63, с. 1198; Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 269.
201. Арутюнян В. М., Оганесян С. Г.—ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 466.
202. Гарибян Г. М., Померанчук И. Я.—ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 1828.
203. Гольдман И. И.—ЖЭТФ, 1960, т. 38, с. 1866.
204. Пафомов В. Е.—ДАН СССР, 1960, т. 133, с. 1315.
205. Тер-Микаелян М. Л.—Письма в ЖЭТФ, 1968, т. 8, с. 100.
206. Брагинский В. Б., Мустель Е. Р.—Изв. вузов: Сер. радиофизика, 1958, т. 1, с. 124.
207. Бобринев В., Брагинский В.—ДАН СССР, 1958, т. 123, с. 634.
208. Брагинский В. Б., Халили Ф. Я.—ЖЭТФ, 1980, т. 78, с. 1712.
209. Gett mell D. S.—Rev. Mod. Phys., 1974, v. 46, p. 129.

210. *Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф.*—Препринт ХФТИ, 1977, ХФТИ, 77-38.
211. *Cherry M. L.*—Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 2245.
212. *Румянцев В. В., Либенсон Б. Н.*—ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 247.
213. Библиография работ по переходному излучению заряженных частиц (1945—1982).—Ереван: Ереванский физический ин-т, 1983.
214. *Варданян Л. А., Меркулова И. Г., Сардарян Р. А.* Научометрический анализ публикаций по переходному излучению.—Ереван: Препринт ЕФИ-685(75)-83, Ереванский физический ин-т, 1983.
215. *Rudakov L. I., Tsytovich V. N.*—Plasma Physics, 1971, v. 13, p. 213.
216. *Агоронян Ф. А., Амбарцумян А. С.*—Астрофизика АН Арм. ССР, 1981, т. 17, с. 807.
217. *Барышевский В. Г.* Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях.—Минск: Изд-во БГУ, 1982.
218. *Давыдов В. А.*—Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1982, т. 25, с. 1429; 1983, т. 26, с. 1134.
219. *Аскарьян Г. А.*—ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 1360.
220. *Корхмазян Н. А.*—Изв. АН Арм. ССР, физ.-мат. науки, 1957, т. 10, с. 29.
221. *Павлов В. И., Сухоруков А. И., Требер П. М.*—Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1982, т. 25, с. 412.
222. *Франк И. М., Цытович В. Н.*—Ядерная физика, 1980, т. 31, с. 974.
223. *Белесцкий Н. Н., Харьковский С. Н., Яковенко В. М.*—Изв. вузов: Сер. Радиофизика, 1983, т. 26, с. 1149.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В предметном указателе используются следующие сокращения: излучение Вавилова — Черепкова — ИВЧ, переходное излучение — ПИ, переходное рассеяние — ПР, переходное тормозное излучение — ПТИ.

- Анизотропные среды, ПИ 120
- Баланс импульсов при ПИ 79, 82
 - мощностей при ПР 222
 - энергии при ПИ 64, 76
 - ультрарелятивистских частиц 74
- Вакуум, дисперсия 323
 - , ИВЧ 10, 327
 - , нелинейности 321
 - , ПИ 324, 328
 - , ПР 330
 - , ПТИ 335
- Вероятности ИВЧ 91
 - ПИ 93, 96
 - ПР 227, 273, 276
 - ПТИ 248, 251, 275
- Волна проникаемости диэлектрической 16, 191, 196
 - — магнитной 215
- Восприимчивость линейная 25, 147
 - нелинейная 149
- Гиротропные среды, ПИ 120, 126
- Гравитационная длина 339
- Гравитационные волны ПР диполя 340
 - — — заряда 336
 - — — ПТИ 341
- Граница раздела сред, ПИ 25
 - — — размытая 54, 70, 87
- Граничные условия 27, 136
- Грина функция 152, 205, 245, 250
- Дельбрукское рассеяние 333
- Диполи магнитные токовые, ИВЧ 167
 - — —, ПИ 160, 166
 - — —, ПР 214
 - — —, ПТИ 257
 - электрические ПИ 155
 - —, ПР 212
 - —, ПТИ 257
- Дисперсия пространственная 53, 130
 - частотная 38, 53
- Диэлектрическая проницаемость вакуума 320
 - — линейная 25, 147
 - — нелинейная 149
 - —, плавное изменение во времени ПИ 62
 - — плазмы 270
- Заряд магнитный 159
 - покоящийся, ПР 207
 - ультрарелятивистский, ПИ 39
 - —, ПР 208, 218, 230, 297, 307
 - —, ПТИ 252, 308, 316
- Затухание Ландау 8, 296
- Зеркальное отражение частиц 133
- Зона формирования ПИ 51, 326
- Изображение заряда 12, 133
 - —, метод 133
- Импульс, переданный границе раздела сред 84, 93
 - , перенормировка 79
 - , сохранение при ПИ 83
- Индукцированное ИВЧ 180
 - ПИ 185
 - ПР 226, 290
 - ПТИ 258, 263
- Интерференционный множитель 189, 198, 199
- Интерференция ИВЧ и ПИ 109, 118
 - ПИ в пластинке 189
 - — и падающей волны 182
 - — на границе раздела сред 189
 - ПР и томсоновского рассеяния 232
 - ПТИ и обычного тормозного излучения 248
- Квадруполи ПИ 168
- Когерентное ПИ 170, 175
 - — сгустков заряда 170

Когерентное ПИ токов 173
 Колебания плазмы 269
 — частицы в поле волны 178
 Конденсат плазменных колебаний 292
 Концентрация частиц среды 38
 Космические лучи, ПР 302, 346, 348
 Магнитные поля, генерация 269
 — —, неоднородности 267
 — —, пересоединения 268
 — —, сильные 280, 312, 316, 321
 Магнитный заряд, ПИ 158
 Магнитоактивные среды, ПИ 126
 Макроскопическая перенормировка импульса 79
 — — энергии 72
 Максимальная частота ПИ 39, 165
 Матричные элементы нелинейных откликов среды 278
 — — обыкновенного тормозного излучения 249
 — — ПР 233
 — — ПТИ 248, 249
 Монополи, ПИ 158
 Мощность ИВЧ 28, 109, 112, 125, 166, 167, 327
 — ПИ в периодической среде 200
 — ПР 207, 209, 214, 217, 222, 227
 — ПТИ 246
 Нелинейное ИВЧ 151
 — ПИ 150
 Нелинейные токи плазмы 278, 283
 — — среды 147, 232, 245
 Неоднородности концентрации ПР 217, 299, 306
 — магнитных полей ПР 276, 300, 304
 Нерелятивистские частицы ПИ 37
 — — ПР 284
 Плазма в сильном магнитном поле ПТИ 312, 316
 Пластика ИВЧ 109, 112, 117
 — ПИ 118, 119
 Поверхностная волна 99
 — —, ПИ 101
 Поверхностные заряды 134
 Плотности эффект 238, 300
 Поле заряда собственное 27
 — излучения 27, 137
 Полное внутреннее отражение при ПИ 33, 101

Продольные волны в плазме 269
 — — ПИ 142, 273
 — — ПР 284, 294
 — — ПТИ 310
 Пространственная дисперсия в средах, ПИ 137
 — — —, ПР 210
 Пульсары, ПИ и ПР 320, 324, 329
 Пучки частиц, неустойчивость при ПИ 185
 — — —, — — ПР 230
 — — —, — — ПТИ 260, 303
 Пыль космическая, ПИ 348
 Работа внешних источников при ПИ 77, 96
 — поля пад зарядом при ПИ 65
 Радиоизлучение Солнца, ПР 343
 Размытая граница раздела сред 54, 70, 87
 Резонансное ПИ 196
 Световой импульс, ПИ 153
 Сечение ПР в плазме 288
 — — гравитационных волн 339
 Солиiton, ПИ 154
 Сохранения законы при ИВЧ 91
 — — — ПИ 90, 92
 — — — ПР 194
 — — — ПТИ 246
 Стопка пластинок ПИ 198
 Томсоновское рассеяние 232, 288, 304
 Тормозная неустойчивость 260, 318
 Усиление излучения при ПИ 185
 — — — ПР 230
 — — — ПТИ 260
 Ферродизлектрик, ИВЧ 125
 —, ПИ 120, 122
 Френеля коэффициенты 35
 Частицы надтепловые, ПР 294
 — —, ПТИ 309
 Энергия, перенормировка 72
 —, ПИ 30, 38, 45, 61, 108, 151, 325, 329
 — —, спектральная плотность 24, 41, 108, 157, 159, 168, 325, 329
 — —, угловое распределение 23, 33, 44, 49, 59, 157, 159
 Эйнштейна коэффициенты 226